DIGITAL PROCESSING
OF SIGNALS

Bernard Gold and Charles M. Rader

Lincoln Laboratory
Massachusetts Institute of Technology

with chapters by

Alan V. Oppenheim and Thomas G. Stocknam, Jr.

McGraw-Hill Book Company

New York
St. Louis
San Francisco
London

Sydney
Toronto
Mexico
Panama

1969

146078

Б. Голд, Ч. Рэйдер

ЦИФРОВАЯ ОБРАБОТКА СИГНАЛОВ

с приложением
работы Д. Кайзера
«Цифровые фильтры»

Перевод с английского
под редакцией А. М. Трахтмана

РЕСПУБЛИКАНСКАЯ
НАУЧНАЯ БИБЛИОТЕКА
им. В. И. Ленина ТАССР

Москва «Советское радио» 1973

621.39

6Ф7.3
Г601
УДК 681.3.01:621.372.5

Голд Б., Рэйдер Ч. **Цифровая обработка сигналов.** Пер. с англ., под ред. А. М. Трахтмана. М., «Сов. радио», 1973, 368 с.

Цифровая обработка непрерывных и дискретных сигналов как новое техническое направление оформилась менее десяти лет назад. Важную роль в деле становления этого направления сыграли работы Д. Кайзера «Цифровые фильтры» и Б. Голда и Ч. Рэйдера «Цифровая обработка сигналов». О классическом характере этих работ говорит тот факт, что почти нет статей по цифровой обработке сигналов, в которых не было бы на них ссылки.

В указанных работах рассматриваются вопросы теории дискретных сигналов и дискретных цепей, методы проектирования цифровых фильтров, способы осуществления цифровой обработки на универсальных и специализированных ЦВМ и др.

Цифровая обработка сигналов находит широкое применение в радио- гидро- и звуколокации, космической связи, телеметрии и передаче данных, в фототелеграфной и телефонной связи, измерительной технике, при моделировании динамических систем на ЦВМ, в геологоразведке, метеорологии, сейсмологии и медицине, при анализе вибраций и т. д. Поэтому настоящая книга будет весьма полезна научным работникам и инженерам, работающим в этих областях, а также студентам соответствующих специальностей.

7 табл., 162 рис., библ. 188 назв.

Г $\frac{0341\text{-}057}{046(01)\text{-}73}$ 2-73

© перевод на русский язык, «Советское радио», 1973.

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Сфера применения цифровой обработки сигналов непрерывно расширяется в связи с тем, что при помощи специализированных устройств на интегральных схемах или универсальных вычислительных машин можно получить новые результаты, недостижимые при использовании аналоговых методов.

Уже сейчас можно указать на такие определившиеся области ее применения, как обработка сигналов в радио-, гидро- и звуколокации, сжатие данных в телеметрии, обнаружение сигналов и фазовая автоподстройка частоты в дальней космической связи, анализ спектра, прием сигналов с дискретной частотной модуляцией, адаптивная коррекция каналов связи, анализ речи в системах синтетической телефонии, обработка фототелевизионной информации, цифровые методы измерений, моделирование динамических систем на ЦВМ, обработка сигналов в геологоразведке, метеорологии, сейсмологии и медицине, анализ вибраций и т. д.

Количество публикаций по всем этим вопросам неуклонно растет. В большинстве из них авторы ссылаются на одни и те же основополагающие работы, сыгравшие важную роль в становлении цифровой обработки сигналов как нового научного и технического направления. Среди наиболее популярных зарубежных работ следует отметить труды Кайзера, Голда, Рэйдера, Оппенгейма, Стокхема и др.

Настоящая книга представляет собой полный перевод книги Голда и Рэйдера «Цифровая обработка сигналов», изданной в 1969 г. Две последние главы в ней написаны Оппенгеймом и Стокхемом.

В качестве приложения в книгу включена более ранняя работа Кайзера «Цифровые фильтры», сыгравшая значительную роль в формировании основных идей цифровой фильтрации. Она носит характер очерка основ теории цифровых фильтров и была опубликована в виде одной из глав коллективной монографии «Анализ систем

с помощью цифровых вычислительных машин» под редакцией Куо и Кайзера *).

В книге Голда и Рэйдера теория цифровых фильтров получает дальнейшее развитие и помимо этого в ней освещаются некоторые общие аспекты цифровой обработки сигналов. Ее понимание может быть значительно облегчено, если предварительно ознакомиться с более доступной работой Кайзера.

В обеих публикуемых работах значительное место уделено наиболее распространенным элементам систем цифровой обработки сигналов — цифровым фильтрам.

Большой интерес к цифровым фильтрам объясняется рядом преимуществ этих фильтров по сравнению с аналоговыми. Остановимся на наиболее важных из них:

— цифровые фильтры не имеют реактивных элементов и поэтому при их разработке исключаются все проблемы, связанные с точностью изготовления и стабильностью этих элементов.

— цифровые фильтры можно выполнять на интегральных схемах или в виде небольшого числа (или даже одной) интегральных субсистем. Следовательно, такие фильтры могут быть экономичными и иметь малые размеры,

— в тех случаях, когда для обработки сигналов применяется цифровая вычислительная машина, работающая в реальном масштабе времени, цифровые фильтры могут быть запрограммированы на этой машине. Такая реализация цифровых фильтров особенно удобна, когда вычислительная машина используется для моделирования динамической системы,

— характеристики цифровых фильтров прогнозируются и выполняются с высокой точностью,

— характеристические частоты цифровых фильтров зависят от внешней тактовой частоты. Изменяя эту частоту, можно легко перестраивать фильтр. Можно также легко изменять и другие параметры фильтра (например, ширину полосы пропускания), что дает возможность использовать их в адаптивных и следящих системах,

— цифровые фильтры имеют высокую стабильность, определяемую стабильностью генератора тактовой частоты. Это позволяет реализовать фильтры с очень высокой

*) Kuo F. K. and Kaiser J. F. (eds.) Sistem Analysis by Digital Computer. John Wiley, 1966.

добротностью или чрезвычайно большими постоянными времени,

— цифровые фильтры можно выполнять с линейными фазовыми характеристиками, что важно в тех случаях, когда надо иметь постоянную задержку на всех частотах или хорошую импульсную характеристику,

— при разработке цифровых фильтров не возникает проблем, связанных с физической реализацией отрицательных индуктивностей. Это позволяет иметь значительно большее разнообразие структур фильтров,

— при разработке цифровых фильтров не возникает задачи согласования нагрузок,

— преимущества цифровых фильтров особенно видны на сверхнизких частотах, где габариты аналоговых фильтров недопустимо велики,

— цифровые фильтры не имеют дрейфа, присущего активным фильтрам,

— в случае реализации фильтровых гребенок одно управляющее устройство и один арифметический блок могут обслуживать много цифровых фильтров, что дает существенную экономию оборудования,

В то же время следует иметь в виду, что, в отличие от аналоговых фильтров, работа цифровых фильтров сопровождается образованием специфического шума за счет недостаточно четкого ограничения полосы частот входного аналогового сигнала, неточного определения частоты дискретизации и применения квантования, а также за счет неизбежного округления чисел при проведении вычислений. Области применения цифровых фильтров и вообще цифровых методов обработки сигналов в значительной степени определяются возможным быстродействием используемых вычислительных средств.

Схемы цифровой фильтрации описываются с помощью разностных уравнений подобно тому, как схемы аналоговой фильтрации описываются с помощью дифференциальных уравнений. Для решения разностных уравнений и синтеза цифровых фильтров удобно использовать математический аппарат z-преобразований, выполняющий в дискретном анализе ту же роль, что и преобразования Лапласа в непрерывном анализе.

Некоторые типы цифровых фильтров можно рассматривать как аппроксимацию известных аналоговых фильтров, но в общем случае цифровые фильтры составляют значительно более широкий класс устройств, и их мож-

но проектировать непосредственно, не опираясь на аналоговые прототипы. В последнем случае можно создать цифровые фильтры, не имеющие себе подобных среди аналоговых фильтров.

Основы теории и проектирования цифровых фильтров во многом самобытны, и инженеру, желающему стать специалистом в области цифровой фильтрации, надо их основательно изучить, так как знания из области аналоговой фильтрации для этой цели совершенно недостаточны. Для такого изучения особенно удобны работа Кайзера и книга Голда и Рэйдера, рассчитанные на неподготовленного читателя.

Вопросы цифровой обработки сигналов тесно связаны с вопросами теории дискретных сигналов, занимающими в этих работах значительное место.

В дискретной теории сигналы определяются с помощью последовательности чисел, следующих друг за другом через определенные промежутки времени, т. е. ось времени рассматривается в ней как совокупность фиксированных точек, в отличие от непрерывной теории, в которой ось времени представляет собой несчетное множество точек (континуум).

Дискретная теория, включающая в себя такие своеобразные понятия, как дискретные преобразования Фурье, дискретная и круговая свертка, быстрые преобразования Фурье, высокоскоростная свертка и корреляция и др., во многом отличается от непрерывной теории и, строго говоря, не может рассматриваться как ее дискретный аналог или частный случай, хотя во многих работах и в большинстве глав настоящей книги применяется именно такой подход.

Помимо этого принципиального различия отличительной особенностью дискретной теории является еще и то, что она строится с учетом возможности реализации цифровой обработки сигналов методами вычислительной техники.

Важное значение с теоретической и практической точки зрения имеет заключительная глава настоящей книги, посвященная такому обобщению теории линейной фильтрации, которое позволяет применить ее для анализа некоторых нелинейных систем. В ней рассматриваются методы цифровой обработки сигналов, которые могут быть представлены в виде определенной композиции двух компонентов, например в виде их свертки или произведения. Эти методы дают возможность в некоторых случаях разделить компоненты сигнала и обработать каждый из них независимо. В частности, такой подход позволил найти новые пути решения таких важных практических задач, как определение частоты основного тона в системах телефонии, использующих вокодер, и одновременная коррекция яркости и контрастности при передаче фотоизображений.

В современных радиотехнических системах используются не только чисто аналоговые или чисто цифровые устройства, но и комбинированные устройства, в которых одна часть приборов является аналоговой, а другая — цифровой (например, цифровые системы фазовой автоподстройки частоты). К исследованию и проектированию комбинированных устройств необходимо подходить с осторожностью особенно в тех случаях, когда одно и то же явление может рассматриваться как с дискретной, так и с непрерывной точки зрения. В связи с этим можно указать на такой пример: процесс дискретизации с сохранением непрерывной шкалы времени является нелинейным, он же при переходе на дискретную шкалу времени является линейным процессом.

В данной книге такого рода вопросы, относящиеся к единой теории сигналов и цепей, не рассматриваются. Не рассматриваются также некоторые конкретные вопросы программирования цифровых фильтров и систем цифровой обработки сигналов. Тем не менее она представляет большой интерес для радиоинженеров и инженеров-автоматчиков, занимающихся разработкой новых радиоэлектронных систем, а также для студентов старших курсов и может служить для них хорошим введением в чрезвычайно перспективную область цифровых методов приема и обработки сигналов.

Перевод настоящей книги выполнили В. А. Балашов (гл. 2, 3, 4), Л. Л. Клаппер (гл. 1, 5, 8, приложение) и В. А. Трахтман (гл. 2, 6, 7).

А. М. Трахтман

Иосифу Левину

ПРЕДИСЛОВИЕ

Сложность электронной аппаратуры и степень ее интеграции постоянно возрастают. Благодаря большому значению вычислительных машин особенно много усилий направлено на разработку входящих в них цифровых электронных элементов, небольших, дешевых и быстродействующих. Достижения в области цифровой техники привели к тому, что многие процессы, выполнявшиеся ранее только аналоговыми устройствами, например линейная фильтрация и спектральный анализ, теперь могут быть реализованы с помощью цифровой аппаратуры.

Цель этой книги — дать теорию и некоторые случаи ее применения для операций цифровой обработки сигналов, уделяя при этом особое внимание описанию цифровой фильтрации в частотной области и анализу дискретного спектра. Для инженера-практика эта книга будет справочником, который наряду с моделированием на вычислительной машине полезен для решения задач обработки сигналов (в таких областях, как передача речи, сейсмология, медицинские исследования, океанография и радиолокация), при проектировании специализированной цифровой аппаратуры и разработке универсальных структур вычислительных машин, предназначенных для обработки сигналов.

Область цифровой обработки сигналов является слишком новой, чтобы позволить предсказать последующие разработки. Большая часть изложенного здесь материала основана на наших исследованиях и на исследованиях наших сотрудников А. Оппенгейма и Т. Стокхема, мл., которыми написаны две последние главы. Несмотря на то, что в книге уделено недостаточное внимание многим опубликованным работам, она, пожалуй, является первой книгой, претендующей на исчерпывающий охват области, значение которой все возрастает.

В первой главе книги рассматриваются два самых важных вида цифровой обработки сигналов: цифровая фильтрация и дискретное преобразование Фурье, причем особое внимание уделяется тому, как выполняются вычисления с помощью цифровой аппаратуры. В гл. 2 приводится основная теория линейных дискретных систем, вводится и развивается понятие z-преобразования, используемое на протяжении всей книги. В гл. 3 основное внимание сосредоточено на проектировании цифрового фильтра в частотной области. Идеологически и во многих технических деталях эта глава тесно связана с классической теорией фильтров; однако следует иметь в виду, что классическая теория основывается на принципах, которые могут легко применяться как к цифровым, так и к аналоговым системам, однако не гарантируют возможность аппаратурной реализации. В гл. 4 обсуждается проблема синтеза цифрового фильтра с учетом конечной длины регистра в любой цифровой вычислительной машине (ЦВМ). Так как многие важные вопросы, обсуждающиеся в этой главе, можно выразить в терминах моделей случайных шумов, то в ней делается попытка развить линейную теорию шумов. В гл. 5 кратко описываются методы программирования при моделировании последующего состояния. В гл. 6 дается теория дискретного преобразования Фурье и приводится подробное объяснение многих возможных видов быстрого преобразования Фурье. В гл. 7 рассматривается применение быстрого преобразования Фурье для реализации операций фильтрации и корреляции. В гл. 8 вводится понятие обобщенной линейной фильтрации, применяемое затем для решения с помощью дискретного преобразования Фурье задачи разделения свернутых сигналов.

Мы хотим выразить благодарность многим нашим талантливым коллегам в этой новой захватывающей области, опубликованные труды которых помогли нам в значительной степени написать эту книгу. Мы особенно признательны за сотрудничество д-ру М. И. Левину (Lincoln Laboratory), трагически погибшему при автомобильной катастрофе. Мы благодарны д-ру Д. Кайзеру (Bell Telephone Laboratories), который с энтузиазмом поделился с нами многими из основных идей, познакомил с новыми достижениями в рассматриваемой области, критически и внимательно просмотрел нашу рукопись.

Бернард Голд, Чарльз М. Рэйдер

Глава первая

О ПРОБЛЕМЕ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

1.1. ВВЕДЕНИЕ

Линейная фильтрация и спектральный анализ являются основными операциями обработки сигналов, которые нашли широкое применение во многих областях науки и техники. Эти операции могут выполняться дискретно (цифровым способом) на специализированных или универсальных машинах, а также непрерывно с помощью аналоговых вычислительных машин или *RLC*-цепей. Во многих случаях особый интерес представляет описание сигналов и линейных систем в частотной области. Такое описание справедливо как для аналоговой, так и для дискретной обработки сигналов. Описанию в частотной области часто отдают предпочтение перед описанием во временно́й области, а именно когда речь идет о процессах фильтрации нижних частот или полосовой фильтрации, о дифференцировании, интерполяции и сглаживании. Эти методы обработки сигналов часто используются для научных исследований в таких областях, как телефония, сейсмология, гидролокация, радиолокация и медицина.

Можно привести все возрастающее количество примеров, показывающих, что цифровой обработке сигналов отдается предпочтение перед аналоговой. Настоящая книга предназначена для программиста, моделирующего динамические системы на универсальной ЦВМ, для конструктора, проектирующего специализированные устройства цифровой обработки сигналов, и для конструктора, усовершенствующего принципы построения универсальных ЦВМ так, чтобы программирование процессов цифровой обработки сигналов было наиболее эффективным. Короче говоря, эта книга в основном посвящена теории линейной цифровой фильтрации и дискретному спектральному анализу, причем особое внимание уделяется описанию сигналов и систем в частотной области.

1.2. ЛИТЕРАТУРА ПО ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

Исторический экскурс следует начать по крайней мере с Лапласа [13] *), которому было известно z-преобразование, являющееся математической базой для операций цифровой обработки сигналов. Кайзер [11] в своем превосходном исследовании прослеживает историю цифровой фильтрации с начала 16-го столетия, когда ее развитие побуждалось проблемами астрономии и составления математических таблиц. Некоторые важные монографии [2, 8, 14] опубликованы математиками — специалистами по линейным разностным уравнениям; они могут в такой же мере служить хорошим вспомогательным материалом для лиц, проявляющих склонность к математике, как книга по линейным дифференциальным уравнениям может быть полезна при изучении приложений преобразований Лапласа к линейным непрерывным системам. Еще более непосредственный интерес имеет глава Гуревича в [7]—первая современная работа по импульсным системам управления. Интересно отметить, что эта глава послужила также основой для многих описаний цифровых систем в частотной области. Многие последующие книги по импульсным системам [4, 9, 10, 15, 16, 17, 20, 22] содержат весьма полезную информацию, которая может служить превосходным дополнением к настоящей книге. Приведем несколько примеров: в гл. 4 книги Рагаззини и Франклина [17] рассматриваются дискретные линейные системы с помощью аппарата z-преобразований, там же, в гл. 10, описывается поведение этих систем при воздействии на них случайных входных сигналов. В гл. 1, 2 и 4 книги Джури [10] дается развитие теории z-преобразования и ее применение к линейным разностным уравнениям. Особого внимания заслуживают книги Блекмена [1] и Хемминга [6] благодаря высказываемому в них глубокому пониманию сути цифрового вычисления.

Кроме указанной выше литературы по дискретным системам, читателю можно рекомендовать изучить некоторый современный материал по непрерывным линейным системам. Для лучшего усвоения содержания гл. 3 данной книги большую помощь могут оказать работы Гуллемина [5], Сторера [18] и Вайнберга [21].

В настоящее время имеется множество статей по цифровому вычислению, цифровой фильтрации в частотной области, по быстрому преобразованию Фурье, высокоскоростной свертке и корреляции и по обобщенной линейной фильтрации. На эти статьи даются ссылки в соответствующих местах настоящей книги. Одна из важных ее задач подготовить читателя к лучшему восприятию этих работ.

