

# Физика волновых процессов и радиотехнические системы

## Аппроксимация коротких процессов, сигналов, функций и расчет их гармонических дискретных спектров

Е.В. Дмитриев

*Почему считается, что спектр отрезка функции  $\sin(2\pi ft)$  содержит иное, но не гармонику с частотой  $f$ ? В статье вводится в рассмотрение новая качественная и количественная характеристика коротких процессов - спектр, состоящий из конечного оптимального набора не обязательно ортогональных гармонических составляющих. Описываются свойства спектра. Сформулированы утверждения о возможности разложения коротких дискретных и непрерывных процессов в конечный гармонический ряд. Предлагаются способы определения нового спектра. Излагаются методы эффективной аппроксимации коротких процессов, используемые при расчете нового спектра. Приводятся примеры.*

### 1. Постановка задачи

В настоящее время традиционные способы определения спектра процессов и отдельных сигналов основаны на использовании их разложений в ряды или представлении интегралами Фурье с применением базисных ортогональных функций. Однако эти способы вместе с их модификациями не всегда эффективны при анализе коротких сигналов (имеющих конечную длительность), в том числе фрагментов процессов. Главным является то, что в них искусственно навязывается поведение сигнала на концах и вне интервала (в том числе разрывы первого рода сигнала и его производной), что отрицательно, а иногда губительно сказывается на показателях, характеризующих колебательные свойства сигнала. В качестве примера рассмотрим реализацию стационарного непрерывного процесса. Выделим из нее отрезок. Рассчитаем спектр последнего, используя интегральное преобразование Фурье. В таком спектре не отображаются корреляционные свойства процесса, что не позволяет использовать его, например, для интерполяции и экстраполяции. Аналогичное действие имеет место и для дискретных процессов. Далее спектры на основе разложений Фурье обладают значительной избыточностью (по количеству гармоник). В результате имеем некий парадокс: традиционный спектр короткого процесса, состоящего из нескольких гармоник, не является линейчатым, что не соответствует реальности. Функции, восстанов-

ленные по дискретному спектру Фурье, подвержены также явлению Гиббса. Эти и другие недостатки спектров подробнее рассматриваются ниже.

Поэтому, в настоящее время актуально и полезно для практических приложений применение иного, более эффективного способа описания колебательных свойств сигнала внутри временного интервала. С этой целью введем в рассмотрение новый тип спектра, дадим ему соответствующее определение и предложим алгоритмы его расчета. Поставим и решим следующую оптимизационную задачу. Нужно определить минимальное количество  $K$  гармоник, не обязательно ортогональных, в сумме образующих (с заданной точностью) внутри временного интервала  $[0, T]$  короткий процесс – дискретный по времени —  $x[n]$ , или непрерывный —  $x(t)$ , а также рассчитать значения

$$A_0, (A_1, B_1, \omega_1), \dots, (A_K, B_K, \omega_K), \quad (1)$$

параметров этих гармоник – частоты и амплитуды. Здесь  $A_0$  — постоянная составляющая. При этом поведение процесса вне интервала ничем не должно быть ограничено.

Найденный в результате решения набор параметров (1) будем считать искомым спектром — гармоническим спектром короткого процесса. В полярных координатах параметрами спектра будут  $\{\omega_k, R_k, \phi_k\}$ . Как будет показано далее, отмеченные выше недостатки (являющиеся свойствами спектра Фурье) и ряд других у нового спектра отсутствуют.

Изложенная формулировка является с одной стороны задачей определения спектра, а с дру-

Е.В. Дмитриев

г. Воронеж, ОАО «Концерн «Созвездие»

гой – задачей аппроксимации короткого процесса функцией

$$y(t) = A_0 + \sum_1^K (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t). \quad (2)$$

Данная статья посвящена разработке и исследованию методов решения обеих задач. Рассматриваемые процессы — действительные функции. Необходимо отметить, что предлагаемая здесь методика может быть применена независимо от того, является ли исследуемый процесс, сигнал или функция по своей природе суммой колебаний или нет. Анализируемый процесс может являться полезным сигналом без, либо с наложенной помехой, которая или априорно присутствует в сигнале, или ее наличие предполагается.

Исследования показали, что в качестве ошибки аппроксимации достаточно взять традиционные выражения

$$S^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [x(t) - y(t)]^2 dt, \quad S^2 = \frac{1}{N} \sum_0^{N-1} \{x[n] - y[n]\}^2, \quad (3)$$

если рассматриваемый процесс непрерывный и дискретная последовательность соответственно, где

$$y[n] = A_0 + \sum_{k=1}^K \left( A_k \cos \omega_k \frac{nT}{N} + B_k \sin \omega_k \frac{nT}{N} \right). \quad (4)$$

Здесь  $y[n] = y(n\Delta t)$ ;  $\Delta t = T/N$ . Использование выражений (3) наиболее эффективно, если ошибки  $y(t) - x(t)$  для различных  $n\Delta t$  статистически независимы и распределены по нормальному закону.

Естественно, амплитуды и частоты спектра следует определять методом наименьших квадратов — минимизацией ошибки  $S$ , как целевой функции, по параметрам (1). Результат решения будет различным в зависимости от количества  $K$  используемых гармоник. Поэтому задача должна решаться с учетом выполнения дополнительного условия, связывающего параметр  $K$  с величиной допустимой ошибки  $S$ . В одном случае это достижение минимума  $K_s$  при заданной ошибке или минимума ошибки при заданном  $K_v$ . В другом — достижение минимума  $K_0$  при нулевой  $S$ . Главным показателем является величина  $K$  при фиксированных  $N$  и  $S$ . Чем она меньше, тем ближе рассчитываемый спектр к реальному.

Далее вводятся в рассмотрение некоторые понятия и определения для процессов и новых спектров. Излагаются полезные свойства процессов, установленные в результате исследований. Предлагается общий метод определения спектров про-

цесса, приводятся примеры. Даются характеристики предложенных методов аппроксимации и расчета спектров в сравнении с известными. Приводятся эффективные методы определения полного и частичного спектров процесса: статистический параллельный, аналитический параллельный и статистический последовательный.

## 2. Основные определения

Частичный спектр (Ч-спектр) — набор параметров (1) минимального количества  $K_s$  (или во втором случае заданного  $K_v$ ) синусоидальных компонент, сумма которых аппроксимирует на интервале  $[0, T]$  непрерывный процесс  $x(t)$  или дискретный  $x[n]$  с ошибкой, не превышающей заданного значения  $S$  (или с минимально возможной ошибкой во втором случае).

Полный спектр (П-спектр) — набор параметров (1) суммы синусоидальных компонент, аппроксимирующей на интервале  $[0, T]$  непрерывный процесс  $x(t)$  или дискретный  $x[n]$ , где количество компонент  $K_0$  определяется как минимально возможное, при котором равна нулю ошибка аппроксимации  $S$ . П-спектр может не быть единственным.

В обоих определениях предполагается, что параметры различных гармоник априорно не связаны друг с другом зависимостью. Требование взаимной ортогональности на гармоники также не налагается. Очевидно, что спектры, рассчитанные согласно данным определениям, будут дискретными (линейчатými) и, за исключением особых случаев, с конечным числом спектральных линий. Ради сокращения короткий процесс на интервале  $[0, T]$  за исключением оговоренных случаев будем именовать “процессом” или “сигналом”.

