

## Физика волновых процессов и радиотехнические системы

УДК 621.391.037.372

Обнаружение и различение сигналов в их аддитивной смеси  
путем расчета и анализа ее естественного спектра

Е.В. Дмитриев

Приводятся результаты расчета спектров процессов различными способами. Даются их сравнительные характеристики. Рассматривается и оценивается новый метод спектрального разложения сигналов (коротких процессов). Приводятся примеры применения метода для обнаружения и различения прямоугольных радиоимпульсов из их смеси, в том числе в условиях гауссовского шума.

## 1. Постановка задачи

Статья касается методов и алгоритмов цифровой обработки непрерывных (аналоговых) и дискретных процессов при решении задач обнаружения и различения сигналов по рассчитываемому спектру их смеси. В настоящее время определение спектра процессов и отдельных сигналов в радио и радиотехнических устройствах, измерительных системах основано на использовании их разложений в ряды или представлении интегралами Фурье с применением базисных ортогональных функций. Однако эти способы вместе с их модификациями не всегда эффективны при анализе короткого процесса (ограниченной длительности). Главным является то, что в них искусственно навязывается его поведение на концах и вне интервала определения (в том числе разрывы процесса и его производной), что отрицательно сказывается на показателях, характеризующих его колебательные свойства. Спектры на основе разложений Фурье обладают также значительной избыточностью по количеству гармоник. В результате имеем: традиционный спектр короткого процесса, состоящего из нескольких неортогональных синусоид (гармоник), не является линейчатый, что выглядит неестественно. Существует также способ расчета спектра на основе метода Прони [1, п.20.6.6(с)], но он позволяет определять спектр процесса, состоящего только из гармоник.

Поэтому для практических приложений при решении задач обнаружения и различения сигналов полезно применение нового, более эффективного способа описания колебательных свойств коротких процессов. Он основан на определении и использовании их естественного спектра (Е-спектра). Новизна заключается в методе аппроксимации коротких процессов суммой неортогональных гармоник.

## 2. Естественный спектр процессов

Существо нового способа [2, 3] заключается в следующем. Процесс, заданный или выделенный на интервале  $[0; T]$ , аппроксимируется функцией

$$y(t) = A_0 + \sum_{k=1}^K (A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t),$$

если он непрерывный  $x(t)$  или последовательностью

$$y[n] = A_0 + \sum_{k=1}^K [A_k \cos(\omega_k nT / N) + B_k \sin(\omega_k nT / N)],$$

если он дискретный  $x[n]$ . Здесь  $y[n] = y(n\Delta t)$ ;  $\Delta t = T/N$  – дискрета по времени;  $N$  – число отсчетов процесса. Значения

$$A_0, (A_1, B_1, \omega_1), \dots, (A_K, B_K, \omega_K) \quad (1)$$

являются параметрами  $K$  составляющих гармоник – их частотами и амплитудами;  $A_0$  – постоянная величина – смещение.

В качестве ошибки представления используются выражения

$$S^2 = \frac{1}{T} \int_0^T [y(t) - x(t)]^2 dt, \quad (2)$$

$$S^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} (y[n] - x[n])^2,$$

Е.В. Дмитриев

г. Воронеж, ОАО "Концерн "Созвездие"

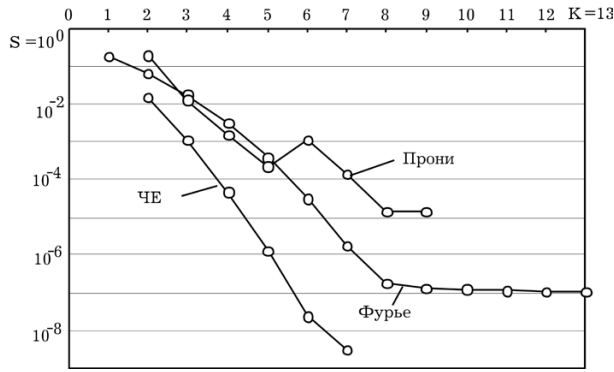


Рис. 1. Ошибка  $S$  представления сигнала  $\exp(-0.5z^2)$  на интервале  $[0; T]$  с использованием спектров ЧЕ, ряда Фурье и метода Прони (разного порядка  $K$ )