1.3. ОСНОВНЫЕ РАСЧЕТНЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

В настоящее время большое значение придается цифровой фильтрации и дискретному преобразованию Фурье (ДПФ), двум основным расчетным алгоритмам обработки сигналов. Это не означает, однако, что они являются единственными алгоритмами, представляющими интерес: например, в гл. 5 упоминается несколько нелинейных процессов, а в гл. 8 большое внимание уделяется логарифмированию. Для иллюстрации практических инженерных проблем, возникающих при проектировании системы цифровой обработки сигналов, в этом разделе мы ограничимся примерами фильтрации и ДПФ.

*) Литература, ссылки на которую приводятся в квадратных скобках, дается в конце главы.

Предположим, что заданный цифровой фильтр определяется характеристиками, описывающими его в частотной области, и нам нужно написать программу или спроектировать специализированную цифровую логическую схему для решения требуемого расчетного алгоритма. Во-первых, должно быть понятно, что существует много возможных алгоритмов, приводящих к теоретически идентичным фильтрам *). Здесь следует различать три больших класса таких алгоритмов, к которым мы относим (1) свертку, (2) рекурсию **) и (3) преобразование Фурье. В зависимости от конкретных особенностей фильтра наиболее желательной может быть одна из этих трех реализаций. Теперь определим в несколько эвристических выражениях характер этих алгоритмов.

Рассмотрим сигнал $x(nT)$. Для простоты рассмотрения ограничим $x(nT)$ условием, что он равен нулю при $n<0$, так что сигнал состоит из последовательности чисел $x(0)$, $x(T)$, $x(2T)$ и т. д. Постоянная T является интервалом дискретизации, поэтому при таком обозначении неявно подразумевается, что $x(nT)$ может быть получено путем взятия отсчетов у непрерывного сигнала $x(t)$ через равные промежутки времени T, т. е. в моменты времени 0, T, $2T$ и т. д. При работе в реальном масштабе времени и для удобства в системах моделирования, которые в конечном счете также должны работать в реальном масштабе времени, в формулировку сигнала желательно ввести T в явной форме. При сглаживании данных, когда физическое время несущественно (например, двумерная пространственная фильтрация фотоснимков), T может быть принято равным единице, так чтобы сигнал являлся функцией только номера отсчета.

Линейный цифровой фильтр теперь можно определить с помощью принципа суперпозиции следующим образом:

$$y(nT)=\sum_{m=0}^{n} h(mT)\,x(nT-mT)=$$

$$=\sum_{m=0}^{n} h(nT-mT)\,x(mT). \qquad (1.1)$$

*) Это замечание справедливо, если длины всех регистров, в которых запоминаются цифровые сигналы и параметры, достаточны, чтобы гарантировать пренебрежимо малые эффекты квантования. В гл. 4 эти эффекты подробно описываются.

**) Рекурсия — использование при вычислениях не только входных, но и предыдущих выходных отсчетов сигнала. — *Прим. ред.*

Численно выходная последовательность $y(nT)$ представляет собой взвешенную сумму всех предыдущих значений входной последовательности. Веса $h(nT)$ определяют фильтр. Как можно видеть из (1.1), если на входе в частном случае действует последовательность 1, 0, 0, 0, ..., то выходная последовательность будет точно равна $h(nT)$. В этой книге нас будут интересовать только устойчивые цифровые фильтры; следовательно, если входная последовательность ограничена, то выходная последовательность также должна быть ограниченной. Можно показать, что необходимым и достаточным условием устойчивости [7] является

$$\sum_{n=0}^{\infty} |h(nT)|<\infty. \qquad (1.2)$$

Неравенство (1.2) удовлетворяется, если отклик на единичный импульс $h(nT)$ усекается, т. е. если $h(nT)=0$ всюду, кроме $N_1<n<N_2$. Оно может также удовлетворяться при откликах на единичный импульс неограниченной длительности, например, $h(nT)=K^n$ при $|K|<1$. В последнем случае расчетный алгоритм, определяемый выражением (1.1), иногда становится практически нереализуемым, так как с возрастанием n требуется проводить все большее количество расчетов для каждого последующего значения выходной последовательности. Так как (1.2) означает, что последовательность $h(nT)$, даже если она теоретически имеет бесконечную длительность, все же стремится к нулю при достаточно большом n, то выходную последовательность $y(nT)$ можно вычислить приближенно с помощью (1.1) путем простого усечения $h(nT)$. Такой эмпирический подход к вычислению выходной последовательности в общем случае мало пригоден, и поэтому были разработаны основы строгой теории, применительно к фильтрам с усеченной импульсной характеристикой. Чем меньше длительность импульсной характеристики, тем эффективнее вычисление, предусмотренное (1.1). Кайзер [11] рассмотрел много полезных методов проектирования цифровых фильтров в частотной области, используя фильтры с усеченной импульсной характеристикой.

Второй основной расчетный алгоритм базируется на теории линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Простым примером служит уравнение

$$y(nT)=Ky(nT-T)+x(nT), \qquad y(-T)=0, \qquad (1.3)$$

где K — постоянная, меньшая единицы. Алгоритм реализуется путем вычисления каждого последующего выходного отсчета $y(nT)$ по предыдущему выходному отсчету $y(nT-T)$ и самому последнему поступившему входному отсчету сигнала $x(nT)$. В более общем случае могут быть написаны программы или построена аппаратура для решения систем линейных разностных уравнений, каждое из которых имеет следующий вид:

$$y(nT)=\sum_{k=1}^{m} K_k y(nT-kT)+\sum_{k=0}^{r} L_k x(nT-kT). \quad (1.4)$$

Уравнения (1.3) и (1.4) определяют расчетные алгоритмы, дающие решение $y(nT)$ для следующих друг за другом значений n. Такие уравнения могут быть исследованы теоретически как линейные динамические системы, и, в частности, отклик этих систем на дискретные синусоидальные входные сигналы может быть выражен с помощью коэффициентов L_k и K_k.

Теория, изложенная в гл. 2 и 3, позволяет проектировщику составить ряд разностных уравнений, обеспечивающих требуемую частотную характеристику, и, в частности, определить требуемую степень сложности алгоритма, так как обычно, чем строже требования, предъявляемые к фильтру (крутой скат характеристики, хорошее приближение к некоторой идеальной характеристике и т. д.), тем больше коэффициентов должно содержаться в разностных уравнениях. Так как выбор разностных уравнений вообще не является единственным, то возможны многие варианты структуры фильтра; дальнейший выбор возможен с помощью положений, указанных в гл. 4, в которой проблема синтеза связывается с эффектами квантования. В этой главе будет показано, что длину регистров памяти часто можно уменьшить, если разумно выбрать специфическую конфигурацию фильтра.

Третий основной алгоритм базируется на дискретном преобразовании Фурье (ДПФ). Каким образом можно использовать ДПФ для вычислений, эквивалентных (1.1), неочевидно, поэтому этот вопрос будет подробно рассмотрен в гл. 7. Как будет видно, возникающая при применении ДПФ трудность связана с тем, что произведение двух дискретных преобразований Фурье в частотной области эквивалентно круговой свертке во временной области, в то время как (1.1) является линейной сверткой;

этой трудности можно избежать с помощью метода соответствующего разбиения, описанного в гл. 7. Пренебрегая пока этим аспектом вычисления, опишем алгоритм ДПФ для синтеза цифрового фильтра.

ДПФ для сигнала $x(nT)$ определяется следующим образом:

$$X(k\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\,e^{-j\Omega Tnk},\quad k=0,1,2,\ldots,N-1. \quad (1.5)$$

В этом уравнении $j=\sqrt{-1}$ и $\Omega=2\pi/NT$, где N — число отсчетов сигнала, подлежащих преобразованию. Чтобы показать, как можно использовать (1.5) для алгоритма цифрового фильтра, приведем теорему о свертке, доказательство которой дается в гл. 6. Если $X(k\Omega)$ есть ДПФ для $x(nT)$, а $H(k\Omega)$ есть ДПФ для $h(nT)$, то произведение $H(k\Omega)X(k\Omega)$ является ДПФ для свертки $x(nT)$ и $h(nT)$:

$$H(k\Omega)X(k\Omega)=\text{ДПФ}\left\{\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\,h(((m-n))T)\right\}, \quad (1.6)$$

где $((m-n))$ означает $(m-n)$ по модулю N. Если предположить, что эта круговая свертка может быть эквивалентна линейной свертке, то процедуру вычисления можно описать в общих чертах следующим образом.

1. Вычислить ДПФ для сигнала $x(nT)$. Обозначим его через $X(k\Omega)$.
2. Умножить $X(k\Omega)$ на $H(k\Omega)$, где $H(k\Omega)$ представляет собой требуемую частотную характеристику фильтра на частотах $2\pi k/NT$, $k=0, 1, 2, \ldots, N-1$.
3. Вычислить обратное ДПФ для произведения $H(k\Omega)X(k\Omega)$. Это дает требуемый выходной сигнал

$$y(nT)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega)H(k\Omega)\,e^{j\Omega Tnk}. \quad (1.7)$$

Почти во всех случаях при практическом применении этого алгоритма используется быстрое преобразование Фурье (БПФ). При правильном использовании этот метод может применяться для синтеза фильтров с импульсной характеристикой конечной или бесконечной длитель-

ЛИТЕРАТУРНАЯ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ БИБЛИОТЕКА
им. В. И. Ленина ТАССР

ности *). Другими словами, любой фильтр, который может быть реализован с помощью вычислений (1.1) или (1.4), может быть также синтезирован с помощью алгоритма БПФ. В тех случаях, когда импульсная характеристика фильтра имеет довольно большую длительность, скажем равна длительности нескольких сотен отсчетов, этот метод с точки зрения объема вычислений почти всегда эффективнее прямой свертки (1.1).

Выше была сделана попытка показать, что в распоряжении проектировщика цифровых фильтров имеется довольно много методов расчета и синтеза. Первоочередной задачей глав 2, 3, 4, 6 и 7 является теоретическое обоснование этих методов.

1.4. СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ

Дискретный анализ спектра входного сигнала может производиться с помощью цифровых фильтров или ДПФ. Анализатор спектра в виде набора фильтров может состоять из ряда параллельных каналов, как показано на рис. 1.1, где энергия в заданном участке спектра измеряется полосовым цифровым фильтром, настроенным на

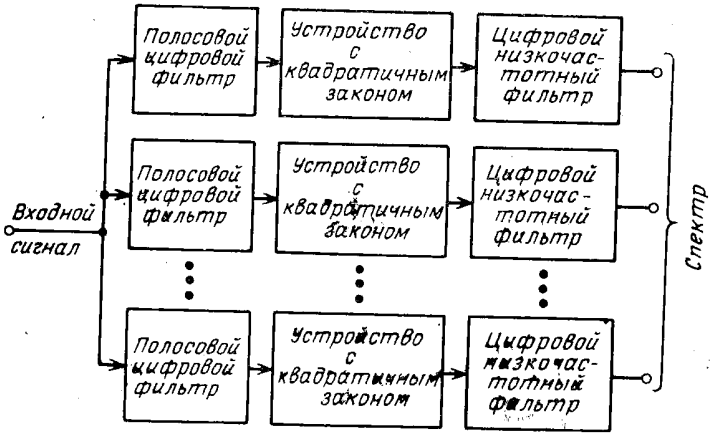


Рис. 1.1. Цифровой анализатор спектра.

*) В гл. 7 подробно рассматривается синтез фильтров с импульсной характеристикой конечной длительности с помощью БПФ. Из этого рассмотрения непосредственно не вытекает, что БПФ может применяться для синтеза фильтров с импульсной характеристикой бесконечной длительности. Практический смысл этого результата еще не ясен и в данной работе он более не рассматривается.

соответствующую частоту, после которого включается устройство с квадратичным законом и низкочастотный цифровой фильтр для сглаживания результатов измерения мощности. Разработчик анализатора спектра должен выбрать большое количество параметров: число анализируемых точек входных данных, разрешающую способность по частоте, перечень частот, на которых следует измерять спектральную энергию, весовую функцию, на которую умножается сигнал, интервалы времени между последовательными измерениями спектра и, возможно, метод усреднения этих последовательных измерений. Само собой разумеется, что выбор перечисленных параметров настолько зависит от поставленной задачи, что нельзя выработать общие рекомендации по его проведению. Особо следует подчеркнуть, что расчетные алгоритмы, описанные в § 1.3, могут также применяться для реализации цифровых анализаторов спектра. Кули, Люис и Велх [3] написали хороший обзор по многим работам, посвященным спектральному анализу с использованием алгоритма БПФ.

1.5. РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМОВ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКИ СИГНАЛОВ

Наиболее важное обстоятельство при сопоставлении систем цифровой обработки сигнала с системами аналоговой обработки заключается в следующем. Каждый аналоговый фильтр в совокупности фильтров реализуется обособленно от всех других фильтров. В то же время различные цифровые фильтры могут быть частью общего арифметического элемента, хотя они и должны иметь отдельные элементы памяти. Допустим, например, что обрабатываются сейсмические данные, отсчеты которых берутся 20 раз в секунду. При существующем в настоящее время быстродействии схем вычисление новой выходной точки в случае довольно сложного фильтра может потребовать, скажем, 50 *мксек*. Таким образом, за один интервал дискретизации в 50 *мсек* можно вычислить до 1 000 алгоритмов такого фильтра, так что один арифметический блок может обслуживать набор из 1 000 фильтров. Здесь, пожалуй, уместно заметить, что дополнительная стоимость 1 000 фильтров по сравнению, скажем, со стоимостью 100 фильтров будет вызвана почти исключительно повышенными требованиями к памяти,

причем в этом случае к стоимости управляющей аппаратуры и арифметических устройств добавляется лишь небольшая дополнительная сумма (или вообще ничего не добавляется). Отсюда можно вывести общее положение о том, что цифровую обработку следует предпочитать аналоговой по мере усложнения средств или устройств обработки сигналов.

Рассмотрим теперь характерный пример, чтобы пояснить влияние современной технологии изготовления элементов на проектирование устройства цифровой обработки сигналов. Прежде чем привести этот пример, следует заметить, что, в то время как теоретические разработки имеют относительно большой срок жизни, требования к элементам аппаратуры изменяются намного быстрее.

В качестве нашего примера рассмотрим программу универсальной ЦВМ для моделирования 30-канального анализатора спектра речевого колебания. Как будет видно из гл. 2, линейное разностное уравнение для цифрового резонатора включает в себя две или три операции умножения и несколько операций сложения. Большинство современных вычислительных машин, применяемых для научных исследований, могут производить эти вычисления с помощью примерно 10 команд, которые выполняются приблизительно за 40 *мксек*. Для моделирования 30 резонаторов требуется 1 200 *мксек* машинного времени. Таким образом, анализ спектра речи в реальном масштабе времени невозможен на таких универсальных вычислительных машинах, так как отсчеты речевого колебания обычно берутся примерно через каждые 100 *мксек*. Этот пример наглядно показывает необходимость увеличения быстродействия для моделирования систем передачи речи в реальном масштабе времени. Подобные аргументы можно использовать, чтобы показать невозможность моделирования на указанных выше вычислительных машинах в реальном масштабе времени многих геофизических, медицинских и радиолокационных систем обработки.

Однако быстрые успехи, наблюдающиеся в настоящее время в области производства цифровых элементов, позволяют предсказать, что выполнение таких операций, как моделирование анализатора речевого спектра, работающего в реальном масштабе времени, скоро будет возможно осуществлять цифровыми средствами. В настоящее время имеются в продаже интегральные запоминающие схемы с циклом считывания 150 *нсек*. Основные операции, такие, как передача и сложение данных, могут выполняться менее чем за 100 *нсек*. Быстродействие блоков памяти на тонких пленках и на сердечниках превысило 1 *Мгц* и продолжает увеличиваться. Умножение двух 18-разрядных чисел может быть произведено менее чем за 1 *мксек*. По-видимому, возможны и вычислительные устройства с быстродействием на порядок больше величины, указанной выше.

Если в дополнение к быстродействующим элементам внести изменения в логическую структуру универсальных вычислительных машин, то можно намного повысить их быстродействие. Для этого требуется некоторая форма параллельной обработки, однако, как ее осуществить в общем случае и экономична ли она — еще не ясно. Настоящая книга выполнит часть своего назначения, если поможет прояснить некоторые вопросы разработчику логики вычислительной машины, сталкивающемуся с проблемой проектирования устройств цифровой обработки сигналов.

1.6. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ О ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ УСТРОЙСТВАХ

Чтобы быть пригодной для обработки сигналов, вычислительная машина должна иметь и другие, менее очевидные свойства. Одним из таких свойств является степень связи между исследователем и вычислительной машиной. Примером слабой связи может служить групповая обработка *), при которой программист передает оператору вычислительной машины пачку перфокарт и сам возвращается к печати выходных данных, которая ведется на основе программного управления. Примером другой крайности может служить работа на вычислительной машине ТХ-2 в лаборатории Линкольна, когда программист является единственным лицом, работающим над данным проектом, и проводит по нескольку часов наедине с машиной. В такой ситуации становятся очень важными способности человека и машины осуществлять быструю связь. Большую помощь в такой связи оказывает ряд внешних устройств, соединенных с вычислительной машиной; самым полезным из них является осциллограф, управляемый вычислительной машиной. Примером других полезных внешних устройств, управляемых вычислительной машиной, служат преобразователи аналог — цифра и цифра — аналог, импульс-

*) Групповая обработка — обработка на ЦВМ за один прогон группы однотипных массивов входной информации или безостановочное решение потока задач. — *Прим. ред.*

ные прерыватели *), точный внешний тактовый генератор, устройства для объединения и разделения сигналов, не считая таких стандартных устройств, как пульты, устройства считывания с ленты и с перфокарт, перфораторы и быстродействующие печатающие устройства — все они помогают организовать более разумно работу вычислительной машины с центральным процессором **).

По мнению авторов этой книги, тесная связь между исследователем и вычислительной машиной является скорее психологическим фактором. Возможные способы ее экономичной материализации подлежат еще обсуждению. Ясно, что связь будет более сильной при увеличении скорости обработки сигналов. Большая вычислительная машина с разделением времени ***) и с большим количеством территориально разнесенных пультов экономична при работе с центральным процессором. Однако она вообще не может считаться аппаратурой обработки сигналов, так как не позволяет непосредственно вводить или выводить сигналы и не имеет устройств вывода на экран осциллографа. Переделка индивидуального пульта при работе с разделением времени в устройство обработки сигналов не только приводит к дорогостоящему пульту, но и требует значительного усложнения аппаратуры и средств программирования центрального процессора ****).

Другой подход состоит в применении отдельной вычислительной машины небольшого или среднего размера вместе с необходимым внешним оборудованием. При применении такой аппаратуры для обслуживания рабочей группы примерно из 10 научных работников-программистов каждый из них будет полностью использовать вычислительную машину в течение продолжительных периодов, когда это ему потребуется. Недостатком является относительно небольшое число быстродействующих блоков памяти в существующих машинах умеренных размеров. Несмотря на это, среди лиц, занимающихся обработкой сигналов, в настоящее время наблюдается тенденция к применению небольших или средних «личных» вычислительных устройств. Возможным компромиссом между приведенными выше направлениями является применение небольших вычислительных устройств, свободно связанных с большим центральным процессором таким образом, что они могут использоваться самостоятельно, но можно также использовать преимущество большой памяти и дорогостоящих внешних устройств, связанных с большой вычислительной машиной.