Необходимо отметить, что не всегда требуется определять П-спектр — полный и точный спектр процесса. Например, когда анализируется смесь сосредоточенного по спектру сигнала и аддитивного шума, достаточно определить только спектр сигнала. Или напротив, если сигнал широкополосный с наложенной узкополосной помехой, то для вычитания последней следует определить ее спектр. В этих случаях достаточно определять значимые гармоники процесса, то есть его Ч-спектр.

Далее термином “спектр”, если не оговорено иное, будет обозначаться как П- так и Ч-спектр. Введем несколько уточняющих понятий для функций

(процессов) и их спектров, которые будут использованы в дальнейшем. Функции в зависимости от типа и структуры, а также результатов расчета их спектров могут быть следующие.

*Гармонизируемая функция* ( $\Gamma$ -функция); ее можно точно представить конечной суммой  $K_0$  гармоник в виде (2) или (4) и она имеет П-спектр. Отрезок любого дискретного процесса и некоторых непрерывных есть  $\Gamma$ -функция.

*Однозначно гармонизируемая функция* (ОГ-функция); ее представление в виде (2) или (4) единственное и она имеет однозначный П-спектр.

*Условно гармонизируемая функция* (УГ-функция); это один из вариантов неоднозначной  $\Gamma$ -функции, выбранный с учетом выполнения определенных условий; она имеет условный П-спектр.

*Частично гармонизируемая функция* (ЧГ-функция); ее при заданном  $K$  можно представить суммой гармоник, лишь с ошибкой  $S \neq 0$ ; она имеет Ч-спектр.

$K_v, K_a$  — количество гармоник, искомое и априорно представляющее функцию.  $K_s, K_0$  — минимальное число частот спектра функции при заданной и нулевой ошибке  $S$ .

Для выбора единственного из множества условных П-спектров необходимо связать его параметры функциональными зависимостями или логическими условиями, которые подлежат учету в процессе определения спектра. Например, можно задать значения некоторых из  $K_v$  частот как исходные данные, потребовать узкополосность их распределения на оси частот, задать полосу допустимых частот. Возможно требование равномерности распределения частот во всем диапазоне. В последнем случае следует вместе с расстоянием  $S$  минимизировать выражение

$$CS^2 + \omega_1^2 + (\pi N/T - \omega_{K_v})^2 + \sum_2^{K_v} (\omega_k - \omega_{k-1})^2, \quad (5)$$

в итоге добиваясь нулевого  $S$ . Известным вариантом такого случая при  $K_v = [N/2]$  и  $\omega_k - \omega_{k-1} = 2\pi/T$  является спектр, формируемый на основе дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Здесь и далее квадратные скобки  $[]$  обозначают целую часть числа. Можно также искать гармоники с амплитудами, не превышающими заданного значения. Или можно использовать выражение

$$CS^2 + A_0^2 + \frac{1}{K_v} \sum_1^{K_v} (A_k^2 + B_k^2). \quad (6)$$

Следует ожидать, что тогда будет найден условный П-спектр с минимальными в среднем

значениями амплитуд гармоник. Для поиска определенного количества  $K$  только значимых частот можно минимизировать выражение:

$$CS^2 + \frac{1}{K_v - K} \sum_{K+1}^{K_v} R_k^2, \quad (7)$$

где  $R_k^2$  — амплитуды последних (по величине)  $K_v - K$  гармоник. В этом случае спектр должен вычисляться итерационным способом. Для правильной сходимости следует в каждом цикле упорядочивать амплитуды по убыванию.

Необходимо отметить, что во всех рассмотренных случаях значимые спектральные составляющие процесса мало изменят свое положение на частотной оси относительно истинного. Однако при наложении достаточно сильных ограничений на параметры спектра нулевое значение  $S$  может вовсе не достигаться. Тогда процесс окажется не гармонизируемым и будет рассчитан только Ч-спектр. Поэтому важно найти единственный универсальный и эффективный способ связывания параметров (1) с целью нахождения однозначного условного П-спектра любого процесса.

### 3. Свойства процессов, определяющие состав и структуру спектров

Отметим, что при  $3K_v + 1$ , приближающемся к  $N$ , проявляются особенности, как в спектре процесса, так и при его определении. Это связано с тем, что при  $3K_v + 1 = N$  число неизвестных параметров спектра совпадает с количеством отсчетов процесса. Кроме того, при изменении  $N$  на 3 скачкообразно изменяются характеристики процесса и его спектра. Поэтому для каждой тройки значений  $N$  введем в рассмотрение условное количество  $K(N) = [(N + 2)/3]$  гармоник, которые можно считать содержащимися в дискретном процессе. Пример: для  $N$  из тройки чисел 10, 11 и 12 имеем  $K(N) = 4$ .

По результатам проведенных исследований некоторых процессов и их спектров установлено следующее.

**Утверждение 1.** Любой дискретный процесс  $x[n]$ , заданный на интервале  $[0, T]$ , можно точно представить суммой (4) из постоянного члена и конечного числа  $K_0$  гармонических составляющих. При этом величина  $K_0$  является минимальной из возможных и не превышает значения  $K(N)$ .  $K_0$  определяется для трех вариантов следующим образом:

$$\begin{cases} \text{если } N \text{ кратно } 3, \text{ то } K_0 \leq N/3 = K(N); \\ \text{если } N+1 \text{ кратно } 3, \text{ то } K_0 \leq (N+1)/3 = K(N); \\ \text{если } N+2 \text{ кратно } 3, \text{ то } K_0 \leq (N+2)/3 = K(N). \end{cases} \quad (8)$$

Периодические компоненты в (4) в общем случае не будут взаимно ортогональными. Набор их параметров (1), где  $K = K_0$ , будет П-спектром, то есть полным гармоническим спектром дискретного процесса  $x[n]$ . Сам процесс будет Г-функцией, то есть гармонизируемой функцией.

Это утверждение справедливо для любых дискретных детерминированных функций и реализаций случайных процессов, в том числе для отсчетов шума и его аддитивной смеси с любыми сигналами.

**Утверждение 2.** Любой гладкий (имеющий ограниченную и непрерывную первую производную) процесс на конечном интервале  $[0, T]$  можно представить суммой (2), где  $K = K_0$ . Периодические компоненты, входящие в сумму, не обязательно должны быть взаимно ортогональными на  $[0, T]$ . Если процесс  $x(t)$  не содержит гармоник с частотами большими  $\omega_{\max}$  (в терминах данной статьи), то  $K_0 \leq K(N)$ , где число отсчетов дискретизованного процесса  $N = \lceil T\omega_{\max}/\pi \rceil$ . Здесь  $\lceil a \rceil$  — наименьшее целое, превышающее  $a$ . Тогда для этих  $K$  и  $N$  можно так выбрать параметры гармоник, что будет иметь место точное равенство  $x(t)$  с (2) в точках  $t_n = nT/N$  и с минимальной погрешностью между ними. Набор параметров суммы (2), будет являться П-спекром, то есть полным гармоническим спектром непрерывного процесса  $x(t)$ . Сам процесс будет Г-функцией.

Если частота  $\omega_{\max}$  и количество гармоник  $K_0$  неизвестны, то зависящий от них интервал  $T/N$  дискретизации процесса можно подобрать опытным путем. Для этого надо задать его изначально большим и уменьшать до достижения ошибкой 1 из (3) необходимого нулевого уровня.