если процесс непрерывный или дискретный соответственно. В таком случае те значения (1), а также  $K$ , которые минимизируют (2), будут являться параметрами естественного спектра (Е-спектра) короткого процесса. Предполагается, что параметры различных гармоник (компонент) априорно не связаны друг с другом зависимостью. Требование взаимной ортогональности на них также не налагается. Очевидно, что спектры, рассчитанные согласно данному определению, будут дискретными (линейчатыми) по частоте и, за исключением особых случаев, с конечным числом спектральных линий. Далее в целях сокращения короткий процесс или отдельный сигнал будем именовать процессом, если не оговорено иное.

Минимизация (2) осуществляется одним из двух способов, в зависимости от типа рассчитываемого Е-спектра. Определения типам следующие [3].

**Частичный естественный спектр (ЧЕ-спектр)** - набор параметров (1) минимального количества  $K_s$  (или во втором случае заданного  $K_v$ ) синусоидальных компонент, сумма которых аппроксимирует на интервале  $[0, T]$  непрерывный процесс  $x(t)$  или дискретный  $x[n]$  с ошибкой, не превышающей заданного значения  $S$  (или с минимально возможной ошибкой во втором случае).

**Полный естественный спектр (ПЕ-спектр)** - набор параметров (1) суммы синусоидальных компонент, аппроксимирующей на интервале  $[0, T]$  непрерывный процесс  $x(t)$  или дискретный  $x[n]$ , где количество компонент  $K_0$  определяется как минимально возможное, при котором равна нулю ошибка аппроксимации  $S$ . ПЕ-спектр может не быть единственным.

Для количества компонент в обоих определениях имеет место важное соотношение  $K \leq [(N+2)/3]$ .

Проведем сравнительный анализ спектров, рассчитываемых тремя способами: по конечно-му ряду Фурье, методу Прони и как Е-спектры. Осуществим это по результатам расчета примеров для трех типов процессов.

### 3. Спектры экспоненциальной функции

Рассмотрим детерминированный процесс в виде экспоненциальной функции  $x(t) = \exp[-0.5(t-0.5T)^2]$  на интервале  $[0, T]$ . Проведем его дискретизацию, задав число отсчетов  $N$ . Для такого случая  $t_n = n\Delta t$ . Тогда функция преобразуется в последовательность значений

$$x[n] = \exp[-0.5T^2(n/N - 0.5)^2], \quad (3)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Рассчитаем спектр такого процесса тремя способами для количества аппроксимирующих гармоник  $K=1, 2, \dots, 13$  и постоянной составляющей.

Расчет спектра с использованием ДПФ. Параметры спектра, то есть амплитуды первых  $K$  гармоник, являющиеся прямым ДПФ процесса, будут равны

$$\begin{cases} a_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp[-0.5T^2(n/N - 0.5)^2] \cos(2\pi kn/N), \\ b_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \exp[-0.5T^2(n/N - 0.5)^2] \sin(2\pi kn/N), \end{cases} \quad (4)$$

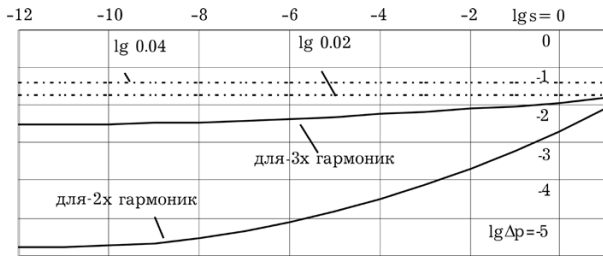
где  $k=0, 1, \dots, K$ . Имеется в виду, что в (4) учтены и симметричные гармоники, поэтому  $2K \leq N$ . Восстановленный по  $K$  гармоникам процесс, то есть обратное ДПФ (усеченное), есть последовательность

$$y(n\Delta t_1) = \sum_{k=0}^{K-1} [a_k \cos(2\pi kn/N) + b_k \sin(2\pi kn/N)], \quad (5)$$

$$n = 0, 1, \dots, N-1.$$

Связь между относительной и круговой частотами следующая:  $2\pi k/T = \omega_k$ ,  $k/T = f_k$ ,  $1/T = \Delta f$ .