---

*) Импульсный прерыватель производит временное прекращение процесса выполнения последовательности команд в машине для выполнения другой последовательности или возвращения к прерванной ранее. — *Прим. ред.*

**) Центральный процессор — основная часть вычислительной машины (обычно арифметическое устройство и устройство управления) без внешних устройств. — *Прим. ред.*

***) Разделение времени—распределение между несколькими задачами времени работы ЦВМ или различных ее устройств для эффективного обслуживания многих пользователей. — *Прим. ред.*

****) Это замечание основано на наблюдениях в лаборатории Линкольна над вычислительной машиной ТХ-2 с разделением времени.

1.7. РОЛЬ ИНДИКАТОРНЫХ УСТРОЙСТВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ МАШИНЫ ПРИ ЦИФРОВОЙ ОБРАБОТКЕ СИГНАЛОВ

Научному работнику часто бывает важно иметь возможность слышать или видеть результаты обработки сигналов: например, после моделирования системы речевой связи требуется прослушать обработанную речь. В программах автоматического выделения основного тона речи требуется визуально показать речь одновременно с результатами ее обработки. Сейсмические волны, кардиограммы, волны мозга и радиолокационные сигналы удобно изучать визуально. Таким образом, к оборудованию вычислительной машины, обрабатывающей сигналы, логично присоединить осциллографическое устройство индикации, управляемое вычислительной машиной.

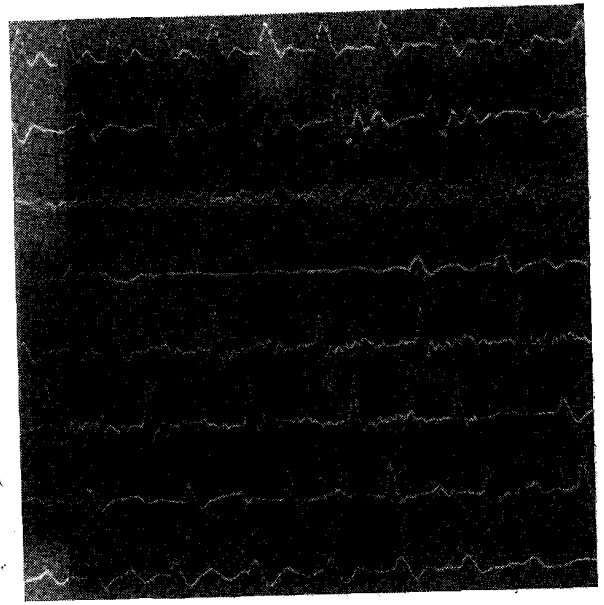


Рис. 1.2. Речевой сигнал (каждая кривая является продолжением предыдущей по времени).

В задачу настоящей книги не входит рассмотрение проблемы графопостроителей вычислительной машины. По этому вопросу имеется много ценной литературы [19], поэтому ограничимся следующим кратким рассмотрением, чтобы продемонстрировать примеры, которые оказались полезными при моделировании речевой связи.

Индикаторное устройство вычислительной машины может изображать сигнал различными способами. Легко составить программы для изображения любого числа кривых, также легко запрограммировать сжатие и расширение временной шкалы. (Например, на рис. 1.2 и 1.3 показан один и тот же речевой сигнал.)

На рис. 1.4 показан речевой сигнал для случая, когда произносимые слова синхронно изображались на экране индикатора и там же автоматически изображались временные метки. Построить для этой цели специальную лабораторную аппаратуру довольно сложно. Выполнить эту задачу в приемлемый срок даже с помощью индикаторного устройства вычислительной машины нелегко. Это зависит от способности оператора нажимать ключ в темпе произнесенных слогов при прослушивании ленты звукозаписи на половинной скорости,

Рис. 1.3. Речевой сигнал при растянутой временной шкале.

так, чтобы можно было получить новую ленту звукозаписи с двумя дорожками, содержащую оригинальную речь и достаточно синхронные временные метки. После этого вычислительная машина, работающая в реальном масштабе времени и имеющая преобразователь аналог—цифра на входе и возможность осуществления импульсного прерывания, может выдавать изображение, приведенное на рис. 1.4.

Изменяющиеся во времени изображения спектра, которые в сущности являются трехмерными, получить намного труднее, и использование для этой цели индикаторного устройства вычислительной машины имеет большие преимущества по сравнению с попытками создать специальную аппаратуру. Объясняется это тем, что максимальную эффективность индикации можно оценить только визуально, поэтому необходима отработка этой системы методом проб и оши-

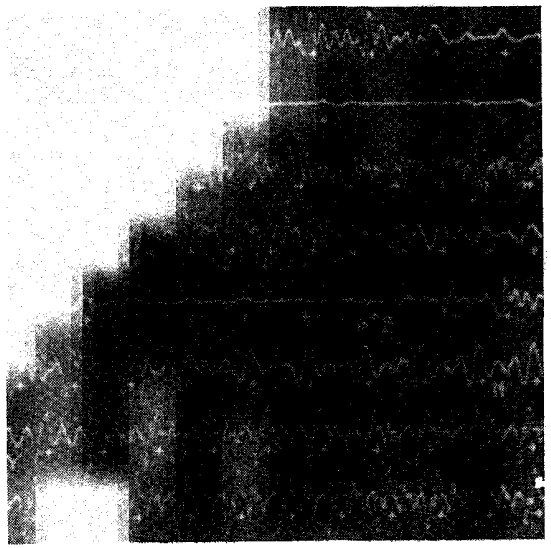


Рис. 1.4. Речевой сигнал с хронизирующими метками (см. также следующие два фото).

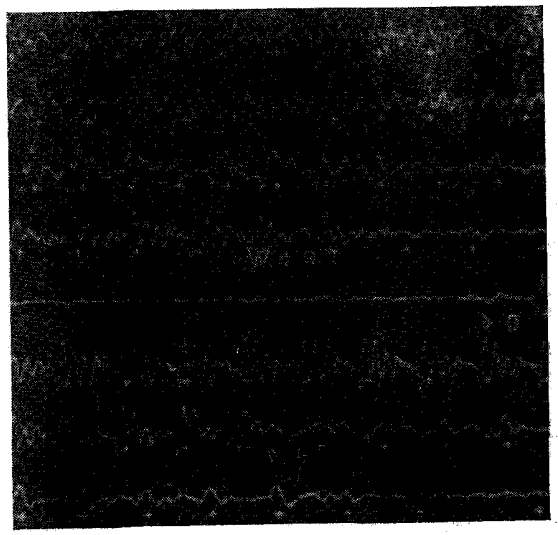


Рис. 1.4.

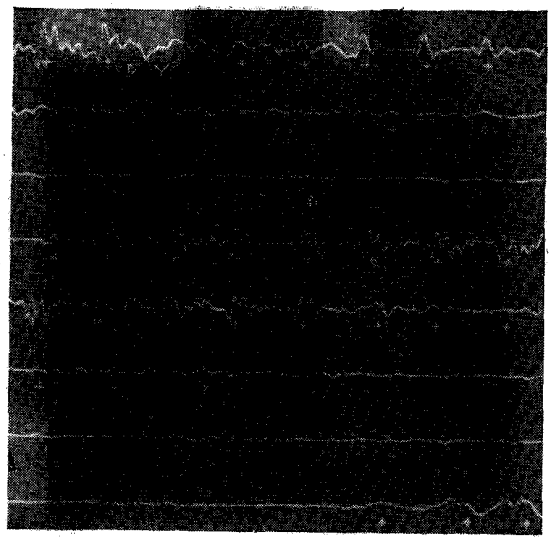


Рис. 1.4.

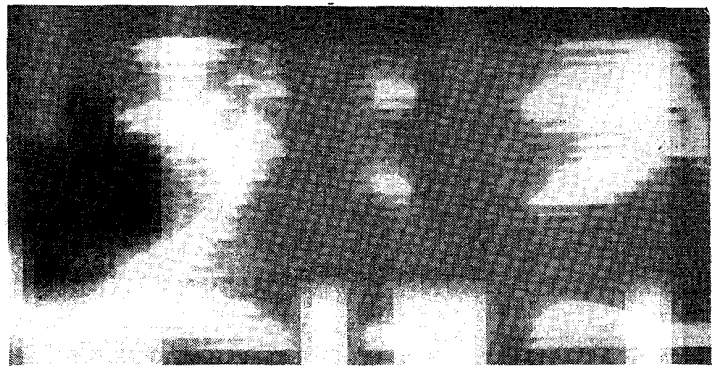


Рис. 1.5. Спектрографическое изображение речи (яркость соответствует интенсивности речи).

бок. На рис. 1.5—1.7 показаны результаты нескольких методов индикации спектра речи, поступающего от анализатора спектра, выполненного в виде набора фильтров (по горизонтальной оси отложено время, по вертикальной — частота дискретными ступенями).

Индикация часто полезна при определении точности действия заданной программы и правильности ее выполнения. На рис. 1.8 показана амплитудно-частотная характеристика запрограммированного

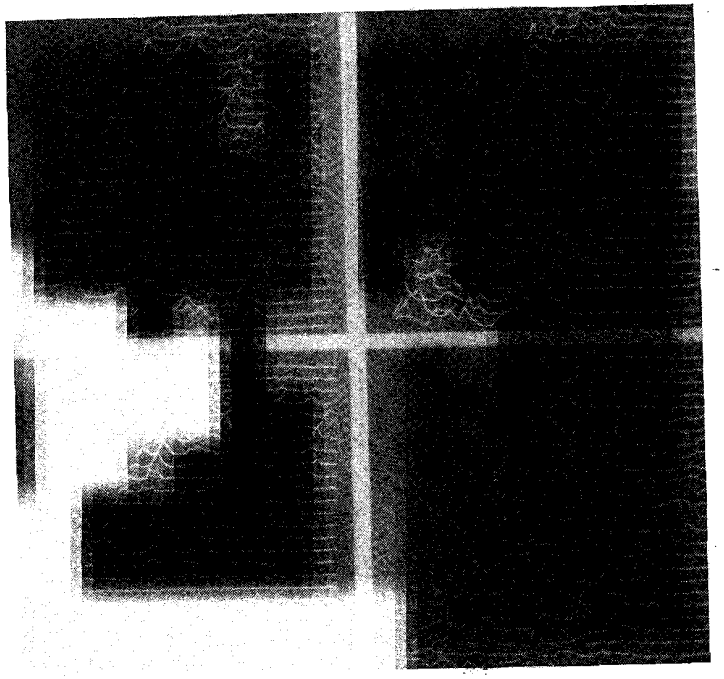


Рис. 1.6. Изображение спектра речи, полученное с помощью анализатора в виде набора фильтров.

цифрового фильтра. Ее изображение может быть получено, конечно, только после выполнения требуемых вычислений. Индикация (по сравнению с печатью выходных данных) имеет двойное преимущество: 1) большие ошибки в программе вычислений обнаруживаются быстрее и 2) быстрее могут производиться требуемые эмпирические регулировки параметров фильтра. На рис. 1.9 показан результат эмпирического уменьшения боковых лепестков характеристики фильтра путем регулирования нескольких параметров с участием центрального процессора.

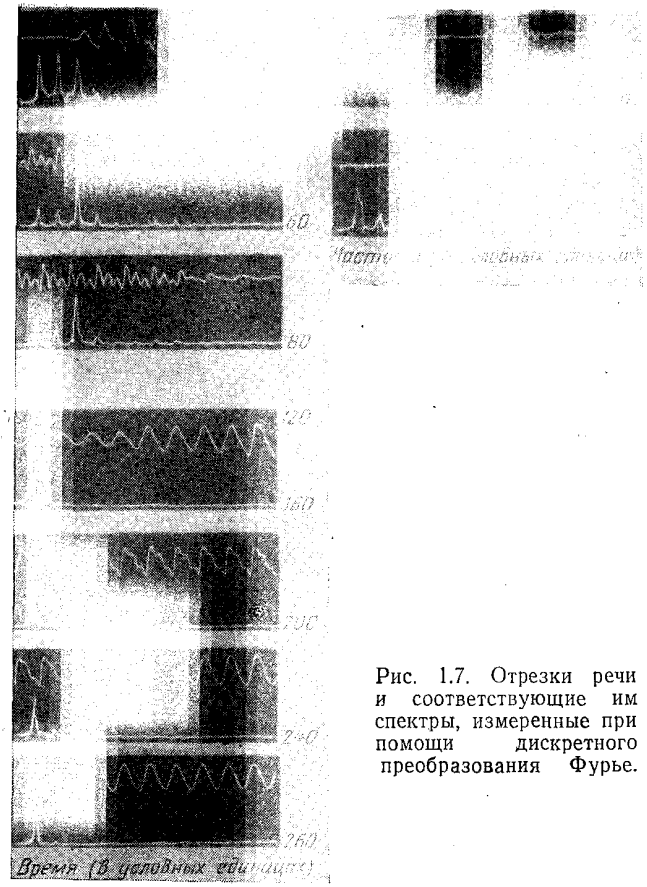


Рис. 1.7. Отрезки речи и соответствующие им спектры, измеренные при помощи дискретного преобразования Фурье.

1.8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Глава 1 по своему основному содержанию может рассматриваться как краткое изложение остальной части книги. Она начинается с эвристичского обсуждения операции линейной фильтрации. Важно, что каждой из трех математических формулировок проблемы цифровой фильтрации, а именно свертке, рекурсии и z-преобразованию, соответствуют практические расчетные задачи. Интересно также отметить, что рекурсивные методы и БПФ во многих случаях являются конкурирующими способами выполнения одних и тех же операций, и правильный выбор одного из этих методов часто не очевиден. Происходящая сейчас революция в области развития цифровой аппаратуры позволяет заменить многие существующие аналоговые

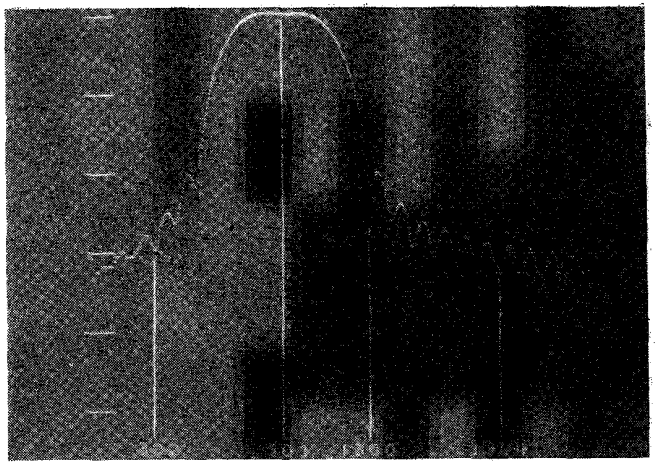


Рис. 1.8. Амплитудно-частотная характеристика цифрового фильтра.

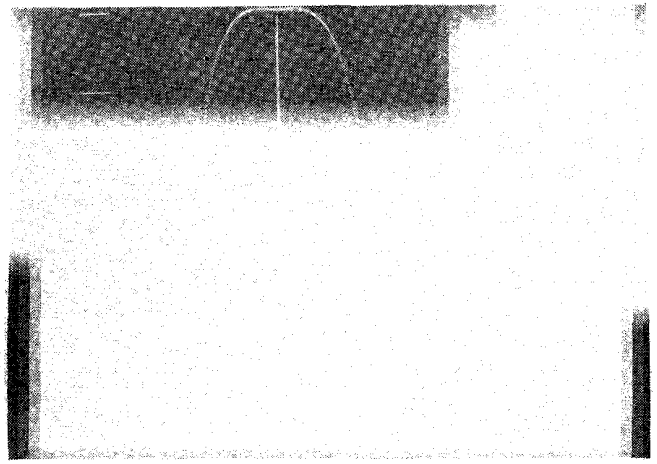


Рис. 1.9. Амплитудно-частотная характеристика цифрового фильтра с уменьшенными боковыми лепестками.

системы цифровыми, использующими фильтры и анализаторы спектра и работающими в реальном масштабе времени. Для этого требуется хорошее понимание теории, изложенной в настоящей книге.

Глава заканчивается небольшим разделом об индикации. В нем уделено мало внимания теоретическим аспектам. Однако он показывает, что во всех областях обработки сигналов исследователям необходимо проявить максимум внимания к вопросам использования осциллографической индикации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Blackman R. B., «Linear Data-smoothing and Prediction in Theory and Practice», Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1965.
2. Boole G., Treatise on the Calculus of Finite Differences. Republished by Stechert-Hafner, Inc., New York, 1946.
3. Cooley J. W., Lewis P., Welch P., «The Fast Fourier Transform and Its Applications.», IBM Res. Paper RC-1743, Feb. 9, 1967.
4. Freeman H., «Discrete-time Systems», John Wiley and Sons, Inc., New York, 1965.
5. Guillemin E. A., «Sinthesis of Passive Networks», John Wiley and Sons, Inc., New York, 1957.
6. Хемминг Р., «Численные методы для научных сотрудников и инженеров». Пер. с англ. под ред. Гутера Р. Г. «Наука», 1968.
7. Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р., «Теория следящих механизмов». Изд-во иностр. лит-ры., 1953.
8. Jordan O., «Calculus of Finite Differences». Chelsea Publishing Company, New York, 1960.
9. Jury E. I., «Sampled-data Control Systems», John Wiley and Sons, Inc., New York, 1958.
10. Jury E. I. «Theory and Application of the z-Transform Method», John Wiley and Sons, Inc., New York, 1964.
11. Kuo F. K., Kaiser J. F. (eds.), «System Analysis by Digital Computer», chap. 7, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1966.
12. Ланцош К., «Практические методы прикладного анализа». Справочное руководство. Пер. с англ. Кайнера. Под ред. Лопшица А. Физматгиз, 1961.
13. Laplace P. S., «Ouevres Complètes», 1779.
14. Milne-Thomson L. M., «The Calculus of Finite Differences», Macmillan and Co., Ltd., London, 1933.
15. Мишкин Э., Браун Л., «Приспосабливающиеся автоматические системы». Изд-во иностр. лит-ры., 1963.
16. Monroe A. J., «Digital Processes for Sampled Data Systems», John Wiley and Sons, Inc., New York, 1962.
17. Ragazzini J. R., and Franclin G. F., «Sampled-data Control Systems», McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.
18. Storer J. E., «Passive Network Synthesis», McGraw-Hill Book Company, New York, 1957.
19. Sutherland I. E., «Sketchpad: A Man-Machine Graphical Communication System», Proc. Spring Joint Computer Conf., 1963.
20. Tou J. T., «Digital and Sampled-data Control Systems», McGraw-Hill Book Company, New York, 1959.
21. Weinberg L., «Network Analysis and Synthesis», McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.
22. Wilts C. H., «Principles of Feedback Control», pp. 195—220, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1960.