**Замечание.** Если процесс не является гладкой функцией внутри  $[0, T]$ , то частота  $\omega_{\max}$  не будет конечной. Тогда искомым П-спектр будет состоять из бесконечного набора гармоник. Он всегда будет линейчатый, однако менее плотный, чем построенный путем разложения процесса в бесконечный ряд Фурье. При задании числа гармоник  $K_0$  конечным значением, можно построить Ч-спектр процесса, причем с любой допустимой ошибкой  $S$ . При ее уменьшении число искомым гармоник должно возрастать. Если спектр рассчитывать по дискретизованному про-

цессу, то согласно утверждению 1, количество гармоник в спектре будет ограничено:  $K_v \leq K(N)$ .

Далее, если не оговорено иное, будут рассматриваться процессы, для которых выполняются условия (8). Из обобщения утверждений 1 и 2 вытекает следующее.

**Следствие 1.** Поскольку любая дискретная и любая гладкая функция может быть аппроксимирована суммой, состоящей из константы и  $K_0 \leq K(N)$  синусоид, то важно следующее. Посредством ограниченного числа гармонических составляющих можно воспроизвести (сформировать) отрезок любого дискретного или гладкого процесса. И его спектром будет набор (1), где  $K = K_0$ . Более того, гладкий процесс, как и последовательность его отсчетов на интервале  $[0, T]$  при соответствующем выборе  $N$  и  $K$  (согласно (8)) будут иметь одинаковую аппроксимирующую функцию (4) и, следовательно, совпадающие дискретные (линейчатые) спектры (1). Аппроксимация и воспроизведение с помощью (2) будут точными в выбранные дискреты времени и с минимальными ошибками между ними.

Использование утверждений 1 и 2 позволяет уменьшить число отыскиваемых частот процесса с минимально возможного  $\lceil N/2 \rceil$ , как при расчете ДПФ, до  $K_0$ , которое не больше  $K(N)$ , измеримого с  $N/3$ .

**Утверждение 3.** Минимальное количество гармоник, которое в сумме с постоянной составляющей  $A_0$  точно представляет дискретный процесс, являющийся неоднозначной Г-функцией, равно  $K(N)$ . При этом процесс будет иметь наименее плотный неоднозначный П-спектр. Это позволяет задавать различные варианты заполнения формируемого процесса минимальным количеством зависимых гармоник, например, для преднамеренного создания неопределенности при последующем анализе процесса.

**Утверждение 4.** Максимальное количество гармоник, которое вместе с постоянной составляющей  $A_0$  может содержать дискретный процесс, оставаясь ОГ-функцией, равно  $K_0 = K(N) - 1$ . Если постоянная отсутствует и  $N$  кратно 3, то  $K_0 = K(N)$ . В этих случаях процесс, который назовем стандартным, имеет наиболее плотный однозначный П-спектр. Данное утверждение позволяет определять предел заполнения формируемого процесса независимыми и поэтому различимыми гармониками.



мерами являются сумма гармоник в количестве не меньшем, чем  $K(N)$ , выборка нормального случайного процесса или его суммы с другими сигналами.

#### 4. Общий метод определения спектра

Утверждения 1 и 2 и их следствия позволяют уточнить и детализировать постановку задачи, сформулированную в п. 1, по аппроксимации анализируемого процесса и определению его спектра. Возможны два варианта алгоритма расчета.

1. Расчет Ч- и однозначного П-спектра. В этом случае соотношение числа искомых гармоник и длины сигнала должно быть  $K_v < K(N)$ .

2. Расчет неоднозначного и условного П-спектров. Здесь соотношение числа искомых гармоник и длины сигнала  $K_v = K(N)$ .

Чтобы точнее определять, какого типа спектр может быть получен для конкретного сочетания  $N, K_v, K_a$ , был проведен его расчет для полигармонических сигналов и реализаций нормального случайного процесса. Анализ результатов показал следующее.

Однозначный П-спектр получится, если выполняются определенные условия. В компактной и точной форме их можно записать логическим соотношением

$$(K_v \leq K(N) - 1) \wedge \{(K_v = K_a) \wedge [(A_{0a} = 0) \vee (A_{0a} \neq 0) \wedge (A_{0v} \neq 0)] \vee (K_v = K_a + 1) \wedge (A_{0v} = 0) \wedge (A_{0a} \neq 0)\} = 1.$$

Условный П-спектр может быть получен, если выполняется условие

$$(K_v \leq K(N) - 1) \wedge \{(K_v \geq K_a + 1) \wedge (A_{0a} = 0) \vee [(A_{0a} \neq 0) \wedge ((K_v \geq K_a + 2) \vee (K_v = K_a + 1) \wedge (A_{0v} \neq 0))]\} \vee (K(N) \leq K_v) \vee (x[n] = \xi[n]) \wedge [(K_v \geq K(N) + 1) \vee (K_v = K(N)) \wedge (A_{0v} \neq 0)] = 1.$$

Для процесса может быть получен только Ч-спектр, если выполняется условие

$$(K_v \leq K(N) - 1) \wedge [(K_v \leq K_v) \wedge (A_{0v} = 0) \vee (K_v + 1 \leq K_v) \wedge (A_{0v} \neq 0)] \vee (x[n] = \xi[n]) \wedge [(K_v \leq K(N) - 1) \vee (K_v = K(N)) \wedge (A_{0v} = 0)] = 1.$$

Кроме того, если  $N$  кратно 3 и  $(K_v = K(N)) \wedge (A_{0v} = 0) = 1$ , то можно рассчитать однозначный П-спектр процесса, как стандартного, если  $(K_a = K_v) \wedge (A_{0a} = 0) = 1$ , и условный П-спектр, если истинно выражение

$$(K_v = K(N)) \wedge (A_{0v} = 0) \wedge (K_a = K_v).$$

Запись  $(x[n] = \xi[n])$  означает, что  $x[n]$  является реализацией нормального случайного процесса. Если  $K_a$  неизвестно, то следует использовать  $K(N)$ .

При неизвестной  $A_{0a}$  следует допустить существование этой постоянной составляющей.

В соответствии с этими условиями возможны три процедуры расчета спектра в зависимости от комбинации типа процесса и варианта алгоритма.

1. Вариант 1 алгоритма для процесса типа 1. а)  $K_a = K_v$ . В этом случае будет рассчитан однозначный П-спектр. б)  $K_a < K_v$ . Можно получить или неоднозначный или условный П-спектр. в)  $K_a > K_v$ . Может быть рассчитан Ч-спектр, поскольку он определяется по результатам неточной аппроксимации.

2. Вариант 2 алгоритма для процесса типа 1 и 2. При  $K_a \leq K_v$  можно получить или неоднозначный или условный П-спектр, так как здесь число искомых параметров спектра превышает число исходных данных.

3. Вариант 1 алгоритма для процесса типа 2. При  $K_a > K_v$  аппроксимация будет осуществлена неточно, поэтому получится Ч-спектр. При  $K_a = K_v$  и отсутствии в процессе постоянной составляющей получится однозначный П-спектр.

Способ расчета П-спектра процесса может иметь две модификации.

1) Количество гармоник  $K_a$ , содержащихся в процессе, известно или задается. Если процесс имеет тип 1, то должна использоваться процедура 1 для  $K_a = K_v$ . Если процесс типа 2, то – процедура 2.

2) Количество гармоник неизвестно. В этом случае следует задать начальное  $K_v = K(N)$  и использовать процедуру 2. Если получится неоднозначный П-спектр, надо уменьшить  $K_v$  на единицу и воспользоваться процедурой 1. Если здесь П-спектр не будет найден, то им должен стать предыдущий результат. Такой процесс будет иметь тип 2. В противном случае надо опять уменьшить  $K_v$  и снова рассчитать спектр по процедуре 1. И так далее, до получения П-спектра с минимально возможным  $K_v$ . Тогда процесс будет иметь тип 1. На последнем этапе возможно получение как однозначного, так и условного П-спектра.