Таким образом, для проведения спектрального анализа процесса данным методом необходимо вначале выбрать количество первых (или значимых) гармоник  $K$  спектра ДПФ из их общего числа  $[N/2]$ , которые будут представлять восстановленный (аппроксимирующий) процесс. Далее надо определить их параметры (4). И, наконец, следует рассчитать  $N$  отсчетов восстановленного процесса по (5). После чего по (2) можно оценить точность восстановления при заданных  $N$ ,  $K$ ,  $T$ .



**Рис. 2.** Границы области обнаружения и различения 2-х и 3-х гармоник в зашумленном сигнале в зависимости от дисперсии шума

Для проведения численного расчета спектра последовательности (3) было задано:  $T = 10$  и  $N = 100$ . Отсчеты процесса получились следующие

$$x[n] = \exp[-50(n/100 - 0.5)^2], \quad (6)$$

где  $n = 0, 1, \dots, 99$ .

Расчет спектра проводился для количества аппроксимирующих (первых) гармоник  $K$  от 1 до 13 и постоянной составляющей.

*Расчет спектра по методу Прони.* Данным методом [1, 2] может быть определен спектральный состав процесса (6), но без постоянной составляющей  $A_0$ . Если  $3K < N$ , то параметры гармоник (1) определяются следующим образом. По отсчетам процесса составляется специальная система линейных уравнений относительно неизвестных вспомогательных параметров  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{K-1}$

$$\sum_{k=1}^{K-1} \alpha_k (x_{i+1+k} + x_{2K+i+1-k}) - x_{i+1} - x_{2K+i+1} + \alpha_K x_{i+1+K} = \varepsilon_i, \quad (7)$$

где  $i=1, \dots, N-2K$ .

Затем составляется квадратичная форма из возможных ошибок (при измерении, расчетах)  $\sum_{i=1}^{N-2K} \varepsilon_i^2$ , которая далее минимизируется по параметрам путем приравнивания нулю ее частных производных:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_k} \sum_{i=1}^{N-2K} \varepsilon_i^2 = 0, \quad \text{где } k = 1, 2, \dots, K. \quad (8)$$

Решаем полученную систему линейных уравнений. Частоты гармоник определяются нахождением корней тригонометрического уравнения  $\cos K\omega - \sum_{k=1}^{K-1} \alpha_k \cos(K-k)\omega - 0.5\alpha_K = 0$ , коэффициентами которого являются найденные параметры. Полученные значения  $\omega_1, \omega_2, \dots$ , число которых должно быть  $K$ , принимаются за частоты гармонических составляющих процесса  $x[n]$ . Далее параметры найденных гармоник – амплитуды из (1) определяются методом наименьших квад-

ратов. Для этого соответствующее выражение из (2) минимизируется по каждому параметру из  $\{A_k, B_k\}$  с учетом найденных частот  $\{\omega_k\}$ .

Если размер выборки  $N = 3K$ , то задача упрощается и вместо систем (7) и (8) получается одна из  $K$  линейных уравнений относительно  $K$  неизвестных  $\{\alpha_k\}$

$$\sum_{k=1}^{K-1} (x_{i+k-1} + x_{2K+i-k-1})\alpha_k + x_{K+i-1}\alpha_K = x_{i-1} - x_{2K+i-1}, \quad i=1, \dots, K.$$

То есть здесь значения ошибок  $\varepsilon_i$  заведомо полагаются равными нулю. Спектр процесса (6) был рассчитан методом Прони для  $K=2, 3, \dots, 9$ .

*Расчет E-спектра процесса.* В этом случае параметрами спектра являются значения (1), минимизирующие (2). Минимизация должна осуществляться одним из двух способов, в зависимости от того рассчитывается ПЕ- или ЧЕ-спектр. В нашем случае это второй, так как  $3K \ll N$  и процесс, что очевидно, состоит не только из одних гармоник. Расчеты спектра процесса (6) проводились для количества аппроксимирующих гармоник  $K$  от 2 до 7 и постоянной составляющей. Некоторые методы расчета E-спектров приведены в [2, 3]. В данном случае использовался *статистический параллельный метод* (статистических испытаний).