Глава вторая

ДИСКРЕТНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

2.1. МОДЕЛЬ ДИСКРЕТНОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

В § 1.3 мы эвристически описали различные алгоритмы синтеза линейных цифровых систем. Настоящая глава посвящена главным образом теории алгоритмов, основанных на линейных разностных уравнениях, таких, как, например, (1.3) и (1.4). Эти уравнения, которые часто называют *рекурсивными* и *авторегрессивными*, служат отправной точкой для различных способов описания дискретных линейных систем, а именно с помощью частотной характеристики, блок-схем цифровых цепей, геометрической интерпретации в комплексной z-плоскости и с помощью операторного метода z-преобразования. По этим вопросам много материала можно найти в литературе к гл. 1. Кроме того, основополагающий материал читатель может найти в статьях Кайзера [3] и Рэйдера и Голда [4]. Цель настоящей главы состоит главным образом в том, чтобы ознакомить читателя с техническими приемами, необходимыми для понимания остальной части книги.

Теория линейной (аналоговой) цепи базируется на электрических свойствах индуктивностей, емкостей и сопротивлений, которые приводят через законы Кирхгофа к описанию цепей с помощью линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В отличие от этого, теория дискретных или цифровых линейных систем базируется на линейных разностных уравнениях с постоянными коэффициентами, которые могут быть решены с помощью операций над числами на специализированных или универсальных вычислительных машинах. При реализации алгоритма разностного уравнения существенным моментом является то, что входной сигнал представляется в виде совокупности дискретных отсчетов по времени. В этой книге рассматриваются только равноотстоящие отсчеты. Случай неравноотстоящих отсчетов рассмотрен в литературе [2] и выходит за рамки данной книги.

Для многих насущных задач может быть применена модель, показанная на рис. 2.1. В этих задачах сигналы,

подвергаемые обработке, являются аналоговыми (например, выходные сигналы микрофона или сейсмографа), но сама обработка должна быть осуществлена в цифровом виде. Однако не все задачи относятся к этой категории; например, цифровой синтезатор речи не нуждается в аналоговом входном сигнале. На рис. 2.1 для того, чтобы получить последовательность $x(nT)$, аналоговый сигнал

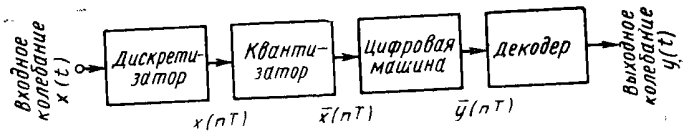


Рис. 2.1. Модель цифровой машины для обработки аналоговых сигналов.

дискретизуется через временные интервалы T. Последствия такого процесса дискретизации можно истолковать различными способами: почти во всей литературе, ссылки на которую приведены в гл. 1, вскрывается их сущность, ее условно можно назвать *наложением* от английских понятий *folding* или *aliasing*, встречающихся в литературе. В терминах, относящихся к частотной области, это означает, что спектр аналогового сигнала повторяется периодически в виде верхнего и нижнего боковых спектров около частот $1/T$, $2/T$, $3/T$ и т. д. Если частота дискретизации взята ниже частоты Найквиста (т. е. если $1/T$ меньше удвоенной ширины полосы сигнала), то соседние спектры перекрываются, вызывая частотные искажения, которые делают невозможным восстановление аналогового сигнала с помощью линейной фильтрации.

Квантизатор на рис. 2.1 является обязательной частью любого современного цифрового процессора. Необходимо подчеркнуть, что эффекты квантования наблюдаются также и внутри цифровой машины, показанной на рис. 2.1. Они встречаются, например, при записи постоянного коэффициента линейного разностного уравнения в виде числа в регистре конечной длины. Такой эффект может считаться статическим в том случае, когда свойства разностного уравнения установлены раз и навсегда. Существуют также динамические эффекты, когда сигналы умножаются на коэффициенты или на другие сигналы и произведение округляется или ограничивается до заданной конечной длины регистра. В этой главе и гл. 3

мы сделаем важное предположение, что подобными ошибками можно пренебречь. В гл. 4 обстоятельно изучаются эти эффекты и показывается, как они влияют на синтез цифровых фильтров.

Если требуется получить выходной сигнал в непрерывной форме, как на рис. 2.1, то отсчеты выходного сигнала $\bar{y}(nT)$ цифровой машины проходят через декодер или затягивающее устройство, которое создает непрерывный сигнал из последовательности импульсов. Вообще говоря, декодер — это преобразователь цифра — аналог, после которого включен линейный аналоговый фильтр, устраняющий лишние частоты, появившиеся в процессе дискретизации. Так, например, если $T=10^{-4}$ *сек*, декодер может быть низкочастотным фильтром с частотой среза 5 *кгц*. В самом простом случае таким фильтром является схема, запоминающая отсчетные значения в паузах между ними.

Исследование непрерывных линейных динамических систем в значительной степени облегчилось благодаря введению операционных методов преобразований Лапласа и Фурье, а также благодаря использованию теории цепей. Точно так же исследованию линейных дискретных систем помогает введение z-преобразования и использование теории цепей. Читателям, знакомым с непрерывными линейными системами, многие теоретические выкладки для дискретных линейных систем покажутся хорошо известными, да они и в самом деле должны казаться такими. Но необходимо помнить, что здесь мы имеем дело с дискретной или цифровой областью, для которой должны быть развиты новые подходы, и попытки распространить на эту область результаты, полученные для аналоговой области, могут привести к серьезным ошибкам.

2.2. ЛИНЕЙНОЕ РАЗНОСТНОЕ УРАВНЕНИЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

В качестве примера простого линейного разностного уравнения первого порядка рассмотрим

$$y(nT)=Ky(nT-T)+x(nT). \tag{2.1}$$

На рис. 2.1 $x(nT)$ представляет собой дискретный входной сигнал. Исключив квантизатор, мы сделаем $\bar{x}(nT)$ равным $x(nT)$, так что $\bar{x}(nT)$ может не рассматривать-

ся. Цифровая машина на рис. 2.1 принимает последовательность $x(nT)$; каждый раз поступает новое входное значение, производится вычисление и образуется выходной сигнал $\bar{y}(nT)$, который подается на декодер или запоминается для дальнейшей обработки в вычислительной машине. Можно легко представить себе структуру машины, которая выполняет операции, требуемые в (2.1). Необходимо иметь три регистра памяти: один для $x(nT)$, другой для $y(nT)$ и третий для K. В машине образуется произведение $Ky(nT-T)$, содержимое регистра для $x(nT)$ суммируется с этим произведением, а результат запоминается в регистре для $y(nT)$. Теперь цифровая машина снова готова к приему следующего входного отсчета.

Сразу после того, как поступит новый входной отсчет (и начинается реализация алгоритма), состояние системы полностью определится числом $y(nT)$ в регистре. Без потери общности можно назвать этим числом $y(-T)$ в предположении, что на цифровую машину должно поступить $x(0)$. Из (2.1) видно, что $y(0)=Ky(-T)+x(0)$, $y(T)=K^2y(-T)+Kx(0)+x(T)$, и по индукции можно определить общий результат:

$$y(nT)=K^{n+1}y(-T)+\sum_{i=0}^{n}K^i x(nT-iT). \qquad (2.2)$$

Таким образом, решение уравнения (2.1) полностью определяется выражением (2.2).

Если входным сигналом на рис. 2.1 является единичная ступенчатая функция, то последовательность $x(nT)$ представляет собой единицу для $n=0, 1, 2, \ldots$ В этом случае (2.2) принимает вид

$$y(nT)=K^{n+1}y(-T)+(1-K^{n+1})/(1-K). \qquad (2.3)$$

Для больших значений n решение стремится к установившемуся значению $y(nT)=1/(1-K)$. Однако это решение справедливо только для $|K|<1$; в противоположном случае, как это можно видеть из (2.2), $y(nT)$ безгранично возрастает.

Рис. 2.2 показывает $y(nT)$ в зависимости от n для различных значений K при $y(-T)=0$. Мы видим сходство между этими кривыми и откликом RC-цепочки на ступенчатую функцию, показанным на рис. 2.3. Сделать $K\geqslant 1$ равносильно введению отрицательного сопротивле-

ния в аналоговую RC-цепочку. В дальнейшем мы убедимся в том, что имеется большое сходство между аналоговыми и цифровыми цепями. Однако оно означает не эквивалентность, а только подобие.

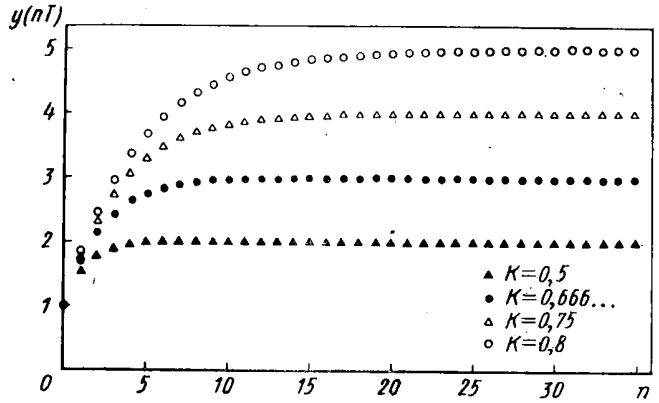


Рис. 2.2. Отклик фильтра первого порядка на ступенчатый входной сигнал.

Удобная иллюстрация вычислений по формуле (2.1) показана на рис. 2.4. Алгоритм вычислений можно объяснить следующим образом: когда поступает новый отсчет данных $x(nT)$, предыдущее вычисленное значение

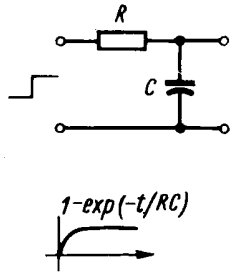


Рис. 2.3. Отклик RC-цепи на ступенчатый входной сигнал.

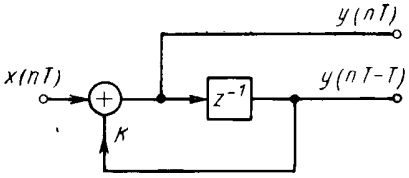


Рис. 2.4. Цифровая цепь первого порядка.

выходного сигнала $y(nT)$ для новой итерации становится $y(nT-T)$. Выполняются умножение и сложение, и результат, вводимый в выходной регистр, становится равным $y(nT)$.

Назовем цепь на рис. 2.4 цифровой, или дискретной цепью, или, если не будет недоразумений, просто цепью.

В этой книге будет обсуждаться и анализироваться много таких цепей, поэтому полезно сделать несколько замечаний об обозначениях. Прямоугольник с z^{-1} внутри будет обозначать блок задержки на время, равное интервалу дискретизации T. Круг со знаком плюс означает сложение всех входных сигналов (стрелки, направленные в круг) с одним выходным сигналом. Умножение на постоянный коэффициент представляется коэффициентом, записанным около линии, изображающей путь сигнала.

Интересно выяснить, какова же будет действительная схемная реализация (2.1). Возьмем несколько регистров: K — для хранения коэффициента K, Y — для хранения $y(nT)$ и X — для хранения $x(nT)$. Затем, при поступлении нового отсчета $x(nT)$ в X, осуществляется операция $Y \times K + X \longrightarrow Y$, и на этом завершается одна итерация.

Таким образом, мы видим, что необходимо иметь три регистра, а также осуществлять операции сложения и умножения. Ясно, что реализация (2.1) является более дорогой по сравнению с пассивной аналоговой цепью, за исключением, может быть, случая работы на очень низких частотах, когда величины емкости становятся большими. Однако если необходимо реализовать несколько, а не одну-единственную цепь, то в каждую из них необходимо ставить два регистра, эквивалентные K и Y, а остальные элементы могут быть общими. Так, если должно быть реализовано 500 цепей и если быстродействие арифметического блока достаточно высокое, то все цепи могут использовать один и тот же сумматор и умножитель. Например, пусть частота дискретизации 100 *гц* и 500 разностных уравнений должны быть обработаны за 10 *мсек*. Тогда упомянутый выше ряд операций должен быть произведен менее чем за 20 *мксек* каждый для того, чтобы получить возможность работать в реальном масштабе времени.

2.3. ЧАСТОТНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЦЕПИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Наиболее ценным является описание нашей простой системы с помощью ее отклика на синусоидальный входной сигнал. Если $x(t)$ на рис. 2.1 принять равным $e^{j\omega T}$, тогда $x(nT) = e^{jn\omega T}$. Отклик на реальный синусоидальный сигнал, скажем $x(t) = \cos\omega t$, может быть всегда найден сложением откликов на входные сигналы $^1/_2 e^{j\omega t}$ и

$^1/_2 e^{-j\omega t}$. Решение (2.1) для входного сигнала $x(nT) = e^{jn\omega T}$ может быть найдено с помощью простой индукции. Здесь мы даем только установившееся решение с начальным условием $y(-T) = 0$. Оно имеет вид

$$y(nT) = \frac{e^{jn\omega T}}{1 - Ke^{-j\omega T}} = \frac{x(nT)\, e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - K}. \qquad (2.4)$$

Как и следовало ожидать, выходной сигнал $y(nT)$ является комплексно экспоненциальным, подобно входно-

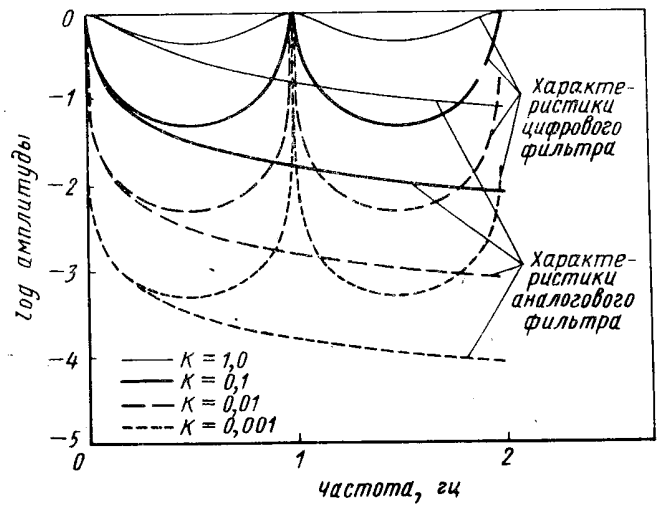


Рис. 2.5. Сравнение частотных характеристик цифрового и аналогового фильтров первого порядка.

му сигналу, но он изменен в соответствии с *передаточной функцией*, которую мы определим как

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{e^{j\omega T}}{e^{j\omega T} - K} = |H|\, e^{j\psi}, \qquad (2.5)$$

где

$$|H| = \frac{1}{(1 + K^2 - 2K\cos\omega T)^{1/2}},$$
$$\psi = \omega T - \operatorname{arctg}\frac{\sin\omega T}{\cos\omega T - K}. \qquad (2.6)$$

Равенства (2.6) выражают частотную избирательность цепи. На рис. 2.5 изображена величина H из (2.6) для различных K и при $T=1$, из которого мы можем определить сходство и различие между цифровой системой и соответствующей аналоговой системой, такой, как RC-цепь с $K=e^{-T/RC}$.

2.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЧАСТОТНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Уравнения (2.5) и (2.6) могут быть интерпретированы геометрически с помощью единичной окружности, показанной на рис. 2.6.

Из (2.5) видно, что $|H|$ есть $1/d$, а $\psi=\omega t-\delta$, так что вектор, соединяющий некоторую точку на окружности (при угле ωT) и критическую точку на действительной оси, полностью определяет передаточную функцию. В дальнейшем мы увидим также, что эта геометрическая картина может быть обобщена для описания линейных цифровых цепей с произвольным числом операций.

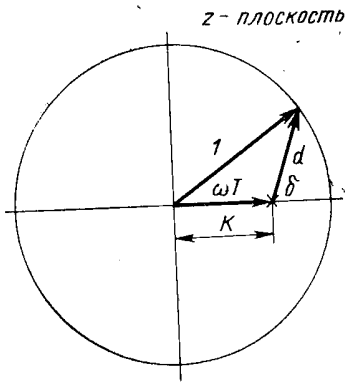


Рис. 2.6. Представление цепи первого порядка в z-плоскости.

2.5. z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

Ранее было показано, что разностное уравнение первого порядка может быть наглядно представлено передаточной функцией, которая характеризует поведение системы в зависимости от частоты при синусоидальном воздействии. Оказалось также возможным изобразить эту передаточную функцию геометрически. Формальным обоснованием для распространения такой интерпретации на обобщенное линейное разностное уравнение является z-преобразование, которое допускает над разностными уравнениями такие же алгебраические действия, какие допускает преобразование Лапласа над дифференциальными уравнениями.

Исследуем кратко свойства z-преобразования, после этого обсудим линейные разностные уравнения с точки зрения цепей и затем применим методы z-преобразования для нахождения обобщенных решений этих уравнений.

Рассмотрим последовательность чисел $x(0)$, $x(T)$, $x(2T)$, ..., $x(nT)$, которая образована при дискретизации непрерывного колебания $x(t)$.

z-преобразование этой последовательности определяется как

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\, z^{-n}, \tag{2.7}$$

где z — комплексная переменная, а $X(z)$ — функция этой комплексной переменной. Поскольку (2.7) — степенной ряд переменной z^{-1}, то обычно возникает вопрос о сходимости такого ряда. Гуревич [1] детально исследовал эту проблему, и ниже будет приведено несколько основных результатов из его работы.

Ряд (2.7) сходится для $|z|>R$ и расходится для $|z|<R$, где радиус сходимости R есть верхний предел последовательности $|x(nT)|^{1/n}$, $n=1, 2, 3, \ldots$ Так, например, если $x(nT)=K^n$, то ряд (2.7) сходится вне окружности радиуса K.

Для $|z|>R$ $X(z)$ есть аналитическая функция z. Таким образом, функция, определенная выражением (2.7)

Таблица 2.1

Название последовательности	Последовательность	z-преобразование последовательности
Единичный импульс	$x(nT)=\begin{cases}1, & n=0;\\ 0, & \lvert n\rvert>0\end{cases}$	$X(z)=1$
Единичный скачок	$x(nT)=\begin{cases}1, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}$	$X(z)=\dfrac{1}{1-z^{-1}}$
Комплексная экспонента	$x(nT)=\begin{cases}e^{jn\omega T}, & n\geqslant 0\\ 0, & n<0\end{cases}$	$X(z)=\dfrac{1}{1-e^{j\omega T}z^{-1}}$

и распространенная на всю z-плоскость с помощью аналитического продолжения, может быть названа z-преобразованием последовательности $x(nT)$. Отсюда следует, что $X(z)$ определяется на всей z-плоскости, а выражение (2.7) справедливо только в области сходимости.