*Способ расчета Ч-спектра процесса.* Здесь  $K_a$  предполагается таким, что  $K_a > K_v$ . В этом случае задается требуемое количество спектральных составляющих  $K_v$  или допустимая ошибка  $S$  аппроксимации и используется расчетная процедура 1 или 3.

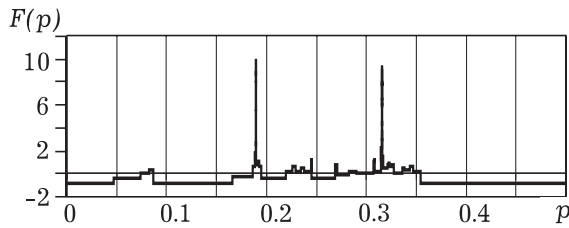


Рис. 2. Распределение вероятностей частот спектра сигнала при отсутствии шума

Основой рассмотренных алгоритмов вычисления спектров является минимизация целевой функции  $S$  по параметрам (1) при заданном  $K$ . Для этого составляется и решается система  $3K + 1$  линейных и нелинейных (трансцендентных относительно частот) уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial A_0} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial A_k} = 0; \quad \frac{\partial S}{\partial B_k} = 0; \\ \frac{\partial S}{\partial \omega_k} = 0; \quad k = 1, 2, \dots, K, \end{aligned} \quad (9)$$

где отклонение  $S$  аппроксимирующей функции от анализируемого процесса есть одно из (3). Поскольку система нелинейная и может не быть необходимого соответствия между  $K_s$ ,  $K_0$ ,  $K_v$ ,  $K_a$  и  $N$ , то при решении не всегда получится единственный спектр — набор параметров (1) или не будет достигнуто нулевое значение ошибки  $S$ . Аналитическое решение полученной системы ввиду математических сложностей в настоящее время затруднительно. Однако, оно возможно численными итерационными методами. Один из них предлагается следующий.

### 5. Статистический параллельный метод расчета спектров

Для заданного количества спектральных частот  $K = K_v$  выбирается исходная точка — их начальные значения  $\{\omega_k\}$ . Затем, после решения системы линейных уравнений, составленной из первых трех групп (9) относительно  $A_0, A_1, B_1, \dots, A_K, B_K$ , рассчитывается величина ошибки  $S$ . Далее с целью определения направления изменения частот, при котором происходит уменьшение ошибки, выбираются несколько точек в окрестности исходной и для каждой из них рассчитывается  $S$ . Точка, в которой она минимальна, обозначается как новая исходная. Процесс повторяется до достижения локального минимума  $S$ . Последние значения частот и им соответствующие параметры считаются спектром процесса. При приближении набора частот к оп-

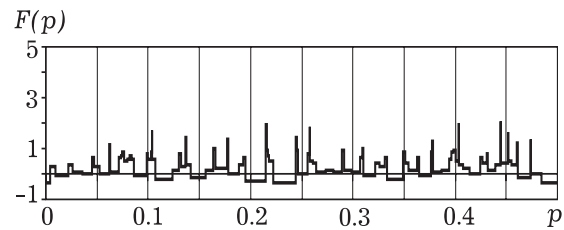


Рис. 3. Распределение вероятностей частот спектра шума

тимальному размер окрестности следует уменьшать. Изменяя положение начальной точки, достигаем глобального минимума  $S$ . Если выбор исходной и промежуточных точек осуществлять случайным образом, то решение задачи будет основано на методе Монте-Карло.

Данным методом были рассчитаны спектры различных сигналов. Ниже приведены результаты по трем из них.

**Пример 1.** Здесь были рассчитаны спектры сигнала, состоящего из  $K_a = 2$  синусоид, реализаций помехи в виде случайного нормального процесса и из их аддитивной смеси. Параметры синусоид: относительные частоты  $p = \omega T / (2\pi N)$  равны 0.1895 и 0.3157; амплитуды 50 и 100 соответственно; фазы в реализациях случайные, равномерно распределенные в  $[0, 2\pi]$ . Число отсчетов в каждой реализации  $N = 14$ . Количество отыскиваемых гармоник спектра взято максимальным  $K_v = 5$ . Поскольку  $K_a < K_v$  и  $N < 3K_v + 1$ , то при наличии шума каждая реализация сигнала является неоднозначной  $\Gamma$ -функцией. Для нее может быть рассчитан только неоднозначный  $\Pi$ -спектр, то есть один из множества возможных, что и было сделано. Полученные варианты спектра случайны, поскольку расчеты определялись заданием начальных частот и их коррекцией с использованием датчика случайных чисел. Расчеты спектра смеси проводились для трех значений дисперсии шума  $\sigma^2 = 6, 25; 25; 100$ . Всего было обработано 500 частот, принадлежащих 100 реализациям сигналов: по 20 для каждого из 5-ти типов. Среднеквадратичная ошибка  $S$  аппроксимации суммой (2) задавалась не более  $10^{-8}$ . Результаты представлены на рис. 2, 3 и 4 в виде кривых, каждая из которых является плотностью распределения вероятностей относительных частот гармоник сигнала в диапазоне  $[0, 0.5]$ . Значения каждой плотности  $F(p)$  вычислены путем взятия производной от дискретной функции распределения, построенной по выборке из 100 частот, и представлены в десятичном логарифмическом масштабе. Если эти числа умножить на 20, то



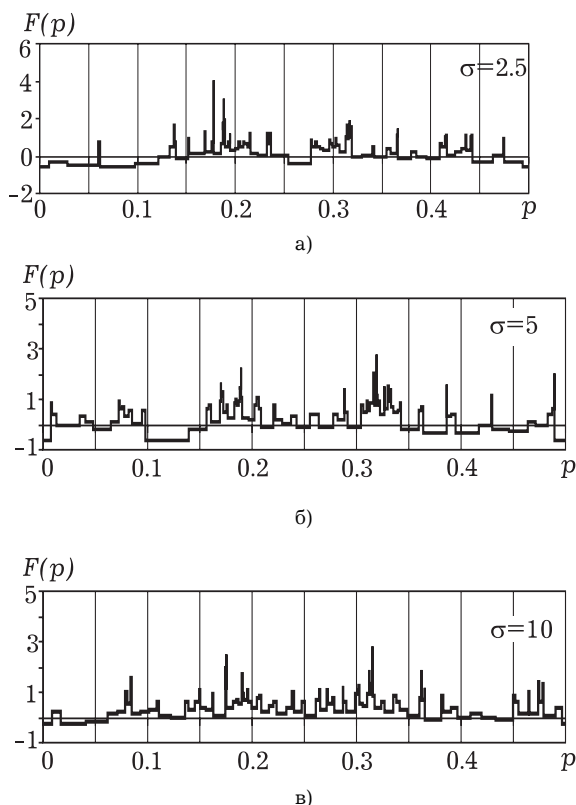


Рис. 4. Распределение вероятностей частот спектра сигнала при наличии шума

получим значения в децибелах. Кривые показывают распределение частот в  $\Pi$ -спектре шума, сигнала без и с наложенным шумом. Из рис. 4 видно, что имеется возможность обнаружения, различения и определения параметров гармонических составляющих сигнала, несмотря на его малую длительность (14 отсчетов) и искажение шумом (с дисперсией до 100). При отсутствии шума возможно различение гармоник с частотами, различающимися по частоте много меньше, чем на  $1/14$  - предельного разрешения по спектру Фурье.