*Анализ и сравнение результатов расчета спектров.* Проведенные расчеты подтверждают вывод о том, что метод Прони применим лишь в случаях, когда исходный процесс состоит только из совокупности гармоник и шумовой составляющей незначительного уровня. Правильная экстраполяция (также являющаяся одной из характеристик метода) функцией, восстановленной по  $K$  гармоникам спектра ДПФ, возможна лишь в случае, если исходный процесс по своей природе содержит именно эти гармоники.

На рис.1 отображены показатели точности расчета спектра процесса (6) по конечному ряду Фурье, методу Прони и как ЧЕ-спектра. В логарифмическом масштабе отмечены рассчитанные по (2) значения ошибок  $S$  представления (аппроксимации) процесса суммой гармоник для  $K=1, 2, \dots, 13$ . Кривая, соответствующая методу Прони, отражает нестабильное уменьшение ошибки аппроксимации при увеличении числа гармоник. Для некоторых  $K$  ошибка получилась даже большей, чем для меньшего числа аппроксимирующих гармоник. Это является следствием недостатков и особенностей метода [1].

Сопоставление данных показывает, что метод на основе Е-спектра дает результаты существенно лучшие, чем другие. При увеличении  $K$  разница в значениях ошибки аппроксимации  $S$  этим методом в сравнении с другими значительно увеличивается и достигает нескольких порядков.

Следует отметить, что существенным недостатком метода расчета Е-спектра является отсутствие его полного и законченного аналитического алгоритма и поэтому требуется значительное время для проведения расчетов численными методами. В частности, при использовании стандартного (трудоемкого не оптимизированного) метода статистических испытаний требуется проведение количества циклов счета, соизмеримого с величиной  $10^K$ , где  $K$  число гармоник. Поэтому требуется разработка на основе методов из [2, 3] специализированных алгоритмов и устройств, позволяющих более эффективно рассчитывать Е-спектры процессов.

#### 4. Спектр суммы гармоник, их различие

Здесь оценивалась возможность различения (по частоте) прямоугольных радиоимпульсов в их смеси с использованием ЧЕ-спектра. В этих целях была проведена обработка коротких случайных процессов, образованных из суммы нескольких гармоник и представленных в дискретном виде (по времени). Каждый процесс состоял из  $N=100$  отсчетов. Амплитуды и фазы гармоник выбирались равномерно распределенными в интервалах  $(0; 100)$  и  $(0; 2\pi)$  соответственно. Частота  $p_1$  первой гармоники выбиралась равномерно распределенной в  $(0; 0.5)$ . Здесь нормированная частота  $p=f \cdot T / N$ . Остальные выбирались относительно первой как нормально распределенные величины с параметрами  $(p_1; 0.01)$  и  $(p_1; 0.02)$ . При обработке каждой реализации процесса циклический алгоритм уточнения амплитуд гармоник при расчете ЧЕ-спектра заканчивался по достижении заданной точности  $10^{-8}$  расчета  $S$  по (2). При этом определение значений частот, амплитуд и фаз обеспечивалось с точностью до 7-8 десятичных знаков. В виду малости ошибок  $S$  цель достижения их глобального минимума была излишней и поэтому не ставилась. Просчитанные варианты для каждого  $K$  были разбиты на две группы. В 1-ю вошли те, в которых частоты гармоник исход-