В табл. 2.1 приведены z-преобразования для некоторых наиболее часто встречающихся последовательностей.

2.6. ОБРАТНОЕ z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

По определению, $x(nT)$ есть обратное z-преобразование от $X(z)$. Оно может быть найдено из (2.7) с помощью интегральной теоремы Коши. Сначала умножим обе части (2.7) на z^{k-1}, а затем произведем интегрирование по замкнутому контуру обеих частей равенства. Если контур интегрирования лежит внутри областей сходимости бесконечного ряда (2.7), то операции суммирования и интегрирования можно поменять местами, что даст

$$\oint X(z)\, z^{k-1}\, dz = \sum_{n=0}^{\infty} x(nT) \oint z^{k-n-1}\, dz. \qquad (2.8)$$

Теорема Коши гласит, что если контур интегрирования охватывает начало координат, то $\oint z^{k-n-1}\, dz = 0$ для всех k, за исключением $k=n$. Для $k=n$ интеграл становится равным $2\pi j$. Применяя это к выражению (2.8), получаем теорему об обратном z-преобразовании:

$$x(kT) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)\, z^{k-1}\, dz. \qquad (2.9)$$

Пусть $x(nT) = K^n$. Тогда $X(z) = 1/(1-Kz^{-1}) = z/(z-K)$. Для подтверждения того факта, что $x(nT)$ есть обратное z-преобразование от $X(z)$, применим (2.9), выполняя интегрирование вдоль окружности радиуса, большего, чем K. Это дает:

$$x(nT) = \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{z^n dz}{z-K}. \qquad (2.10)$$

Уравнение (2.10) решается с помощью теоремы о вычетах, дающей $x(nT) = K^n$, если контур интегрирования охватывает полюс при $z=K$. Таким образом, подходящим контуром является окружность C_1 радиусом $K+\varepsilon$, показанная на рис. 2.7, где ε может быть взято как угодно малым. Однако в этом случае может быть также использован контур C_2 или любой другой контур, охватывающий полюс.

Если $K>1$, то согласно изложенному в § 2.5 область сходимости лежит вне единичной окружности на комплексной z-плоскости. В большинстве случаев последовательность $x(nT) = K^n$ не представляет физического интереса при $K>1$, поскольку такая последовательность безгранично растет с ростом n и может быть классифицирована как неустойчивая. Таким образом, единичная окружность будет наименьшей окружностью на z-плоскости из тех, что находятся внутри области сходимости для всех устойчивых последовательностей вида K^n. Это свойство единичной окружности может быть распространено на все другие устойчивые последовательности, и этим объясняется широкое применение единичной окружности как контура интегрирования для обратного z-преобразования.

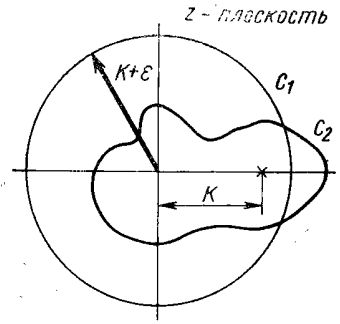


Рис. 2.7. Возможные контуры интегрирования для обратного z-преобразования.

2.7. ТЕОРЕМА О СВЕРТКЕ

Пусть $X(z)$ есть z-преобразование от $x(nT)$, а $H(z)$ есть z-преобразование от $h(nT)$. Тогда покажем, что если $Y(z) = X(z)H(z)$ есть z-преобразование от $y(nT)$, то

$$y(nT) = \sum_{m=0}^{n} x(mT)\, h(nT-mT) = \sum_{m=0}^{n} x(nT-mT)\, h(mT). \qquad (2.11)$$

Простой путь доказательства этого соотношения заключается в применении метода индукции при исследовании произведения

$$X(z)H(z)=[x(0)+x(T)z^{-1}+x(2T)z^{-2}+\ \ldots]\times$$
$$\times[h(0)+h(T)z^{-1}+h(2T)z^{-2}+\ \ldots]=$$
$$=x(0)h(0)+z^{-1}[x(0)h(T)+x(T)h(0)]+$$
$$+z^{-2}[x(0)h(2T)+x(T)h(T)+x(2T)h(0)]+\ \ldots=$$
$$=y(0)+z^{-1}y(T)+z^{-2}y(2T)+z^{-3}y(3T)+\ \ldots \tag{2.12}$$

Читатель может доказать, что (2.11) справедливо, приравняв в (2.12) коэффициенты при равных степенях z^{-1}.

Теорема о свертке, как и в аналоговом случае, может быть принята как определяющее уравнение для линейных дискретных систем. Рис. 2.8 иллюстрирует вычисление по формуле (2.11). Пунктирная кривая представляет $h(nT-mT)$, а непрерывная кривая представляет

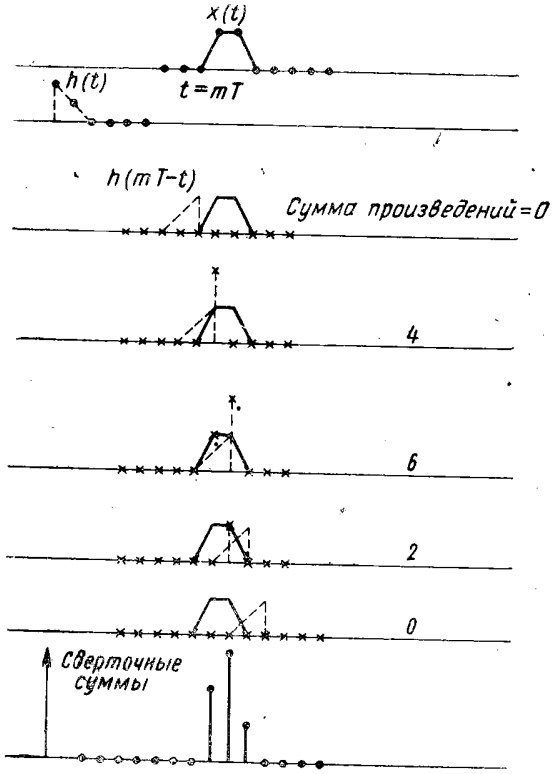


Рис. 2.8. Иллюстрация свертки [xxx обозначают точки на кривой $x(t)h(mT-t)$].

$x(mT)$. Сумма всех почленных произведений двух последовательностей от $m=0$ до $m=n$ есть сверточная сумма, определяемая средним выражением (2.11).

Если $h(nT)$ представляет собой отклик линейной дискретной цепи на единичный импульс (первая строка в табл. 2.1), то (2.11) определяет отклик этой цепи на произвольный входной сигнал $x(nT)$.

2.8. ТЕОРЕМА О КОМПЛЕКСНОЙ СВЕРТКЕ

В § 2.7 было показано, что произведение двух z-преобразований соответствует свертке последовательностей. В этом параграфе мы рассмотрим z-преобразование произведения двух последовательностей. Пусть

$$U(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\,y(nT)\,z^{-n} \tag{2.13}$$

и $X(z)$ есть z-преобразование от $x(nT)$, а $Y(z)$ есть z-преобразование от $y(nT)$. Следовательно,

$$y(nT)=\frac{1}{2\pi j}\oint Y(v)\,v^{n-1}\,dv,$$
$$x(nT)=\frac{1}{2\pi j}\oint X(v)\,v^{n-1}\,dv. \tag{2.14}$$

В соответствии с § 2.6 выберем контур интегрирования в виде единичной окружности. Тогда будем иметь

$$U(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\,z^{-n}\,\frac{1}{2\pi j}\oint Y(v)\,v^{n-1}\,dv.$$

Поменяв местами операции интегрирования и суммирования и рассматривая результирующее суммирование как z-преобразование, приходим к выражению

$$U(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint Y(v)\,X\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}\,dv. \tag{2.15}$$

Равенство (2.15) иногда называется теоремой о комплексной свертке. То, что оно в самом деле имеет форму свертки, можно продемонстрировать, если использовать

условие, что контур интегрирования есть единичная окружность, и сделать подстановки

$$v = e^{j\theta}, \quad z = re^{j\varphi}.$$

В результате получаем

$$U(re^{j\varphi}) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Y(e^{j\theta})\, X(re^{j(\varphi-\theta)})\, d\theta. \qquad (2.16)$$

Интересным является частный случай выражения (2.15), когда $x(nT) = y(nT)$ и $z=1$. Используя (2.13) и (2.14), мы придем к выражению

$$\sum_{n=0}^{\infty} y^2(nT) = \frac{1}{2\pi j}\oint Y(v)\, Y\left(\frac{1}{v}\right) v^{-1}\, dv, \qquad (2.17)$$

которое позволяет выразить среднеквадратическое значение сигнала через его z-преобразование. Эти соотношения, как мы увидим в гл. 4, используются при изучении шума. Внимательный читатель может заметить, что если $Y(v)$ имеет полюса внутри единичной окружности, то $Y(1/v)$ имеет полюса вне единичной окружности, так что вопрос об интегрировании должен быть тщательно исследован. Поскольку этот вопрос тесно соприкасается с проблемой двустороннего z-преобразования, то мы несколько отложим дальнейшее его обсуждение.

2.9. РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Возвращаясь теперь к уравнению первого порядка (2.1), применим для его решения z-преобразование. Умножая обе части (2.1) на z^{-n} и суммируя в пределах от нуля до бесконечности, получаем

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(nT)\, z^{-n} = K\sum_{n=0}^{\infty} y(nT-T)\, z^{-n} + \sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\, z^{-n}. \qquad (2.18)$$

Используя определение z-преобразования (2.7) и подстановку $m=n-1$ в первом члене правой части (2.18), получим

$$Y(z) = Kz^{-1}Y(z) + Ky(-T) + X(z) \qquad (2.19)$$

или

$$Y(z) = \frac{X(z)}{1-Kz^{-1}} + \frac{Ky(-T)}{1-Kz^{-1}}. \qquad (2.20)$$

С помощью обратной теоремы (2.9) можно теперь найти явное решение для $y(nT)$ при условии, что предварительно было найдено для заданной входной последовательности $x(nT)$ выражение для $X(z)$ в замкнутой форме.

Например, если $x(nT) = e^{jn\omega T}$, то из табл. 2.1 имеем $X(z) = 1/(1-e^{j\omega T}z^{-1})$ и

$$y(nT) = \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{z^{n+1}}{z-e^{j\omega T}}\,\frac{dz}{z-K} + \frac{Ky(-T)}{2\pi j}\oint \frac{z^n dz}{z-K}, \qquad (2.21)$$

где полагаем, что кривая интегрирования представляет собой окружность с радиусом, большим единицы на произвольную малую величину.

Результатом интегрирования (2.21) является

$$y(nT) = \frac{K^{n+1}}{K-e^{j\omega T}} + \frac{e^{j(n+1)\omega T}}{e^{j\omega T}-K} + y(-T)\, K^{n+1}. \qquad (2.22)$$

Для $K<1$ первый и третий члены выражения (2.22) убывают по экспоненциальному закону с увеличением n. Средний член соответствует установившемуся значению отклика системы на экспоненциальный входной сигнал и имеет вид, идентичный решению (2.4).

2.10. РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Исследование уравнения второго порядка, описывающего явление резонанса, позволяет лучше понять свойства частотной избирательности дискретной системы. Рассмотрим уравнение

$$y(nT) = K_1 y(nT-T) + K_2 y(nT-2T) + x(nT) \qquad (2.23)$$

с начальными условиями $y(-T)=y(-2T)=0$. Применяя z-преобразование, получим

$$Y(z)=\frac{X(z)}{1-z^{-1}K_1-z^{-2}K_2}=\frac{z^2X(z)}{z^2-K_1z-K_2}=H(z)\,X(z), \tag{2.24}$$

где $H(z)$ зависит полностью от параметров цепи и может рассматриваться как системная функция. Если в качестве входного сигнала принять единичный импульс (первая строка в табл. 2.1), то $X(z)=1$ и $y(nT)$ можно найти с помощью обратного z-преобразования:

$$y(nT)=\frac{1}{2\pi j}\oint\frac{z^{n+1}\,dz}{(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)}, \tag{2.25}$$

где

$$\gamma_{1,2}=\frac{K_1}{2}\pm\sqrt{\frac{K_1^2}{4}+K_2}.$$

Из (2.25) получим

$$y(nT)=\frac{1}{\gamma_1-\gamma_2}(\gamma_1^{n+1}-\gamma_2^{n+1}). \tag{2.26}$$

Наиболее интересным случаем является условие $K_1^2/4+K_2<0$, когда γ_1 и γ_2 становятся комплексными числами $\gamma_1=re^{jbT}$ и $\gamma_2=re^{-jbT}$, $r^2=-K_2$ и $2r\cos bT=K_1$. Подставляя их в (2.26), получаем

$$y(nT)=\frac{r^n}{\sin bT}\sin(n+1)\,bT. \tag{2.27}$$

Уравнение (2.27) представляет синусоиду с амплитудой, затухающей до нуля по закону показательной функции и одновременно колеблющейся с угловой частотой b, выражаемой в радианах. Действительно, полученный результат является дискретным вариантом отклика простой RLC резонансной схемы на импульс. Поэтому можно ожидать, что частотно-избирательные свойства уравнения (2.23) будут аналогичны свойствам RLC-схемы. Правильность этого заключения можно проверить, подставляя синусоидальное колебание $x(nT)=\cos n\omega_0T$ в (2.23). В этом случае можно показать, что установившаяся

часть выражения для выходного сигнала $y(nT)$ определяется таким образом:

$$y(nT)=|H|\cos(n\omega_0T+\psi),$$

где комплексная функция $|H|e^{j\psi}$ в точности равна $[H(z)]_{z=e^{j\omega_0T}}$, введенной в (2.24), и, таким образом, является функцией, зависящей от частоты. Из (2.24), используя значения корней из (2.25), можно записать выражение

$$H(e^{j\omega T})=\frac{e^{2j\omega T}}{(e^{j\omega T}-\gamma_1)(e^{j\omega T}-\gamma_2)}, \tag{2.28}$$

которое может быть непосредственно интерпретировано геометрически с помощью рис. 2.9 в виде величины, пропорциональной векторному отношению u^2/d_1d_2. Заметим, что приближение точки P к полюсу γ_1 вызывает уменьшение расстояния d_1 и увеличение величины $|H|$. Мы видим, что резонанс наблюдается тем отчетливее, чем ближе расположены полюсы к единичной окружности. Явные выражения для $|H|$ и ψ можно найти непосредственно из рис. 2.9:

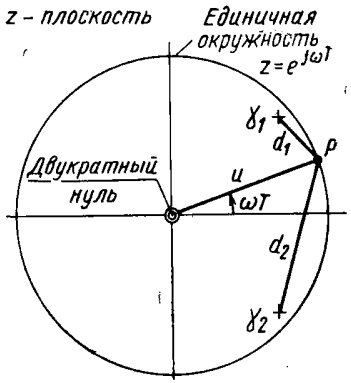


Рис. 2.9. Представление цифрового фильтра второго порядка в z-плоскости.

$$|H|=[(1-K_1\cos\omega T-K_2\cos 2\omega T)^2+$$
$$+(K_1\sin\omega T+K_2\sin 2\omega T)^2]^{-1/2}, \tag{2.29}$$
$$\psi=-\operatorname{arctg}\frac{K_1\sin\omega T+K_2\sin 2\omega T}{1-K_1\cos\omega T-K_2\cos 2\omega T}.$$

На рис. 2.10 представлена зависимость $|H|$ от частоты для $T=10^{-4}$, резонансной частоты 1 500 *гц* и нескольких значений r. Амплитуда $|H|$ и фаза ψ должны быть периодическими по ωT; это следует из начального допущения о дискретности входного сигнала и проявляется в том, что для представления на z-плоскости используется единичная окружность. Из (2.27) также ясно, что для $r>1$ система является неустойчивой.

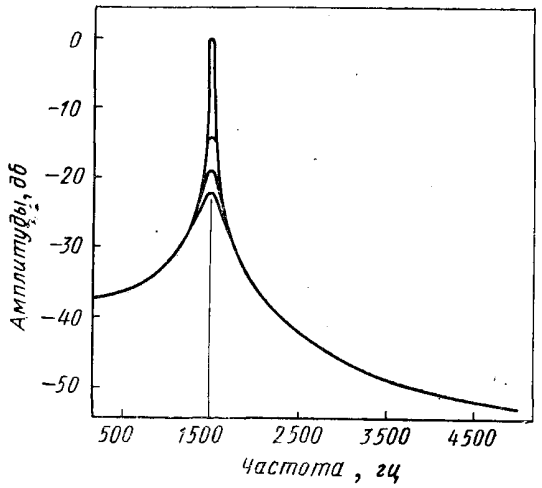


Рис. 2.10. Частотная характеристика цифрового резонатора для нескольких постоянных затухания.

2.11. ДВУСТОРОННЕЕ z-ПРЕОБРАЗОВАНИЕ

До сих пор обсуждение ограничивалось «каузальной» дискретной линейной системой, т. е. системой, которая не может дать отклик прежде, чем на ее входе появится возбуждающий сигнал. Это ограничение в неявном виде присутствует в разностных уравнениях, в которых выход всегда является функцией предыдущих и никогда не является функцией будущих выходных сигналов. Введенное ранее понятие частотной характеристики часто помогает снимать ограничения, накладываемые каузальностью. Например, фильтр с прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой и линейной фазой в полосе пропускания является полезным математическим объектом, который можно вводить в систему, несмотря на то, что он физически нереализуем. Такие фильтры легко описываются для дискретных задач с помощью двустороннего z-преобразования.

Вместо определения (2.7) введем двустороннее z-преобразование следующим образом:

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT)\,z^{-n}, \qquad (2.30)$$

которое также можно записать в виде

$$X(z)=\sum_{n=0}^{\infty} x(nT)\,z^{-n}+\sum_{n=0}^{\infty} x(-nT)\,z^{n}-x(0). \qquad (2.31)$$

Первая сумма в (2.31) представляет собой одностороннее z-преобразование, которое сходится для $|z|>R_1$, где R_1 — верхний предел последовательности $[x(nT)]^{1/n}$. Вторая сумма сходится для $|z|<R_2$, где R_2 — верхний предел последовательности $[x(-nT)]^{-1/n}$. Например, если $x(nT)=K|^{n}|$, то двустороннее z-преобразование имеет кольцо сходимости, показанное на рис 2.11.