Изложенный способ прост, но для общих случаев трудоемок. Однако решение может быть получено и более эффективными способами. Это аналитический параллельный и статистический последовательный методы определения спектра при некоторых соотношениях  $K_a, K_v$  и  $N$ . Они рассматриваются в п. 8 и п. 9.

## 6. Отличительные свойства спектров

Сопоставление однозначного  $\Pi$ -спектра дискретного процесса с традиционным, получаемым на основе ДПФ, показывает следующее. В первом случае спектр менее плотный, поскольку представляется гармониками с максимальным

числом  $[(N-1)/3]$ , меньшим, чем во втором, всегда равным  $[(N-1)/2]$  (без учета симметричных). То есть, имеет место большая избыточность спектра на основе ДПФ по количеству частот, как наиболее информативных параметров. Классический спектр гладкого процесса еще более избыточен, чем дискретного. Действительно, в этом случае его спектром является либо бесконечный набор частот и коэффициентов разложения процесса в ряд Фурье, либо это непрерывные функции косинус и синус преобразования при представлении процесса интегралом Фурье.

Далее, однозначный  $\Pi$ -спектр и спектры, построенные на основе любого разложения Фурье, несут в себе принципиально разное физическое представление об исследуемом процессе. Во втором случае они не столько характеризуют отрезок процесса, сколько должны определять частотную характеристику согласованного фильтра или коррелятора, предназначенных для приема и обработки бесконечного процесса апериодического или периодического. Однозначный  $\Pi$ -спектр реально отражает спектральную структуру процесса на интервале  $[0, T]$  и только его.

В некоторых случаях при использовании традиционных способов расчета спектра, близкого к реальному, применяются оконные (выделяющие) функции. На них множится анализируемый сигнал для его сглаживания или полученный спектр для его корректировки. Причем, для эффективного решения каждой задачи требуется конструирование своей оптимальной функции. Напротив, в методах расчета  $\Pi$ - и  $\mathcal{C}$ -спектров применение окон не требуется, так как частоты гармоник определяются точно, как спектральные линии.

Если в исследуемом колебательном процессе отсутствует шумовая составляющая (точнее он есть ОГ-функция), то использование  $\Pi$ -спектра позволяет определять (разрешать) гармоники, различающиеся по частоте на любую предельно малую величину, в том числе значительно меньшую, чем  $1/T$  дискреты сетки частот рядов Фурье. То же имеет место и для дискретизованного непрерывного процесса. Разумеется, при наложении шума происходит соответствующее ухудшение разрешения.

Далее, относительно экстраполяции коротких процессов, основанной на аппроксимации предлагаемым методом, можно отметить следующее. Экстраполяция стационарного процесса с применением аппроксимирующей функции (2) возможна,



если найден единственный П-спектр. Условная (ограниченная) экстраполяция возможна, если найден единственный П-спектр с использованием, например (5) - (7), то есть условный П-спектр. Она также возможна, когда найден Ч-спектр с использованием тех же (5) - (7), если в него вошли все значимые гармоники. Если же разложить короткий процесс в ряд или представить его интегралом Фурье, то его прогнозирование путем экстраполяции полученной аппроксимирующей функции бессмысленно. Действительно, экстраполированная кривая по определению будет в первом случае всегда периодической, а во втором аperiodической (нулевой вне  $[0, T]$ ) независимо от природы и свойств исходного процесса.

## 7. О методе Прони

Наиболее близким к предложенному в данной статье методу в плане поставленной задачи является модифицированный метод наименьших квадратов Прони [1]. Он также позволяет определять линейчатый спектр коротких процессов. Однако он не рассмотрен применительно к отрезкам непрерывных процессов и область его использования существенно ограничена. Некоторые ограничения следующие.

1. Чтобы результаты по методу Прони получились правильными, исследуемый дискретный процесс должен быть адекватен модели (аппроксимирующей функции), которая принята строго полигармонической. Поэтому перед расчетом спектра из процесса должны быть исключены все тренды, в частности, детерминированные составляющие, в том числе постоянная.

2. Если исследуемый процесс при заданном  $K_v$  не есть Г-функция, то среди отыскиваемых решений характеристического полинома, аналогичного (12), могут быть комплексные числа. В таком случае из процесса не будут выделены все искомые действительные гармоники, составляющие частичный спектр.

3. Не может быть рассчитан полный спектр процесса, если имеет место  $N = 3K_v - 1$  или  $N = 3K_v - 2$  при условии, что количество искомым гармоник совпадает с априорно существующим, то есть  $K_v = K_a$ . Причем, это не зависит от того, присутствует в процессе постоянная составляющая или нет. Это предельный случай, когда число искомым параметров превышает число исходных данных на минимальную величину. Существование таких процессов следует из утвер-

ждения 1. Нельзя даже рассчитать спектр полигармонического процесса с постоянной составляющей при  $N = 3K_v + 1$ .

4. Не может быть рассчитан частичный спектр процесса, если  $K_v < K_a$  при условии  $3K_v, 3K_0 < N$ . То есть, когда процесс априорно содержит гармоник больше, чем подлежит определению. Например, это необходимо для выделения значимых гармоник из зашумленного процесса.

Из этого следует, что линейчатый спектр процесса, рассчитываемый по методу Прони, является частным случаем П-спектра. Это тот вариант однозначного П-спектра, когда процесс дискретный, априорно гармонизируемый, без постоянной составляющей и для которого  $3K_v \leq N, K_v = K_a$ . Более того, метод решения такой задачи, основанный на линейном предсказании, в настоящее время известен, он приведен в [2]. Этот метод использован в данной статье в качестве вспомогательного.

## 8. Аналитический параллельный метод определения спектра

Этим способом могут быть определены П-спектры процессов, являющихся Г-, ОГ- и УГ-функциями, то есть любыми, кроме ЧГ-функций, для которых искомый спектр при заданном  $K_v$  должен получиться неполным, то есть Ч-спектром.

Выше отмечено, что, согласно утверждению 2, непрерывный процесс может быть точно представлен суммой (2), а при условии гладкости полностью определяется дискретной последовательностью (4). Следовательно, задача по определению П-спектра непрерывного процесса сводится к определению спектра соответствующей дискретной последовательности. Поэтому далее задача будет решаться применительно к дискретным процессам. Оценивать точность параметров спектра будем величиной (3) отклонения аппроксимирующей последовательности (4) от заданного процесса. Будут рассмотрены четыре варианта.

Прежде рассмотрим простую задачу, когда анализируемый процесс предполагается содержащим только гармонические составляющие, число которых  $K_a \leq [N/3]$ . Тогда для определения параметров спектра (1), где  $A_0 = 0$ , следует непосредственно воспользоваться методом линейного предсказания [2], задав  $K_v \geq K_a$ . Если  $K_a$  неиз-

вестно, то расчеты можно начинать с малых  $K_v$ . При отсутствии решения следует увеличить  $K_v$  и повторить расчеты. В рассматриваемом случае получится единственный П-спектр процесса.

Рассмотрим вариант 1, когда процесс состоит из суммы постоянной  $A_0$  и гармонических составляющих; число которых такое, что  $3K_a \leq N$ . К данному случаю относятся процессы, для которых  $K_a \leq K(N) - 1$ . Для них может быть рассчитан единственный однозначный П-спектр. Сюда относятся также процессы, для которых  $N$  кратно 3 и  $3K_a = N$ .

Заметим, что во всех вариантах 1-3 будут получаться неоднозначные П-спектры.