ного моделируемого отрезка процесса расположились в интервале  $\Delta p$ , меньшем, чем порог  $\Delta \bar{p}$ . Во 2-ю – варианты с большим разбросом частот, то есть для них  $\Delta p$  оказалось больше, чем  $\Delta \bar{p}$ . Считались безуспешными и поэтому отбрасывались те варианты (их было мало), в которых процесс расчета не сходил к верному результату или когда достигался локальный, но большой по величине минимум ошибки  $S$  вместо глобального. В целях сравнения разрешающей способности по частоте на основе метода ЧЕ-спектра и метода ДПФ значение порога было взято  $\Delta \bar{p} = (K - 1)/N$ . Оно равно предельной близости частот, то есть минимальному разбросу частот  $K$  гармоник, которые с помощью метода ДПФ при тех же исходных данных можно различить и параметры которых можно рассчитать, что должно соответствовать 2-й группе вариантов. В таблице приведены результаты расчета 88 вариантов ЧЕ-спектра для  $K=2,3,4$ : количество вариантов, попавших в группы (строки 7 и 9); получившиеся интервалы разброса частот в группах относительно истинных значений (строки 8 и 10); предельные интервалы разброса различимых частот по методу ДПФ (строка 6). Результаты показывают, что метод ЧЕ-спектра эффективен не только при обработке процессов 2-й но и 1-й группы. В частности видно, что использование ЧЕ-спектра позволило различать 2 гармоники с минимальной разницей между ними по относительной частоте  $p$  до величины 0.0004 (вместо допустимой 0.02 при использовании метода различения на основе ДПФ) и правильно определить их параметры. При наличии 3-х гармоник с разбросом частот до 0.0052 (вместо 0.04) и при наличии 4-х гармоник с разбросом до 0.0081 (вместо 0.06) они также были успешно различены и измерены. Если принять во внимание, что  $T=1$ ;  $N=100$  и  $f=p \cdot N/T$ , то это будет разброс 0.04 Гц, 0.52 Гц и 0.81 Гц для метода ЧЕ-спектра вместо 2 Гц, 4 Гц и 6 Гц для метода Фурье соответственно.

То есть, при использовании методов на основе спектра Фурье предельное разрешение гармоник по нормированной частоте для рассмотренного примера получились хуже на 1-2 порядка. Сказанное подтверждает возможность определять и различать сколь угодно близкие гармоники в коротких сигналах (прямоугольных радиоимпульсах), используя рассчитанные ЧЕ- и ПЕ-спектры.

## 5. Спектр суммы гармоник с наложенным шумом, их различие

Здесь также решалась задача по различению гармоник с использованием ЧЕ-спектра. Но исходный процесс подвергался воздействию помех. В качестве входного рассматривалась аддитивная сумма случайных синусоидальных колебаний и гауссовского шума (с нулевым средним значением).

В первом примере исходный процесс состоял из суммы двух гармоник, представленных  $N=100$  отсчетами. Для каждой его реализации нормированная частота  $p_1$  первой гармоники задавалась равномерно распределенной в интервале  $[0; 0.5]$ . Логарифм частоты  $p_2$  второй гармоники задавался равномерно распределенным в интервале  $[-7; -1]$  относительно первой. Амплитуда  $R_k$  и фаза  $\varphi_k$  гармоник задавались равномерно распределенными в интервалах  $[0; 100]$  и  $[0; 2\pi]$  соответственно. Логарифм  $\sigma$  - среднего квадратического отклонения (СКО) шума задавался равномерно распределенным в интервале  $[-12; 1]$ , то есть  $10^{-12} \leq \sigma \leq 10$ .

По каждой из реализаций процесса рассчитывался ЧЕ-спектр порядка  $K=2$  и значение постоянной составляющей. При завершении расчета фиксировались: разница  $\Delta p$  между двумя выпавшими частотами гармоник исходного процесса и выпавшее значение  $\sigma$  наложенного шума. Если частоты в рассчитанном ЧЕ-спектра отличались от соответствующих выпавших не более чем на  $\Delta p/2$ , то принималось решение о разрешении (разделении) гармоник. Иначе считалось, что гармоники при данных параметрах не различаются. Величина ошибки  $S$  расчета ЧЕ-спектра, то есть точность представления процесса суммой 2-х гармоник во внимание не принималась, поскольку при положительном решении она естественно получалась минимально малой. Поэтому задача достижения глобального минимума не ставилась.

В результате проведенных расчетов положительные и отрицательные исходы образовали два множества точек в системе координат  $\sigma$ ,  $\Delta p$ . После проведения 3068 вариантов моделирования процессов и расчета их ЧЕ-спектров была построена в этой системе координат кривая, разделяющая область (сверху от кривой) разрешения гармоник с областью (снизу) ошибочных решений. Кривая представлена в логарифмичес-

ком масштабе на рис.2 внизу. Ее расположение показывает, что область разрешения гармоник по нормированной частоте  $p$  даже при больших уровнях шума лежит намного ниже обозначенного уровня 0.02 (2Гц, если задать  $T=1$ ), который является порогом разрешения гармоник при использовании спектра ДПФ для  $N=100$ .