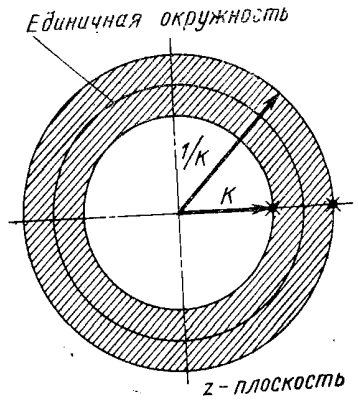


Рис. 2.11. Допустимая область интегрирования для обращения двустороннего z-преобразования.

Обратную теорему можно получить в соответствии с методикой § 2.6, что приводит к точно такой же формуле, что и (2.9). Интегрирование можно выполнять вдоль единичной окружности, если при этом удовлетворяются определенные выше условия сходимости.

Пример. Для данного дискретного линейного фильтра с амплитудно-частотной характеристикой, показанной на рис. 2.12, и нулевым фазовым сдвигом на всех частотах найти весовую функцию, которая понимается как отклик на единичный импульс при $n=0$.

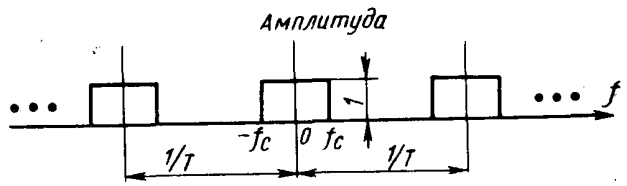


Рис. 2.12. «Идеальная» прямоугольная частотная характеристика цифрового фильтра.

Используя (2.9) с $H(z)=X(z)$ и $h(kT)=x(kT)$ и полагая $z=e^{j\omega T}$, получаем

$$h(kT)=\frac{T}{2\pi}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{jk\omega T}\,d\omega=\frac{\sin k\omega_c T}{k\pi}.$$

Заметим, что $h(kT)$ является четной функцией kT. Это всегда верно, если фазовый сдвиг цепи взят равным нулю. Если фильтр имеет линейную фазу, можно показать, что импульсная характеристика будет такой, как на рис. 2.13 (без учета смещения по времени).

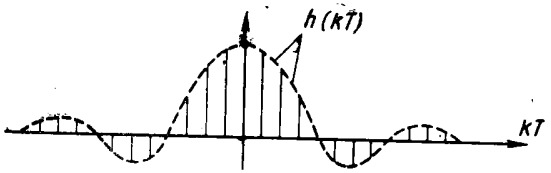


Рис. 2.13. Отклик фильтра с прямоугольной характеристикой на единичный импульс.

2.12. ЦЕПИ ДЛЯ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Разностное уравнение второго порядка

$$y(nT)=K_1y(nT-T)+K_2y(nT-2T)+x(nT)-Lx(nT-T) \tag{2.32}$$

соответствует цепи, изображенной на рис. 2.14.

z-преобразование для (2.32) выражается формулой

$$Y(z)=\frac{X(z)(1-Lz^{-1})}{1-K_1z^{-1}-K_2z^{-2}}=H(z)X(z). \tag{2.33}$$

Цепь с характеристикой $H(z)$ имеет нуль и два полюса. Из рис. 2.14 можно видеть, что нуль формируется элементами задержки в прямой ветви, т. е. задержкой входного сигнала, в то время как полюсы формируются задержками в ветви обратной связи с выхода. Другая эквивалентная цепь с характеристикой $H(z)$ может быть получена путем перестановки местами прямой ветви и ветви обратной связи, как это показано на рис. 2.15.

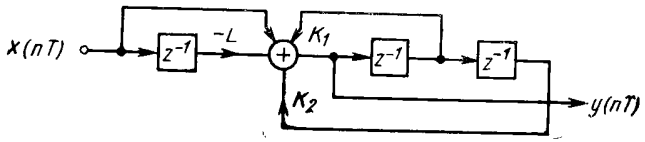


Рис. 2.14. Прямая форма цифровой цепи с двумя полюсами и одним нулем.

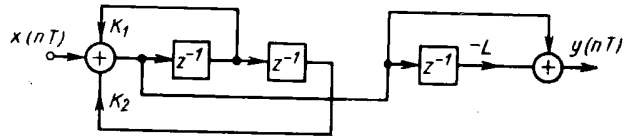


Рис. 2.15. Другая форма цифровой цепи с двумя полюсами и одним нулем.

Третья цепь с характеристикой $H(z)$, эквивалентная цепям на рис. 2.14 и 2.15, показана на рис. 2.16. Этот вариант легко получается из рис. 2.15, если обратить внимание на то, что крайний справа элемент задержки на рис. 2.15 является лишним, так как на его вход поступает тот же сигнал, что и на первый элемент задержки.

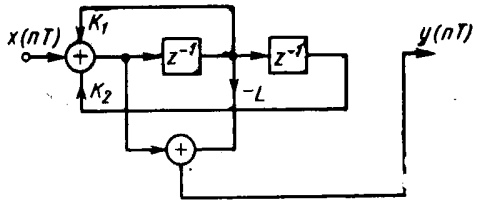


Рис. 2.16. Каноническая форма цепи с двумя полюсами и одним нулем.

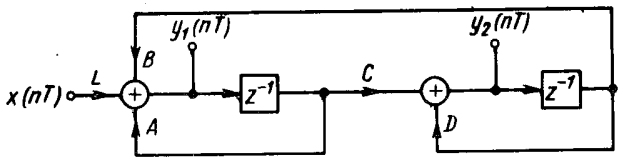


Рис. 2.17. Связанная форма двухполюсной цепи.

Цепь рис. 2.16 называется *канонической*, потому что в ней задержки используются для формирования и нулей, и полюсов, и, таким образом, эта система имеет минимальное число элементов задержки для цепи данного порядка, т. е. *n задержек* для цепи *n-го порядка*. Ниже будет показано, что, хотя все схемы от рис. 2.14 до рис. 2.16 производят идентичные z-преобразования, их поведение при наличии шума, вызванного ошибкой округления при умножении, различно.

Еще одна реализация системы второго порядка с двумя полюсами показана на рис. 2.17. Эта цепь описывается системой двух уравнений:

$$\begin{aligned} y_1(nT)&=Ay_1(nT-T)+By_2(nT-T)+Lx(nT),\\ y_2(nT)&=Cy_1(nT-T)+Dy_2(nT-T). \end{aligned} \tag{2.34}$$

Можно взять z-преобразования обоих уравнений и затем получить явные выражения для $Y_1(z)$ и $Y_2(z)$:

$$Y_1(z)=\frac{LX(z)(1-Dz^{-1})}{1-(A+D)z^{-1}+(AD-BC)z^{-2}},$$

$$Y_2(z)=\frac{LCX(z)}{1-(A+D)z^{-1}+(AD-BC)z^{-2}}. \qquad (2.35)$$

Легко установить, что $Y_1(z)$ и $Y_2(z)$ соответствуют цепям с полюсами, имеющими радиальное расстояние $r=(AD-BC)^{1/2}$ от центра единичной окружности и углы, равные $\pm\arccos(A+D)/2r$. Выражение $Y_2(z)$ имеет двукратный нуль в точке $z=0$, а $Y_1(z)$ имеет два нуля на действительной оси в точках $z=D$ и $z=0$. Таким образом, выходные сигналы $y_1(nT)$ и $y_2(nT)$ полностью совпадают с аналогичными сигналами в ранее описанных системах второго порядка. Эта система кажется более сложной, так как требуется выполнять четыре операции умножения вместо двух или трех, но тем не менее она представляет интерес. Как будет показано в гл. 4, дополнительные возможности для выбора параметров часто бывают полезными при расчете фильтра, когда стремятся уменьшить вредное влияние квантования параметров, с тем чтобы уменьшить длину слова при аппаратурной реализации.

Из описанных цепей можно составить более сложные системы путем образования из них последовательной, параллельной или смешанной (последовательно-параллельной) комбинаций. Например, два уравнения

$$y_1(nT)=K_{11}y_1(nT-T)+K_{12}y_1(nT-2T)+L_{11}x(nT),$$
$$y_2(nT)=K_{21}y_2(nT-T)+K_{22}y_2(nT-2T)+L_{21}y_1(nT) \qquad (2.36)$$

соответствуют последовательному включению (рис. 2.18,*а*), поскольку сигнал $y_1(nT)$ на выходе цепи, описываемой первым уравнением, используется в качестве входного сигнала цепи, описываемой вторым уравнением. Аналогично, уравнения

$$y_1(nT)=K_{11}y_1(nT-T)+K_{12}y_1(nT-2T)+L_{11}x(nT),$$
$$y_2(nT)=K_{21}y_2(nT-T)+K_{22}y_2(nT-2T)+L_{21}x(nT), \qquad (2.37)$$
$$y_3(nT)=y_1(nT)+y_2(nT)$$

соответствуют параллельному включению, представленному на рис. 2.18,*б*. Последовательное соединение цифро-

вых цепей обеспечивает естественную развязку одной цепи от другой, в отличие от непрерывных систем, где требуются специальные и противоестественные разделительные усилители, предотвращающие взаимодействие между соседними RLC-цепями. Это объясняет до некото-

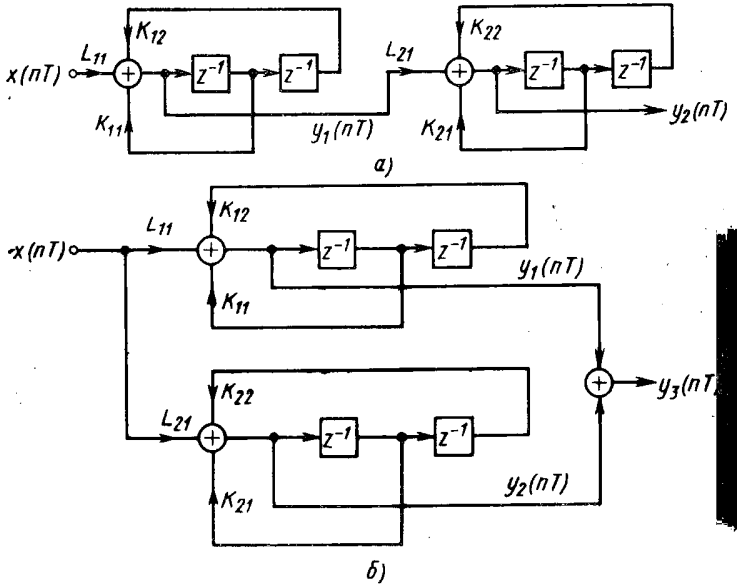


Рис. 2.18. Последовательная или каскадная (*а*) и параллельная (*б*) формы цифровых цепей.

рой степени, почему при расчете RLC-цепей особое внимание уделяется физической реализации, что, в свою очередь, вызвало необходимость создания весьма изящной и довольно сложной теории синтеза. Такая теория представляется ненужной для расчета дискретных фильтров.

2.13. РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ m-го ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Разностное уравнение m-го порядка в общем случае имеет вид

$$y(nT)=\sum_{i=0}^{r}L_ix(nT-iT)-\sum_{i=1}^{m}K_iy(nT-iT). \qquad (2.38)$$

Форма уравнения (2.38) подчеркивает итеративный характер разностного уравнения: если известны m предыдущих выходных значений $y(nT-T)$, $y(nT-2T)$ и т. д. и $r+1$ предыдущих входных значений $x(nT)$, $x(nT-T)$ и т. д., то можно вычислить новое выходное значение. Наглядное представление о выражении (2.38) дает рис. 2.19.

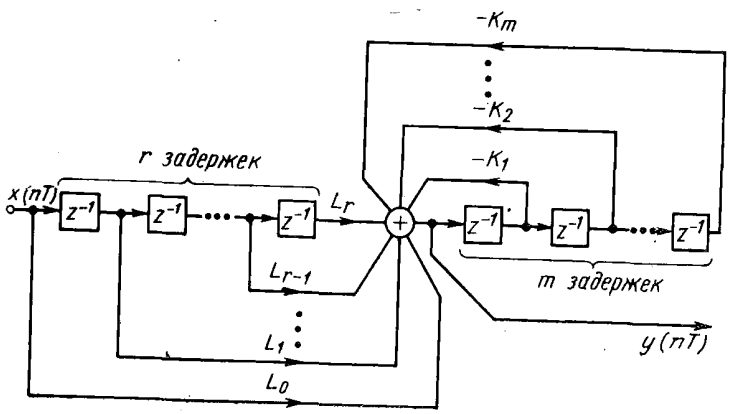


Рис. 2.19. Прямая форма цепи m-го порядка.

z-преобразование можно использовать для получения общего решения для $y(nT)$ как функции входной последовательности и параметров цепи. Для этого предположим, что в начальный момент система находится в покое, так что, когда начинается итерация, все x и y уравнения (2.38) равны нулю. Если (2.38) переписать в виде

$$\sum_{i=0}^{m} K_i y(nT-iT) = \sum_{i=0}^{r} L_i x(nT-iT), \quad K_0 = 1, \quad (2.39)$$

и взять z-преобразование от обеих частей равенства, то получим

$$\sum_{i=0}^{m} K_i \sum_{n=0}^{\infty} y(nT-iT) z^{-n} = \sum_{i=0}^{r} L_i \sum_{n=0}^{\infty} x(nT-iT) z^{-n}. \quad (2.40)$$

Поскольку z-преобразование последовательности, задержанной на i отсчетов, если начальные значения равны нулю, равно z-преобразованию исходной последовательности, умноженному на z^{-i}, то выражение (2.40) приводится к виду

$$Y(z) \sum_{i=0}^{m} K_i z^{-i} = X(z) \sum_{i=0}^{r} L_i z^{-i}$$

или

$$Y(z) = X(z) \frac{\sum_{i=0}^{r} L_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^{m} K_i z^{-i}} = X(z) H(z). \quad (2.41)$$

Таким образом, $Y(z)$ явно определяется как произведение z-преобразования входной последовательности $X(z)$ на системную функцию $H(z)$, которая представляет собой рациональную дробь относительно z^{-1} и является функцией постоянных коэффициентов исходного разностного уравнения. Явное выражение для выходного сигнала $y(nT)$ можно получить с помощью обратного z-преобразования.

Пусть в качестве входной последовательности выбрана

$$x(nT) = \begin{cases} 1 & \text{для } n=0, \\ 0 & \text{для } n \neq 0. \end{cases}$$

Тогда $X(z)=1$. Ясно, что откликом на такой входной сигнал будет обратное z-преобразование от $H(z)$. Поэтому последовательность 1, 0, 0, ... в теории цифровых цепей играет такую же роль, как дельта-импульс в теории непрерывных фильтров. Обратное z-преобразование от $H(z)$ будем называть импульсной характеристикой цифрового фильтра.

Из (2.41) можно также вывести каноническую форму разностного уравнения m-го порядка. Определяя промежуточную последовательность $w(nT)$ с помощью соответствующего z-преобразования $W(z)$, такого, что

$$W(z) = \frac{X(z)}{\sum_{i=0}^{m} K_i z^{-i}},$$

$$Y(z) = W(z) \sum_{i=0}^{r} L_i z^{-i}, \quad (2.42)$$

получим из (2.42) систему разностных уравнений

$$w(nT) = x(nT) - \sum_{i=1}^{m} K_i w(nT - iT),$$

$$y(nT) = \sum_{i=0}^{r} L_i w(nT - iT), \qquad (2.43)$$

которые ведут к канонической форме, показанной на рис. 2.20.

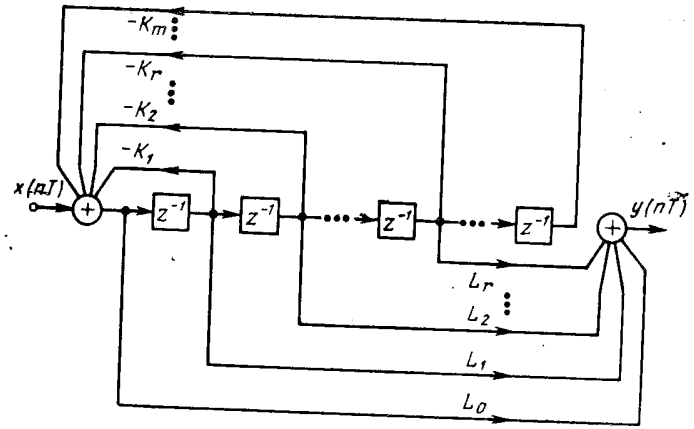


Рис. 2.20. Каноническая форма цепи m-го порядка.

Первостепенное значение системной функции $H(z)$ для теории фильтров состоит в том, что она интерпретируется как функция частотной избирательности. Положим, что входным сигналом является дискретизованное комплексное экспоненциальное колебание

$$x(nT) = e^{jn\omega T}. \qquad (2.44)$$

Решение для $y(nT)$ выражения (2.38) для такого входного сигнала можно записать в виде

$$y(nT) = F(e^{j\omega T})\, e^{jn\omega T}. \qquad (2.45)$$

Подставляя (2.45) и (2.44) в (2.38), быстро приходим к результату

$$F(e^{j\omega T}) = \frac{\sum_{i=0}^{r} L_i e^{-ji\omega T}}{\sum_{i=0}^{m} K_i e^{-ji\omega T}} = H(e^{j\omega T}). \qquad (2.46)$$

2.14. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ СИСТЕМНОЙ ФУНКЦИИ

Мы видим, что системная функция $H(z)$ из (2.41) может интерпретироваться как частотная характеристика для значений z на *единичной окружности* в комплексной z-плоскости. Заметим, что угловая частота ω — непрерывно изменяющаяся величина, и поэтому физический смысл частотной характеристики тот же, что и для непрерывных систем. Кроме того, системная функция представляет собой рациональную дробь, числитель и знаменатель которой могут быть разложены на множители так, что $H(z)$ с точностью до постоянного множителя однозначно определяется положением ее полюсов и нулей в z-плоскости, а ее значение в любой точке z определяется расстояниями от этой точки до особых точек. Таким образом, мы прямо подходим к геометрической интерпретации, согласно которой значение частотной характеристи-

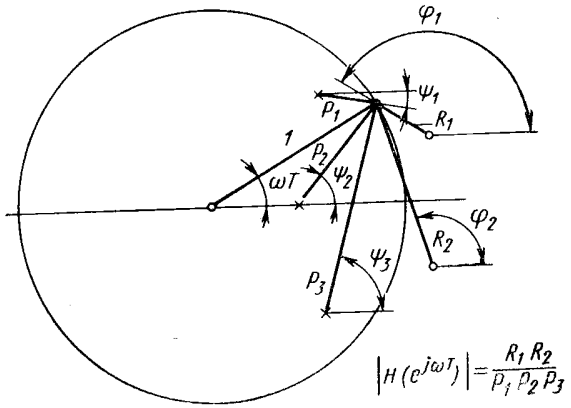


Рис. 2.21. Геометрическая интерпретация частотной характеристики цифровой цепи.