Итак, в 1-м варианте для расчета спектра можно применить итерационный способ определения неизвестного параметра. В данном случае это  $A_0$ . В качестве вспомогательного используем упомянутый метод линейного предсказания. Процедура решения следующая.

1. Задается число отыскиваемых гармоник  $K = K_v$  и начальное значение  $A_0$ .

2. По имеющимся отсчетам  $x[n]$  находятся полиномиальные коэффициенты  $\alpha_1, \dots, \alpha_K$ . Для этого решается специальная система линейных уравнений

$$\partial \epsilon / \partial \alpha_k = 0; \quad k = 1, \dots, K, \quad (10)$$

где

$$\epsilon = \sum_{i=1}^{N-2K} \epsilon_i^2, \quad \epsilon_i = \sum_{k=0}^{K-1} (x_{i+k-1} + x_{2K+i-k-1} - 2A_0)\alpha_k - (x_{K+i-1} - A_0)\alpha_K. \quad (11)$$

Здесь  $\alpha_0 = -1$ . Это эквивалентно определению минимума  $\epsilon$  по  $\{\alpha_k\}$ . Если  $N = 3K$  и  $N$  кратно 3 (это предельный вариант 1 для  $K_0$  из (8)), то  $\{\alpha_k\}$  находятся проще – в результате решения системы  $\{\epsilon_i = 0\}, i = 1, \dots, K$ .

3. Определяются частоты  $\omega_1, \dots, \omega_K$  спектра как корни тригонометрического уравнения (характеристического полинома)

$$\begin{aligned} \cos K\omega\Delta t - \alpha_1 \cos(K-1)\omega\Delta t - \dots \\ \dots - \alpha_{K-1} \cos \omega\Delta t - 0.5\alpha_K = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

4. Рассчитываются амплитуды частот  $A_1, B_1, \dots, A_K, B_K$  путем совместного решения 2-й и 3-й групп линейных уравнений из (9). Определяется по (3) и оценивается отклонение  $S$ .

5. Путем целенаправленного перебора значений  $A_0$  и повторения шагов 2-5 ищется минимальная (нулевая) ошибка  $S$ , которая всегда должна существовать. Это будет решение первого нелинейного уравнения из (9) относительно  $A_0$ .

В итоге значения (1), найденные в последнем цикле, будут являться параметрами П-спектра. Исследуемый процесс  $x[n]$  может иметь количество  $K_a$  гармоник меньшее, чем заданное  $K_v$ . Однако свойства метода линейного предсказания таковы, что в результате проведения расчетов почти всегда будет найдено его фактическое значение  $K_a \leq K_0$ . Но чтобы избежать такой ситуации, можно начинать расчеты с малого  $K_v$  и при отсутствии решения постепенно увеличивать его.

Согласно следствию 2, процесс при  $N$  кратно 3 и  $3K_a = N$  есть УГ-функция. Поэтому если начальное значение  $A_0$  задать иным, будет получен другой П-спектр. Для получения единственного спектра необходим обоснованный выбор  $A_0$  среди возможных.

Пусть теперь  $N+1$  кратно 3 и  $N = 3K_a - 1$  (это вариант 2). В этом случае задаются начальные значения  $A_0$  и частоты  $\bar{\omega}$  одной из  $K_a$  гармоник (шаг 1). Далее вместо (10) составляется и решается для  $K = K_v$  система линейных уравнений (шаг 2)

$$\begin{cases} \cos K\bar{\omega}\Delta t - \alpha_1 \cos(K-1)\bar{\omega}\Delta t - \dots \\ \dots - \alpha_{K-1} \cos \bar{\omega}\Delta t - 0.5\alpha_K = 0; \\ \partial \epsilon / \partial \alpha_k = 0; \quad k = 1, \dots, K-1. \end{cases} \quad (13)$$

После подстановки найденных  $\{\alpha_k\}$  в (12) определяются частоты  $\{\omega_k\}$ , в числе которых будет и предварительно заданная  $\bar{\omega}$  (шаг 3). Путем перебора  $A_0$  и  $\bar{\omega}$  и повторения шагов 2-4 ищется нулевое значение  $S$ . Это будет решение системы 2-х нелинейных уравнений

$$\partial S / \partial A_0 = 0; \quad \partial S / \partial \bar{\omega} = 0 \quad (14)$$

относительно  $A_0$  и  $\bar{\omega}$ . Далее находятся амплитуды всех  $K$  частот  $\{A_k, B_k\}$ . По завершении определенного количества циклов будет получен спектр процесса. Описанный алгоритм есть совместное решение первых 2-й и 3-й (из четырех) групп уравнений из (9), уравнений (13),  $K-1$  уравнений (12) и уравнений (14) относительно  $4K+1$  неизвестных  $A_1, B_1, \dots, A_K, B_K, \alpha_1, \dots, \alpha_K, \omega_1, \dots, \omega_{K-1}, A_0, \bar{\omega}$  соответственно. Из указанных уравнений нелинейные только два (14). Из них только два нелинейных.

Полученный спектр, соответствующий начальным значениям  $A_0$  и  $\bar{\omega}$ , будет одним из множества П-спектров. Для получения единственного спектра необходимо при расчете  $S$  связывать эти параметры соответствующими логическими или функциональными условиями.

В третьем, последнем варианте ( $N+2$  кратно 3 и  $N = 3K_a - 2$ ) начальные значения задаются для

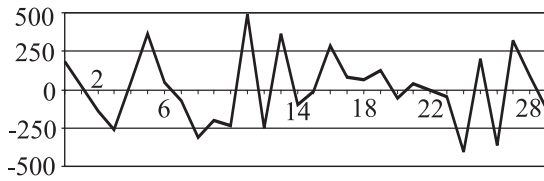


Рис. 5. Сигнал  $\bar{x}_1[n]$

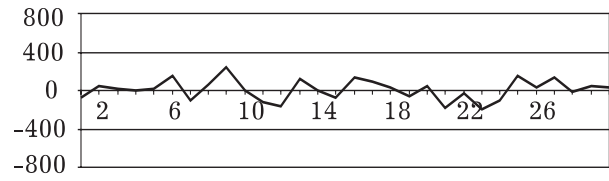


Рис. 8. Шум

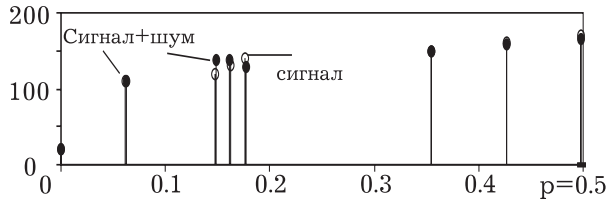


Рис. 6. Спектры сигнала  $\bar{x}_1[n]$ , сигнала+шум  $x_1[n]$

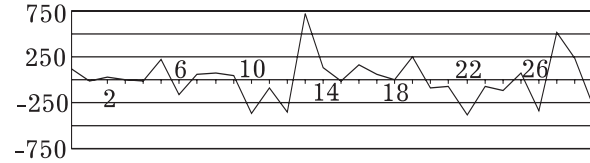


Рис. 9. Сигнал+Шум  $x_2[n]$

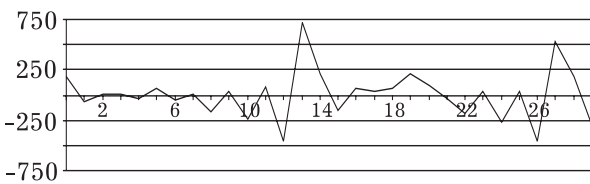


Рис. 7. Сигнал  $\bar{x}_2[n]$

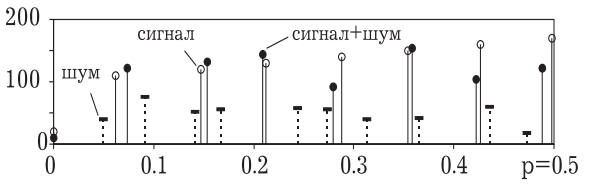


Рис. 10. Спектры шума, сигнала  $\bar{x}_2[n]$ , сигнала+шум  $x_2[n]$

3-х параметров:  $A_0, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$ . Вместо (13) составляется и решается для  $K = K_v$  система уравнений

$$\begin{cases} \cos K\bar{\omega}_j\Delta t - \alpha_1 \cos(K-1)\bar{\omega}_j\Delta t - \dots \\ \dots - \alpha_{K-1} \cos \bar{\omega}_j\Delta t - 0.5\alpha_K = 0; \\ \partial \varepsilon / \partial \alpha_k = 0; k = 1, \dots, K-2; j = 1; 2. \end{cases}$$