Во втором примере в качестве входных процессов рассматривалась сумма из 3-х гармоник с наложенным гауссовским шумом. Распределение амплитуд и фаз исходных гармоник, а также СКО шума такие же, как в предыдущем примере. Распределение относительных частот 1-й и 2-й гармоник тоже аналогичное. Логарифм частоты  $p_3$  третьей гармоники задавался равномерно распределенным в интервале  $[-12; 1]$  относительно первой. Для каждой реализации процесса рассчитывался ЧЕ-спектр порядка  $K=3$ . При завершении расчета фиксировались: значение  $\Delta p$ , равное половине разницы между максимальной  $p_3^*$  и минимальной  $p_1^*$  из трех выпавших частот исходных гармоник, и выпавшее  $\sigma$  наложенного шума. Если 1-я и 3-я частоты рассчитанного ЧЕ-спектра отличались от выпавших не более чем на  $0.5(p_2^* - p_1^*)$  и  $0.5(p_3^* - p_2^*)$  соответственно, а 2-я попадала в интервал  $[0.5(p_1^* + p_2^*); 0.5(p_2^* + p_3^*)]$ , то принималось решение о разрешении (разделении) трех гармоник с параметрами  $\Delta p$ ,  $\sigma$ . Иначе считалось, что гармоники при данных параметрах не различаются. Величина ошибки  $S$  расчета ЧЕ-спектра во внимание не принималась в виду ее малости, как и для случая суммы 2-х гармоник.

После проведения 2679 вариантов моделирования процессов и расчета их ЧЕ-спектров была построена в системе координат  $\sigma$ ,  $\Delta p$  кривая, разделяющая область разрешения 3-х гармоник (над кривой) с областью ошибочных решений (под кривой). Она представлена на рис.2 вверху. Кривая лежит ниже обозначенного уровня 0.04 (4Гц), являющегося порогом разрешения 3-х гармоник при использовании метода ДПФ для  $N = 100$ .

Таким образом полученные результаты подтверждают эффективность использования ЧЕ-спектра для анализа процессов с целью обнаружения, различения и измерения параметров сигналов, в частности прямоугольных радиоимпульсов, из их аддитивной смеси.

## Литература

1. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1973.–831 с.
2. Дмитриев Е.В. Методы аппроксимации и определения естественного спектра коротких процессов, сигналов, функций // Приборы и системы. – 2007. – цб. – С.18-24.
3. Дмитриев Е.В. Аппроксимация коротких процессов, сигналов, функций и расчет их гармонических дискретных спектров // Физика волновых процессов и радиотехнические системы. – 2007. – Т.10. – ц 1. – С. 33-46.

Таблица 1

1	Количество гармоник	2	3	4
2	Параметры других частот относительно 1-й	$(p_1; 0.01)$	$(p_1; 0.02)$	$(p_1; 0.02)$
3	Общее количество рассчитанных вариантов	18	32	38
4	- безуспешных	1	2	3
5	- успешных	17	30	35
6	Интервал пороговых частот $\Delta\bar{p} = 2(K-1)/N$	0.02	0.04	0.06
7	Количество вариантов 1-й группы	14	25	32
8	Интервал разброса частот в 1-й группе	[0.0004;0.0128]	[0.0052;0.0367]	[0.0081;0.0569]
9	Количество вариантов 2-й группы	3	5	3
10	Интервал разброса частот во 2-й группе	[0.0337;0.0479]	[0.0417;0.0618]	[0.0636;0.0941]

## Detection and Discrimination of Signals in Additive Mixture by Calculation and Analysis of Natural Spectrum

*E.V. Dmitriev*

Results for spectral processes calculation are presented by different methods. Their comparative performances are given. A new method for spectral decomposition of short processes is considered and validated. Examples of the method application for detecting and discriminating the signals of process including conditions of additive interference.

**Дмитриев Евгений Васильевич**, 1941 года рождения. Окончил Воронежский государственный университет в 1965 году по специальности математика. С 1982 года ведущий инженер-конструктор ОАО "Концерн "Созвездие". Область научных интересов: методы и алгоритмы цифровой обработки сигналов в радио и радиотехнических устройствах; анализ сигналов математическими методами; аппроксимация, спектральный анализ процессов и сигналов; математическое моделирование каналов приема и передачи информации.