ки для любой частоты ω получается путем перемещения по дуге окружности на угол ωT, измерения расстояний до нулей R_1, R_2, ..., расстояний до полюсов P_1, P_2, ... и составления отношения вида

$$|H(e^{j\omega T})| = \frac{R_1 R_2}{P_1 P_2 P_3} \qquad (2.47)$$

(см. пример на рис. 2.21).

$H(e^{j\omega T})$ определяется также своей фазой, которая равна

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - (\psi_1 + \psi_2 + \psi_3). \qquad (2.48)$$

Таким образом, геометрическая основа расчета цифровых фильтров в принципе идентична геометрической основе расчета непрерывных фильтров со следующим единственным, но важным различием: в случае непрерывных фильтров частота измеряется по мнимой оси комплексной s-плоскости, тогда как в случае цифровых фильтров она измеряется по дуге единичной окружности в z-плоскости.

2.15. ДИСКРЕТНЫЕ ЦЕПИ С НЕНУЛЕВЫМИ НАЧАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Общие выкладки в § 2.13 относятся к системе, приведенной сначала в нулевое состояние. Это значит, что все выходные регистры, в которых хранятся $y(nT)$, $y(nT-T)$ и т. д., устанавливаются в нуль, прежде чем начинается итерация. Это ограничение не вызывает потери общности при описании методов расчета фильтра в следующей главе, так как наш критерий расчета фильтра базируется в конечном счете на амплитудной функции, которая представляет собой отклик фильтра в установившемся режиме на синусоидальный входной сигнал. Однако если представляют интерес переходные процессы, то необходимо рассматривать начальные условия.

В качестве примера рассмотрим уравнение (2.32) и допустим, что $y(-T)$ и $y(-2T)$ имеют ненулевые значения. Взяв z-преобразование от обеих частей (2.32), получим

$$Y(z) = K_1 \sum_{n=0}^{\infty} y(nT-T) z^{-n} + K_2 \sum_{n=0}^{\infty} y(nT-2T) z^{-n} + X(z) - Lz^{-1} X(z). \qquad (2.49)$$

Теперь, если $m = n-1$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(nT-T) z^{-n} = z^{-1} \sum_{m=-1}^{\infty} y(mT) z^{-m} = y(-T) + z^{-1} Y(z),$$

и если $m = n-2$, то

$$\sum_{n=0}^{\infty} y(nT-2T) z^{-n} = z^{-2} \sum_{m=-2}^{\infty} y(mT) z^{-m} = y(-2T) + z^{-1} y(-T) + z^{-2} Y(z).$$

Выражение (2.49) можно привести к виду

$$Y(z) = \frac{X(z)(1 - Lz^{-1}) + y(-T)(K_1 + z^{-1}K_2) + K_2 y(-2T)}{1 - K_1 z^{-1} - K_2 z^{-2}}. \qquad (2.50)$$

Отсюда видно, что $Y(z)$ содержит частное решение, вызванное входным сигналом, и переходное решение, вызванное начальными условиями и затухающее в конце концов до нуля во всех случаях, когда полюсы $Y(z)$ лежат внутри единичной окружности.

2.16. ДРУГАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ m-го ПОРЯДКА

Уравнение (2.41) представляет собой отношение двух полиномов относительно переменной z^{-1} или z. Хорошо известно, что эту рациональную дробь можно представить либо в виде произведения сомножителей, либо в виде суммы простых дробей. Так как полюсы и нули $H(z)$ должны лежать на реальной оси или составлять комплексно-сопряженные пары, то $H(z)$ из (2.41) можно записать с помощью любой из двух формул:

$$H(z) = \frac{\prod_{i=1}^{r_1} (z^2 + a_i z + b_i) \prod_{i=1}^{r_2} (z - e_i)}{\prod_{i=1}^{m_1} (z^2 + c_i z + d_i) \prod_{i=1}^{m_2} (z - z_i)} \qquad (2.51)$$

или
$$H(z)=\sum_{i=1}^{m_1}\frac{z(A_iz+B_i)}{z^2+C_iz+D_i}+\sum_{i=1}^{m_2}\frac{zF_i}{z-z_i}. \qquad (2.52)$$

Уравнение (2.51) можно физически интерпретировать как *каскадное* соединение систем второго и первого порядка, а уравнение (2.52) — как параллельное соединение систем первого и второго порядка. В данном случае мы умышленно уклоняемся от общности; например, наличие кратных полюсов потребует более сложного разложения (2.41). Существенным моментом (полностью аналогичным положению для непрерывных фильтров) является то, что любая система m-го порядка может быть представлена в виде каскадного или параллельного соединения (или комбинации из этих соединений) цепей, порядок которых не превышает 2. Для того чтобы отыскать эти каскадные или параллельные представления, требуется определить корни полиномов m-го и r-го порядков в выражении (2.41). В большинстве случаев оказывается желательным реализовать данную цепь с помощью каскадных или параллельных комбинаций систем второго порядка потому, что такие реализации менее чувствительны к вредным эффектам, связанным с конечной длиной регистров. Этот важный вопрос обсуждается ниже, в гл. 4.

Другая структура системы m-го порядка определяется системой уравнений:

$$\begin{aligned}
y_1(nT)&=A_{11}y_1(nT-T)+A_{12}y_2(nT-T)+\\
&+\ldots+A_{1m}y_m(nT-T)+x(nT),\\
y_2(nT)&=A_{21}y_1(nT-T)+A_{22}y_2(nT-T)+\\
&+\ldots+A_{2m}y_m(nT-T), \qquad (2.53)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_m(nT)&=A_{m1}y_1(nT-T)+A_{m2}y_2(nT-T)+\\
&+\ldots+A_{mm}y_m(nT-T).
\end{aligned}$$

Можно перейти к z-преобразованиям в этой системе линейных уравнений и найти полюсы, решив уравнение для детерминанта

$$\begin{Vmatrix} A_{11}-z & A_{12} & \ldots & A_{1m}\\ A_{21} & A_{22}-z & \ldots & A_{2m}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mm}-z \end{Vmatrix}=0, \qquad (2.54)$$

или, что эквивалентно, найдя собственные значения матрицы $|A_{ij}|$. Следует заметить, что система m-го порядка в общем случае определяется m^2 коэффициентами. На рис. 2.22 показан несколько менее общий случай для $m=3$, когда взаимосвязаны только соседние схемы, что соответствует матрице, у которой только главная и две

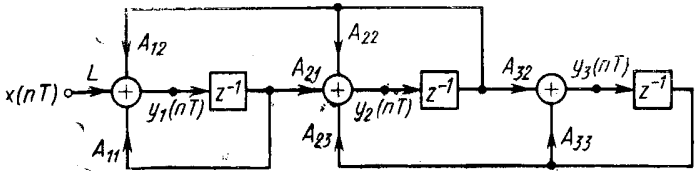


Рис. 2.22. Частный случай связанной формы

соседние с ней диагонали содержат ненулевые члены. Нетрудно представить, каким образом рис. 2.22 можно распространить на системы более высокого порядка.

2.17. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Для решения линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами было введено и использовано z-преобразование. Линейные системы, описанные этими уравнениями, можно также описать другими способами, в том числе с помощью частотной характеристики, картины расположения полюсов и нулей в комплексной z-плоскости и с помощью блок-схем цепей, содержащих элементы задержки, умножения и сложения. Было показано, что разностное уравнение второго порядка может вести себя подобно резонансной схеме и обладать, таким образом, частотно-избирательными свойствами. Кроме того, было показано, что z-преобразование выходного сигнала любой линейной дискретной цепи можно представить в виде произведения z-преобразования входного сигнала и передаточной функции цепи $H(z)$. Для одной и той же функции $H(z)$ можно получить различные формы цифровых цепей: прямую, каноническую, параллельную, каскадную и связанную (см. рис. 2.22).

ЗАДАЧИ

2.1. Найти решение уравнения (2.1), когда:

а) $x(nT)$ является импульсом длительностью M отсчетов единичной амплитуды;

б) $x(nT)$ равно нулю, но начальное значение $y(-T)=1$;

в) $x(nT)$ представляет единичный скачок, но после пяти итераций постоянный множитель K изменяется с 0,8 до 0,95.

2.2. Найти полное решение (переходное и установившееся) уравнения первого порядка (2.1), когда в момент $nT=0$ подается комплексная экспонента $x(nT)=e^{jn\omega T}$.

2.3. Доказать, что $|H|$ в уравнении (2.6) приближается при малых значениях T к амплитудно-частотной характеристике RC-фильтра, показанной на рис. 2.5.

2.4. Дано

$$F(z) = \sum_{n=0}^{m} f(nT) z^{-n}.$$

а) Доказать, что z-преобразование есть линейная операция.

б) Найти z-преобразование от $f(nT+T)$.

в) Найти z-преобразование от $\sum_{k=0}^{n} f(kT)$.

г) Доказать, что $\lim_{n\to\infty} f(nT) = \lim_{z\to 1} (z-1) F(z)$.

ж) Доказать, что $f(0) = \lim_{z\to\infty} F(z)$.

е) Найти z-преобразование от $nf(nT)$.

2.5. Найти решение уравнения (2.1), используя теорему свертки.

2.6. Используя теорему свертки, найти решение разностного уравнения

$$y(nT) = Ky(nT-T) + x(nT) - Lx(nT-T)$$

при условии, что $x(nT)$ представляет собой импульс длительностью M отсчетов единичной амплитуды и что в начальный момент система находится в покое.

2.7. Найти обратное z-преобразование для $\log(z-a)$, $1/(z-a)$, $z/[(z-a)(z-b)]$, где a и b в общем случае — комплексные числа. Какое ограничение накладывается на a и b, чтобы обеспечивалась сходимость обратного z-преобразования?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р., «Теория следящих механизмов». Изд-во иностр. лит-ры, 1953.
2. Jury E. I., «Theory and Application of the z-Transform Method», John Wiley and Sons, Inc., New York, 1964.
3. Kuo F. F., Kaiser J. F. (eds.), «Systems Analysis by Digital Computer», John Wiley and Sons, Inc., New York, 1966.
4. Рэйдер Ч., Голд Б., «Методы расчета цифровых фильтров в частотной области», ТИИЭР, т. 55, № 2, февраль 1967.
5. Ragazzini J. R., Franklin G. F., «Sampled-data Control Systems», McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.

Глава третья

РАСЧЕТ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ В ЧАСТОТНОЙ ОБЛАСТИ

3.1. ВВЕДЕНИЕ

В гл. 2 были введены и исследованы методы z-преобразования и описания линейных разностных уравнений с помощью блок-схем дискретных цепей. В данной главе эти методы применяются для расчета различных классов частотно-избирательных линейных дискретных систем, или, как их обычно называют, цифровых фильтров. Эти системы также называют дискретными фильтрами или числовыми фильтрами. Как указывалось в гл. 1, цифровые фильтры можно *синтезировать* при помощи прямой свертки, линейных рекурсивных уравнений или быстрого преобразования Фурье. С другой стороны, математические методы, используемые для *расчета* цифровых фильтров, зависят только от того, конечна ли длительность импульсной характеристики (в этом случае фильтр не имеет полюсов, а только нули) или бесконечна (в этом случае фильтр имеет обычно и полюсы, и нули).

В соответствии с обычно используемой терминологией фильтры с импульсной характеристикой бесконечной длительности называют рекурсивными, а фильтры с импульсной характеристикой конечной длительности — нерекурсивными. Эта терминология несколько отличается от общепринятой, так как термин «рекурсивный» обычно предполагает, что выходной сигнал является явной функцией предыдущих выходных и входных сигналов, в то время как термин «нерекурсивный» предполагает, что выходной сигнал является явной функцией только предыдущих входных сигналов.

Если допустить, что приведенные выше определения являются правильными, то, как будет показано в § 3.12, можно синтезировать любой фильтр с импульсной характеристикой конечной длительности с помощью рекурсивных методов. В гл. 7 будет описан синтез фильтров с импульсной характеристикой конечной длительности с помощью методов быстрого преобразования

Фурье и даны методы расчета таких фильтров. В этой главе, за исключением § 3.12, рассматривается расчет фильтров, имеющих полюсы и нули. В общем случае такие фильтры синтезируются рекурсивными методами исходя из линейных разностных уравнений. Недавно было показано, что фильтры с полюсами и нулями можно также синтезировать, используя быстрое преобразование Фурье *), но этот аспект задачи здесь не рассматривается.

Прежде чем были проведены исследования, описанные в данной главе, частотно-избирательные фильтры уже синтезировались с помощью прямой свертки. Во многих практических случаях импульсная характеристика должна иметь длительность порядка 100 отсчетов, чтобы получить хорошую форму частотной характеристики. Это означает, что требуется выполнить 100 умножений и сложений, чтобы получить одно значение выходного сигнала. В противоположность этому получение сравнимой по форме частотной характеристики с помощью рекурсивных методов требует выполнения только 10 умножений и сложений на одно значение выходного сигнала.

Из приведенного выше примера ясно, что рекурсивная фильтрация (при которой выходной отсчет является как функцией предыдущих выходных отсчетов, так и функцией входного сигнала) может повысить скорость вычислений на порядок. Как будет показано в гл. 7, расчеты нерекурсивного фильтра, для которого допускается, что $h(nT)$ усечена, могут быть реализованы при помощи методов быстрого преобразования Фурье (в противоположность прямому вычислению свертки); при этом значительно экономится время вычислений, и поэтому для многих задач нерекурсивный расчет может конкурировать с рекурсивным.

Цифровая фильтрация является естественной частью многих программ моделирования динамических систем на ЦВМ. Кроме того, уменьшение размеров и стоимости цифровых узлов делает выгодным (для некоторых применений) проектирование специализированной аппаратуры для цифровой фильтрации в реальном масштабе времени. Такие фильтры имеют определенные достоинства по сравнению с непрерывными фильтрами. При

*) Б. Голд и К. Джордан, неопубликованные замечания.

цифровой реализации можно достичь более высокой степени точности. Цифровые фильтры отличаются большим разнообразием структур, так как при их построении не возникают некоторые проблемы реализации (например, необходимость применения отрицательных индуктивностей). При построении фильтров с переменными во времени коэффициентами не требуется никаких специальных элементов. Цифровые фильтры выгодно применять на очень низких частотах (от 0,01 до 1 *гц*), на которых габариты пассивных аналоговых элементов становятся особенно большими.

3.2. СИНТЕЗ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Проектирование аналоговых фильтров состоит в решении задачи аппроксимации и задачи собственно синтеза. В первой задаче отыскивается передаточная функция реализуемого фильтра, которая являлась бы аппроксимацией некоторой выбранной идеальной характеристики. Например, «идеальный» фильтр нижних частот должен обладать прямоугольной амплитудно-частотной характеристикой. Так как такую функцию невозможно реализовать с помощью резисторов, емкостей и индуктивностей, приходится искать удобную аппроксимацию. Часто это можно сделать определением соответствующего местоположения полюсов и нулей в комплексной частотной области. После того как получены полюсы и нули, необходимо найти процедуру синтеза для практического осуществления передаточной функции реальными элементами. Например, хотя имеется возможность, задавая пары полюсов и нулей, реализовать каждую из них с помощью простых резонансных схем и затем соединить эти схемы каскадно или параллельно, такая процедура невозможна без тщательной развязки друг от друга каждой пары комплексных полюсов и нулей с помощью операционных усилителей. По этой причине в теории много усилий направлялось на то, чтобы разработать методы синтеза цепей, при которых не требуется развязки схем.

Задача аппроксимации для цифровых фильтров по идее не отличается от такой же задачи для аналоговых фильтров. Однако поскольку цифровым элементам присуще свойство развязки резонаторов, то цифровую цепь можно всегда реализовать в виде каскадных или параллельных комбинаций пар полюсов и нулей, вследствие чего изящные процедуры синтеза аналоговых цепей оказываются ненужными для синтеза цифровых фильтров. Читатель, не знакомый с методами расчета фильтров, несомненно, получит большую пользу от изучения проблемы аппроксимации при расчете аналоговых фильтров; к этой задаче имеется много стандартных подходов [5, 14, 15].

Приведенные выше рассуждения не следует понимать так, что конкретный способ реализации данного цифрового фильтра не является важным. В гл. 4 будет показано, что эффекты шумов квантования зависят от выбранной структуры. Проблема синтеза является реальной и зависит от многих условий, которые, однако, отличаются от условий, налагаемых в аналоговом случае. После некоторого опыта работы с цифровыми фильтрами разработчик может обычно принимать разумные решения, связанные с синтезом. На протяжении

всей книги авторы стремились освещать затронутые выше проблемы, но им все же не удалось изложить в ней все известные формальные методы синтеза. В некоторой степени это удалось сделать лишь применительно к проблеме аппроксимации, что будет продемонстрировано в настоящей главе.

3.3. О РАЗЛИЧНЫХ МЕТОДАХ РАСЧЕТА ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Так как имеется обширная информация по расчету непрерывных фильтров, то полезным подходом к расчету цифровых фильтров является отыскание системы разностных уравнений, имеющей такую системную функцию $H(z)$, которая в значительной степени напоминала бы известные аналоговые системные функции. В работе Гуревича [8] дан метод реализации этой идеи с применением принципа *«инвариантности импульсной характеристики»*. Под этим подразумевается то, что дискретные составляющие отклика полученного цифрового фильтра на единичный импульс представляют собой отсчеты непрерывной импульсной характеристики заданного непрерывного фильтра.

Цифровые фильтры могут определяться с помощью возможной аналогии или исходя из требуемого вида квадрата модуля передаточной функции путем использования процедур, сходных с процедурой расчета непрерывных фильтров Баттерворта и Чебышева. Этот метод будет рассмотрен ниже, а условия реализуемости фильтров при этом методе рассматриваются в приложении, помещенном в конце данной главы.

При другом способе, применяемом различными исследовательно [2, 4, 11, 16], для приведения задачи расчета цифровых фильтров к задаче расчета непрерывных фильтров используется конформное отображение. Будем связывать этот способ с билинейными преобразованиями, хотя можно применять и другие преобразования. И наконец, метод, называемый *частотной выборкой* [12], основывается на использовании особых свойств элементарного цифрового фильтра. Частотная характеристика этого элементарного фильтра имеет сходство с функцией $(\sin x/x)$, а его фазочастотная характеристика линейна. На основе соответствующего комбинирования таких элементарных фильтров можно разработать простой метод расчета цифровых фильтров самых разнообразных видов.

Если одни и те же требования к фильтрации могут быть в одинаковой степени удовлетворены несколькими различными цифровыми фильтрами, то выбор определяется скоростью выполнения соответствующих вычислительных программ. Важным фактором, влияющим на быстродействие, является число умножений (исключая операции умножения на такие коэффициенты, как ± 1 или 2^n, которые вычислительные машины могут выполнять очень быстро). Некоторые цифровые фильтры могут удовлетворять по существу тем же требованиям, что и другие фильтры, но при значительно меньшем количестве умножений, приходящихся на один отсчет выходного сигнала.