Далее определяются частоты  $\{\omega_k\}$  путем решения уравнения (12) и их амплитуды (шаг 4). Варьируя тремя указанными параметрами, оценивая  $S$  и добиваясь его нулевого значения, получаем итоговые параметры П-спектра (шаг 5). То есть, в данном варианте решается та же система, что и в предыдущем, но с добавлением вместо одного двух линейных уравнений относительно коэффициентов  $\{\alpha_k\}$ . В итоге система имеет три нелинейных уравнения:  $\partial S / \partial A_0 = 0$ ;  $\partial S / \partial \bar{\omega}_1 = 0$ ;  $\partial S / \partial \bar{\omega}_2 = 0$ .

Как и во втором варианте для получения единственного спектра из множества возможных необходимо при расчетах связывать параметры  $A_0, \bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2$  соответствующими условиями, например (5) - (7).

Если в двух последних вариантах определить количество  $K_a$  гармоник спектра не представляется возможным, то следует начинать расчеты с малого  $K_v$  и увеличивать его до получения правильных результатов. Следует заметить, что в рассмотренных расчетных алгоритмах определение  $K_a$  не является сложной проблемой, как это может показаться. Для уточнения его значения требуются лишь повторные вычисления.

Таким образом, предложенный метод, основанный на утверждениях 1 и 2, позволяет значительно уменьшить число нелинейных уравнений в системе (9), подлежащей решению. А именно - с  $N/3$ ,  $(N+1)/3$  и  $(N+2)/3$  до 1-го, 2-х и 3-х при  $N$ ,  $N+1$  и  $N+2$  кратных 3 соответственно. И что важно, это число остается постоянным для любого количества  $N$  отсчетов процесса  $x[n]$ .

Изложенный метод не может быть использован при определении Ч-спектра. То есть, когда подлежат определению только основные гармоники процесса, если в нем присутствуют и иные составляющие, например, шумовые. Но приближение к такому спектру может быть найдено. Это будут значимые гармоники условного П-спектра, при расчете которого данным методом минимизируется (7). При этом соотношение величин  $N$  и  $K_a$  должно соответствовать одному из трех вариантов. Ниже предлагается более эффективный метод расчета Ч-спектра.

### 9. Статистический последовательный метод определения спектра

Имеем ввиду, что, согласно свойствам спектра, число искомых гармоник ограничено  $K_v \leq N/3$ . Если  $K_v = N/3$ , то для решения задачи можно использовать аналитический параллельный алгоритм расчета П-спектра, если  $K_v < K_a \leq N/3$  — статистический параллельный для Ч-спектра. Однако второй метод при большом  $K$  оказыва-

ется трудоемким. Кроме того, за заданное время при недостаточной вычислительной мощности вместо глобального может быть получено локальное решение. Используя свойства дискретного сигнала, можно построить более быстрый алгоритм расчета П- и Ч-спектра. Предлагается процесс вычислений, основанный на последовательном уточнении частот отдельных групп гармоник.

Предположим, что известны все  $K$  относительных частот  $\{p_k\}$  гармоник сигнала  $x[n]$ . Здесь  $p_k = \omega_k T / (2\pi N)$  определены в интервале  $[0; 0.5]$ . Упорядочим их по возрастанию значений. Они расположатся плотными секторами. Внутри каждого сектора расстояние между соседними частотами будет не более  $1/N$ . Тогда, расстояние между соседними секторами будет не менее  $1/N$ . Обозначим через  $K_c$  максимальное количество частот в плотных секторах. Будем считать  $K_c$  размером сектора. Можно утверждать, что имеет место следующее почти очевидное свойство.

**Свойство 2.** Процесс и результат определения частот  $\{p_k\}$  сигнала  $x[n]$  внутри плотного сектора существенным образом зависит от их совместного распределения, но относительно мало от распределения частот в остальных секторах.

Предлагается следующий алгоритм, основанный на использовании этого свойства.

1. Считая известными размер сектора  $K_c$  и количество искоемых гармоник  $K$ , задаем в интервале  $[0; 0.5]$  начальные значения  $\{p_k\}$  их частот. Упорядочим их по возрастанию. Рассчитываем амплитуды  $\{A_k, B_k\}$  спектра методом наименьших квадратов с использованием расстояния  $S$  между сигналом и суммой гармоник в виде (3). Далее вычитаем из сигнала найденные гармоники. Получаем остаточный сигнал. Рассчитанное расстояние между сигналом и гармониками примем в качестве начальной ошибки аппроксимации  $S_m$ . Это будет среднее квадратичное значение остаточного сигнала.

2. Добавляем (возвращаем) в остаточный сигнал группу из  $K_c$  удаленных гармоник с номерами  $i, i+1, \dots, i-1+K_c$ , где  $i=1$  (для первой группы). Определяем ошибку аппроксимации  $S$  для такого случая.

3. Определяем (уточняем) параметры  $K_c$  гармоник группы. Для этого методом итераций и случайного поиска минимизируем  $S$  по частотам  $\{p_k\}$  и амплитудам  $\{A_k, B_k\}$  гармоник группы, всякий раз сравнивая результат с величиной  $S_m$ . Значения частот других групп не изменяем. После этого определяем (уточняем) амплитуды гармоник вновь

сформированных и остальных. Вычитаем все гармоники из сигнала, то есть, получаем новый остаточный сигнал. Пересчитываем расстояние  $S_m$ , которое должно получиться меньшим прежнего. Упорядочиваем частоты всех гармоник по возрастанию.

4. Добавляем (возвращаем) в остаточный сигнал другую группу гармоник из удаленных: уточненные гармоники с номерами  $i, i+1, \dots, i-1+K_c$  для следующего  $i$ . Рассчитываем  $S$ . Уточняем параметры.

5. Последовательно увеличивая  $i$ , повторяем этапы с 3-го по 4-й  $K - K_c$  раз. Пройдя весь частотный диапазон, возвращаемся к его началу – к первой группе гармоник.

6. Многократно повторяем этапы с 2-го по 5-й, добиваясь абсолютного минимума  $S_m$ .

В результате описанной процедуры будет получена аппроксимация сигнала гармониками. Последний найденный набор  $\{p_k\}, \{A_k, B_k\}$  будет являться П- или Ч-спектром сигнала. При правильном выборе  $K$  и  $K_c$  процесс эффективен и достаточно быстро сходится к единственному решению. При этом достигнутое значение  $S_m$  получается глобальным. Метод обеспечивает повторяемость результатов при выборе других начальных значений частот  $\{p_k\}$ .

Если расстояние между соседними частотами сигнала больше, чем  $1/N$ , то имеем  $K_c = 1$ . Тогда расчет спектра упрощается за счет исключения параллельного перебора значений частот. Он будет заключаться в минимизации ошибки  $S$  последовательно по значениям каждой из  $K$  частот. Это свойство имеет полезное применение. При формировании сигнала для передачи по каналу связи можно заполнять его гармониками с относительными частотами, расстояния между которыми больше  $1/N$ . В этом случае при анализе принятого сигнала частоты и их параметры будут определены наиболее простым и быстрым способом.

Если  $K$  задать большим числа гармоник, присутствующих в сигнале, то алгоритмом будут выделены дополнительные, но с малыми амплитудами, которыми можно пренебречь.

Если значение  $K_c$  при правильном  $K$  выбрать меньшим, чем оговорено выше, то процесс определения спектра будет медленно или совсем не сходиться к глобальному решению, то есть окажется не эффективным. Это связано с тем, что подлежат определению  $K_c$  частот в плотных секторах, состоящих из большего количества гармо-

ник. В других секторах гармоника будут определены правильно.

Исследуемый сигнал может быть таким, что  $K_c = K$ . В этом предельном случае придется использовать статистический параллельный метод.

Возникает вопрос. Каким должен быть размер сектора  $K_c$ , если он не задан, или его нельзя обосновать, анализируя априорную информацию о сигнале  $x[n]$ ? Здесь следует начать с минимального  $K_c$ . Далее необходимо выполнить изложенный выше процесс аппроксимации. При этом будет определен спектр с ошибкой  $S_m$ . Если она велика, то необходимо последовательно увеличивать  $K_c$  и повторять расчеты до достижения заданной ошибки. Если требуется достичь ее абсолютного минимума, то при увеличении  $K_c$  следует добиться повторяемости результатов в последовательных циклах. Если  $K$  выбрано не меньшим числа гармоник, присутствующих в сигнале, то в итоге  $S_m$  должно равняться нулю.

Если сигнал содержит аддитивную шумовую составляющую, то при расчете произойдет выделение из него дополнительных гармоник, распределенных по секторам. Это приведет к увеличению числа и размера секторов. Однако до определенного уровня шума спектр сигнала можно получить без изменения  $K_c$ . Если требуется определить и спектральные составляющие добавленной помехи, то при расчете следует увеличить  $K_c$ . Увеличение расстояния между частотами внутри секторов позволяет допустить более высокий уровень шума.

Рассмотрим в качестве анализируемого сигнала конечную выборку процесса, близкого к нормальному. В общем случае такой сигнал может быть представлен суммой из  $K \leq K(N)$  гармоник. Они могут принадлежать одной или нескольким плотным секторам. Поскольку нельзя априорно определить  $K$  и  $K_c$ , то приходится предположить  $K_c = K_v = K(N)$ , что наиболее вероятно. В этом случае использование предложенного статистического последовательного метода для определения П-спектра не целесообразно. Здесь следует применить аналитический параллельный метод. Аналогичные рассуждения применимы к отрезку любой функции, по своей природе не являющейся суммой гармоник. Примерами являются  $tgx$ ,  $\arcsin x$ ,  $\sin x$ ,  $\ln x$ ,  $\exp x$  и другие специальные функции. Для получения их спектров следует использовать статистический или аналитический параллельные методы.

Предложенным статистическим последовательным методом были рассчитаны спектры некоторых сиг-

налов. Результаты подтвердили его эффективность. Ниже приведены два варианта.

**Пример 2.** В качестве анализируемого сигнала  $x_1[n]$  взята последовательность из  $N = 30$  отсчетов суммы аддитивного шума с исходным сигналом  $\bar{x}_1[n]$ , состоящим из 7 гармоник с параметрами из табл. 2. В качестве шума взят отрезок нормального процесса с параметрами  $a = 0$ ;  $\sigma = 1$ . На рис. 5 изображен  $\bar{x}_1[n]$ . Расстояния между частотами сигнала такие, что имеются 5 плотных секторов. Во втором имеются 3 частоты, в остальных по одной. На рис.6 отображены линии спектра исходных гармоник и спектра, рассчитанного по сигналу  $x_1[n]$ , предложенным методом для  $K = 7$ ;  $K_c = 3$ . Четыре линии спектра исходного и зашумленного сигналов визуально совпали. При большем уровне шума результаты получились менее удовлетворительные.

**Пример 3.** В качестве составляющих исходного сигнала  $\bar{x}_2[n]$  (рис. 7) взяты гармоника с теми же параметрами, кроме 3 и 4 частот, которые более разнятся: 0.2123 и 0.2874. В этом спектре 7 секторов по одной частоте, поскольку расстояния между частотами больше  $1/30$ . То есть, размер сектора  $K_c = 1$ . Структура сигнала проще, чем в примере 1. Уровень наложенного шума, изображенного на рис. 8, значительный:  $a = 0$ ;  $\sigma = 100$ . На рис. 9 изображен суммарный сигнал  $x_2[n]$ . На рис. 10 отображены линии спектра шума, исходных гармоник и спектра суммарного сигнала, рассчитанного для тех же параметров  $K = 7$ ;  $K_c = 3$ . Спектр шума рассчитывался аналитическим параллельным методом для  $K = 10$ . При меньших уровнях шума спектр сигнала получился еще точнее.

## Заключение

Предложенные в статье новые способы аппроксимации, новые спектры процессов и методы их расчета могут быть использованы во многих приложениях при анализе и синтезе сигналов и процессов различного назначения.

Применение полных и частичных гармонических спектров коротких процессов должно быть не менее полезным, чем спектров на основе разложений Фурье.

Таблица 2

Частота $p_k$	Амплитуда	Фаза
0	20	0
0.0621	110	0.1
0.1472	120	0.4
0.1623	130	0.8
0.1764	140	1.2
0.3544	150	1.6
0.4265	160	2.0
0.4976	170	2.4

### Литература

1. Марпл.-мл. С. Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения / Пер. с англ. — М.: Мир, 1990.
2. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1973.

---

## Approximation of Short Processes, Signals, Functions and Calculation of Their Harmonic Discrete Spectrum

*E.V. Dmitriev*

Why is it considered that spectrum of segment of  $\sin(2\pi ft)$  function consist of somewhat but not harmonic of  $f$  frequency? In the article new qualitative and quantitative characteristic of short processes is considered. This characteristic is spectrum consisting of finite optimal not compulsory orthogonal components. Vector properties are described. Statements about possible in finite harmonic series expansion of short discrete continuous processes are formulated. Methods of definition of unknown spectrum are proposed. Means of effective approximation of short processes are also described in this work. Examples are cited.

**Дмитриев Евгений Васильевич**, 1941 года рождения. Окончил Воронежский государственный университет в 1965 году по специальности математика. С 1969 года работал в научно-исследовательском учреждении министерства обороны СССР. С 1982 года по настоящее время ведущий инженер-конструктор отдела перспективных исследований ОАО «Концерн «Созвездие» (бывший Воронежский научно-исследовательский институт связи). Имеются: изобретения, научно-технические статьи, опубликованные в закрытых

и открытых изданиях; выступления на конференциях. Область научных интересов: алгоритмы и методы цифровой обработки непрерывных и дискретных сигналов и процессов в радио и радиотехнических устройствах; анализ сигналов математическими методами; аппроксимация, спектральный анализ и преобразование процессов и сигналов; тематическое моделирование каналов передачи и приема информации.