3.4. МЕТОД 1. ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ИНВАРИАНТНОСТИ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

Прежде всего покажем, что цифровой фильтр с импульсной характеристикой, совпадающей с дискретизованной импульсной характеристикой заданного непрерывного фильтра, можно получить, используя соответствие

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{s+s_i}\Rightarrow\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{1-e^{-s_iT}z^{-1}}=H(z). \qquad (3.1)$$

Импульсная характеристика непрерывного фильтра $k(t)$ определяется как обратное преобразование Лапласа от системной функции $Y(s)$, заданной в общем виде*) левой частью выражения (3.1). Аналогично, импульсная характеристика цифрового фильтра $h(nT)$ определяется как обратное z-преобразование его системной функции $H(z)$, которая в общем случае может быть выражена правой частью (3.1).

Таким образом,

$$k(t)=\mathscr{L}^{-1}\left\{\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{s+s_i}\right\}=\sum_{i=1}^{m}A_ie^{-s_it}, \qquad (3.2)$$

*) Для полной общности выражение (3.1) должно также включать члены вида $A_i/(s+s_i)^l$, которым соответствуют члены вида

$$\left[\frac{(-1)^{l-1}}{(l-1)!}\frac{\partial^{l-1}}{\partial a^{l-1}}\frac{A_i}{1-e^{-aT}z^{-1}}\right]\Bigg|_{a=s_i}.$$

где $\mathscr{L}^{-1}$ обозначает обратное (одностороннее) преобразование Лапласа.

Если требуется, чтобы $h(nT)=k(t)$, $t=0,\ T,\ 2T,\ldots$, то

$$h(nT)=\sum_{i=1}^{m} A_i e^{-s_i nT}. \qquad (3.3)$$

Взяв z-преобразование от (3.3), получим

$$H(z)=\sum_{n=0}^{\infty} h(nT)\,z^{-n}=\sum_{i=1}^{m} A_i \sum_{n=0}^{\infty} e^{-s_i nT} z^{-n}=$$

$$=\sum_{i=1}^{m} \frac{A_i}{1-e^{-s_i T} z^{-1}}. \qquad (3.4)$$

Таким образом, условие (3.3), состоящее в том, что импульсная характеристика цифрового фильтра равна дискретизованной импульсной характеристике данного непрерывного фильтра $Y(s)$, приводит к цифровому фильтру, определяемому выражением (3.4), где все постоянные A_i и s_i определяются из $Y(s)$. Исходя из соответствия (3.4), можно составить таблицы z-преобразований [9, 13].

Пример. Простой однополюсной RC-фильтр нижних частот преобразуется в цифровой фильтр с помощью соответствия

$$\frac{a}{s+a} \Rightarrow \frac{a}{1-e^{-aT}z^{-1}}. \qquad (3.5)$$

Системные функции различных резонансных контуров могут быть разложены на элементарные дроби, что приводит к соответствиям

$$\frac{s+a}{(s+a)^2+b^2} \Rightarrow \frac{1-e^{-aT}(\cos bT)\,z^{-1}}{1-2e^{-aT}(\cos bT)\,z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}},$$

$$\frac{b}{(s+a)^2+b^2} \Rightarrow \frac{e^{-aT}(\sin bT)\,z^{-1}}{1-2e^{-aT}(\cos bT)\,z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}. \qquad (3.6)$$

3.5. РАСЧЕТ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА ЛЕРНЕРА С ИНВАРИАНТНОЙ ИМПУЛЬСНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

Пусть имеется непрерывная системная функция

$$Y(s)=\sum_{i=1}^{m} \frac{B_i(s+a)}{(s+a)^2+b_i^2}, \qquad (3.7)$$

для которой

$$B_1=\frac{1}{2},\quad B_m=\frac{(-1)^{m+1}}{2},\quad B_i=(-1)^{i+1},$$

$$i=2,\ 3,\ldots,\ m-1,$$

а расположение полюсов $-a\pm jb_i$ приведено на рис. 3.1. В [10] было показано, что фильтры Лернера имеют высокую степень линейности фазовой характеристики и достаточно селективную полосу пропускания.

В соответствии с выражением (3.6) z-преобразование от импульсной характеристики цифрового фильтра Лернера определяется как

$$H(z)=\sum_{i=1}^{m} \frac{B_i\,[1-e^{-aT}(\cos b_i T)\,z^{-1}]}{1-2e^{-aT}(\cos b_i T)\,z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}. \qquad (3.8)$$

Однако если упомянутый в разделе 2.1 эффект наложения спектров за счет дискретизации будет существен, то прекрасные амплитудные и фазовые характеристики фильтров Лернера при цифровой реализации не сохранятся. Этот случай имеет место, когда ширина полосы для каждого отдельного полюса соизмерима с частотой дискретизации. В некоторых случаях инвариантность импульсной характеристики может быть единственным требованием, и она, конечно, не зависит от частоты дискретизации.

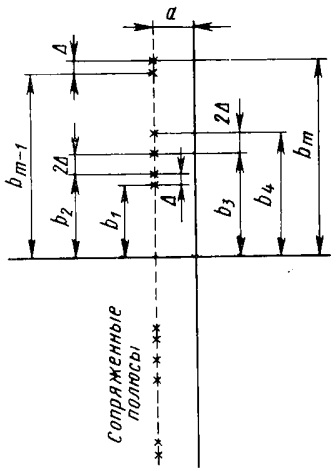


Рис. 3.1. Описание фильтра Лернера в s-плоскости.

На рис. 3.2,*а*, *б* показана цифровая реализация полосового фильтра Лернера с четырьмя парами полюсов. Каждый из сигналов y_i на выходах четырех параллельных каналов вычисляется в соответствии с разностным уравнением

$$y_i(nT)=e^{-aT}\cos b_i T[2y_i(nT-T)-x(nT-T)]-$$
$$-e^{-2aT}y_i(nT-2T)+x(nT),\qquad i=1,\ 2,\ 3,\ 4, \qquad (3.9)$$

а выходной сигнал $y(nT)$ определяется выражением *)

$$y(nT)=\frac{1}{2}y_1(nT)-y_2(nT)+y_3(nT)-$$

$$-\frac{1}{2}y_4(nT). \qquad (3.10)$$

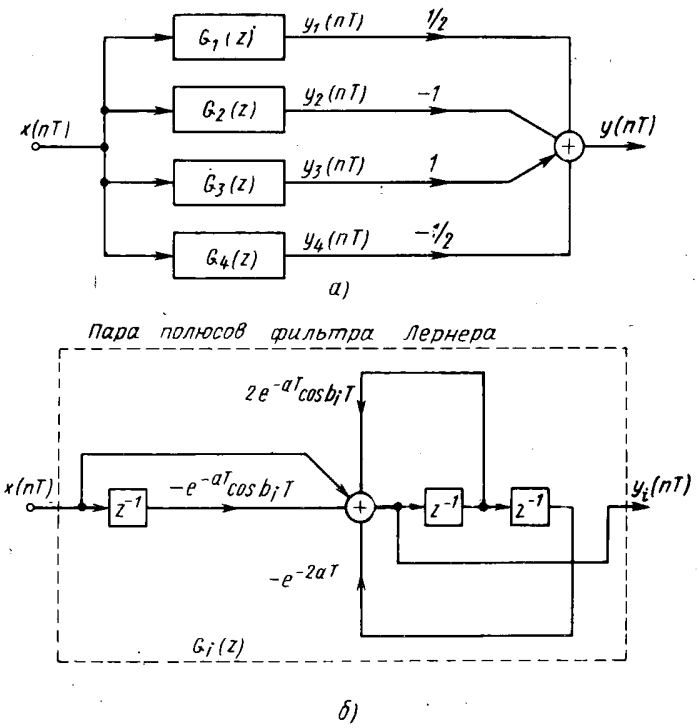


Рис. 3.2. Цифровой фильтр Лернера с четырьмя парами полюсов.

*) Фильтр Лернера с четырьмя парами полюсов особенно удобен для проектирования анализатора спектра в виде набора фильтров, так как у него два полюса могут принадлежать смежным фильтрам. См.: Дроуилхет и Гудмен. Группа полосовых фильтров с линейной фазовой характеристикой и перекрывающимися полюсами. ТИИЭР, т. 54, № 4 (апрель 1966).

3.6. КОЭФФИЦИЕНТ ПЕРЕДАЧИ ЦИФРОВЫХ РЕЗОНАТОРОВ

Соответствия (3.6) определяют два цифровых резонатора, являющихся *импульсными инвариантами* заданных непрерывных резонаторов. На практике цифровые резонаторы могут определяться без обращения к непрерывным аналогам. Для этого необходимо задать на z-плоскости размещение пары комплексно-сопряженных полюсов и, в большинстве случаев, одного нуля, по которым можно быстро составить разностное уравнение. Поскольку многие цифровые фильтры представляют собой простые каскадные или параллельные комбинации таких резонаторов, то важно знать их свойства.

z-преобразование резонатора с полюсами в точках $z=re^{\pm j\omega_r T}$ и нулем в точке q имеет следующий вид:

$$H(z)=\frac{1-qz^{-1}}{1-2r(\cos\omega_r T)z^{-1}+r^2z^{-2}}. \qquad (3.11)$$

Амплитудно-частотная характеристика для выражения (3.11) есть $|H(e^{j\omega T})|$, и она может быть получена непосредственно из рис. 2.9 путем применения теоремы косинусов:

$$|H(e^{j\omega T})|=\left\{\frac{1+q^2-}{[1+r^2-2r\cos(\omega-\omega_r)T]\times}\rightarrow\right.$$

$$\left.\rightarrow\frac{-2q\cos\omega T}{\times[1+r^2-2r\cos(\omega+\omega_r)T]}\right\}^{1/2}. \qquad (3.12)$$

Случай 1: $q=\cos\omega_r T$

Для значений r, близких к единице, величина $|H(e^{j\omega T})|$ на резонансной частоте ω_r может быть приближенно представлена в виде

$$|H(e^{j\omega T})|=\frac{1}{2(1-r)\sqrt{r}}, \qquad (3.13)$$

которая не зависит от ω_r. Таким образом, при указанном выборе q становится возможным построение группы резонаторов с равными коэффициентами передачи (или фильтров, составленных из таких резонаторов), охватывающих широкий диапазон частот.

В случае узкополосных резонаторов, для которых r близко к единице, коэффициент передачи при резонансе, как это ясно следует из (3.13), обычно значительно

больше единицы. Знание коэффициентов передачи фильтров необходимо для определения надлежащих длин слов в регистрах и для того, чтобы избежать проблем переполнения разрядной сетки.

Случай 2: $q=r\cos\omega_r T$

Разностное уравнение для (3.11) в этом случае может быть записано в виде

$$y(nT)=r\cos\omega_r T\,[2y(nT-T)-x(nT-T)]-$$
$$-r^2y(nT-2T)+x(nT). \qquad (3.14)$$

Для решения (3.14) нужны лишь две операции умножения, в то время как в общем случае любого q необходимо три операции умножения. Поэтому данный случай представляет особый интерес для применений, связанных с работой в реальном масштабе времени, и в тех случаях, когда полное время работы вычислительной машины чрезмерно велико. Чувствительность резонансного коэффициента передачи к изменению резонансной частоты здесь выше, чем в случае *1*. Таким образом, для построения набора фильтров с равными коэффициентами передачи на центральных частотах лучше применять случай *1*.

Случай 3: $q=1$

В этом случае коэффициент передачи равен нулю, если $\omega=0$, что часто бывает желательным. Как и в случае *2*, необходимы две операции умножения. Коэффициент передачи при $\omega_r T=\pi/2$ в $\sqrt{2}$ раз больше коэффициента передачи при $\omega_r T$, близком к нулю, но при условии, что $\omega_r T$ велико по сравнению с $1-r$.

Случай 4: $q=0$

В этом случае нуль исчезает. Иногда требуется спроектировать резонаторы без нулей, но с постоянным коэффициентом передачи при $\omega=0$, не зависящим от ω_r. Это достигается при помощи цифровой системной функции

$$H(z)=\frac{1-2r\cos\omega_r T+r^2}{1-2r\cos\omega_r Tz^{-1}+r^2z^{-2}}. \qquad (3.15)$$

3.7. РАСЧЕТ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ НА ОСНОВЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФИЛЬТРОВ С НУЛЯМИ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Большой класс аналоговых фильтров определяется системными функциями вида

$$Y(s)=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{m}(s+s_i)}, \qquad (3.16)$$

где знаменатель представляет собой произведение. Такие фильтры имеют m полюсов при конечных значениях s и m-кратный нуль для бесконечного s. Эта категория включает в себя фильтры Баттерворта, Чебышева и Бесселя.

При расчете импульсно-инвариантных цифровых фильтров, основанных на (3.16), можно использовать процедуру, описанную в общих чертах в § 3.3. Функцию $Y(s)$ разлагают на элементарные дроби, находят A_i и затем из соответствия (3.1) получают $H(z)$. В общем случае в $H(z)$ появляются нули, несмотря на то, что в $Y(s)$ конечных нулей нет.

Однако, когда полюсы $-s_i$ близки к мнимой оси на плоскости s, так что e^{-s_iT} близко к единице, нулями $H(z)$ можно пренебречь, и $H(z)$ тогда можно приближенно представить в виде

$$H(z)=\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{m}(1-e^{-s_iT}z^{-1})}. \qquad (3.17)$$

На практике, применяя (3.17), успешно программировали цифровые полосовые фильтры Бесселя, Баттерворта и Чебышева с полосой, составляющей несколько сотен герц, при частотах дискретизации 10 000 *гц*.

Пример. Фильтр нижних частот Баттерворта с тремя полюсами. Системной функцией непрерывного фильтра является

$$Y(s)=\frac{s_1s_2s_3}{(s+s_1)(s+s_2)(s+s_3)}, \qquad (3.18)$$

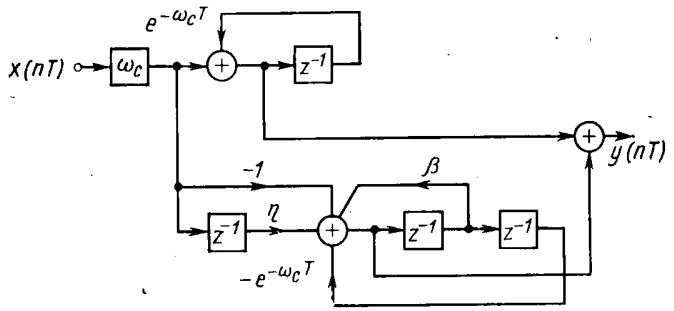
где

$$s_1=\omega_c,\quad s_2=\frac{1}{2}(1+j\sqrt{3})\,\omega_c,\quad s_3=\frac{1}{2}(1-j\sqrt{3})\,\omega_c$$

и ω_c есть частота среза, определяемая из условия $|Y(j\omega_c)|=0{,}707$. Разлагая (3.18) на элементарные дроби и применив соответствия (3.1), приходим к z-преобразованию

$$H(z)=\omega_c\left[\frac{1}{1-e^{-\omega_c T}z^{-1}}+\frac{-1+\eta z^{-1}}{1-\beta z^{-1}+e^{-\omega_c T}z^{-2}}\right]. \qquad (3.19)$$

На рис. 3.3 дана структура цепи, интерпретирующей (3.19), там же приведены выражения для коэффициентов β и η.



$$\beta=2\exp[-\omega_c T/2]\cos(\sqrt{3}\,\omega_c T/2),$$

$$\eta=\exp[-\omega_c T/2]\,[\cos(\sqrt{3}\,\omega_c T/2)]+(\sin(\sqrt{3}\,\omega_c T/2))/\sqrt{3}].$$

Рис. 3.3. Цифровой фильтр нижних частот Баттерворта с тремя полюсами.

Если необходима каскадная форма построения фильтра, то (3.19) можно переписать в виде

$$H(z)=\frac{Cz^{-1}+Dz^{-2}}{(1-e^{-\omega_c T}z^{-1})\{1-2e^{-\omega_c T/2}[\cos(\sqrt{3}/2)\,\omega_c T]\,z^{-1}+e^{-\omega_c T}z^{-2}\}}, \qquad (3.20)$$

где

$$C=\omega_c\left[e^{-\omega_c T}+e^{-\omega_c T/2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c T-\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c T\right)\right]$$

и

$$D=\omega_c\left[e^{-\omega_c T}-e^{-3\omega_c T/2}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c T+\cos\frac{\sqrt{3}}{2}\omega_c T\right)\right].$$

Очевидно, что $H(z)$ имеет два нуля: один — при $z=0$, другой — при $z=-D/C$. Второй нуль находится на действительной оси и возрастает по мере увеличения $\omega_c T$, начиная от 0. Заметим, что знаменатель (3.20) можно записать исходя из расположения полюсов непрерывного фильтра, так как полюс на плоскости s непосредственно преобразуется с помощью соотношения $z=e^{sT}$ в полюс на плоскости z.

Для малых значений $\omega_c T$ нуль $H(z)$ приблизительно совпадает с точкой —1, поэтому он оказывает влияние, хотя и малое, на характеристики полосы пропускания фильтра Баттерворта с тремя полюсами. На рис. 3.4 дан график зависимости величины $-D/C$ от

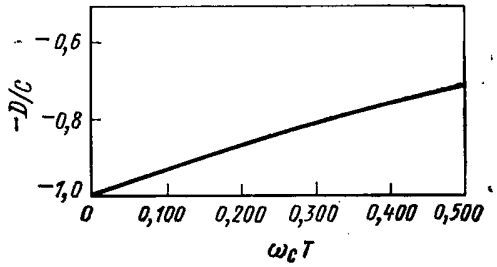


Рис. 3.4. Изменение положения нуля у цифрового фильтра нижних частот Баттерворта с тремя полюсами.

$\omega_c T$. Из графика видно, например, что при $\omega_c T=0{,}1$ нуль перемещается в точку —0,94, что приведет при каскадной форме фильтра к некоторым малым искажениям в полосе пропускания.

3.8. ОБЗОР МЕТОДОВ РАСЧЕТА ФИЛЬТРОВ БАТТЕРВОРТА, ЧЕБЫШЕВА И ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФИЛЬТРОВ

В этом разделе дан краткий обзор методов расчета непрерывных фильтров Баттерворта, Чебышева и эллиптических фильтров, которые понадобятся при дальнейшем рассмотрении способов расчета цифровых фильтров. Более полные сведения можно получить из широко известных работ [5, 14, 15].

Фильтр Баттерворта определяется соотношением

$$|F(j\omega)|^2=\frac{1}{1+(\omega/\omega_c)^{2n}}, \qquad (3.21)$$

где ω_c — граничная частота, а $|F(j\omega)|^2$ — квадрат модуля передаточной функции фильтра.

Полюсы выражения (3.21) располагаются в плоскости s вдоль окружности радиуса ω_c на равных расстояниях

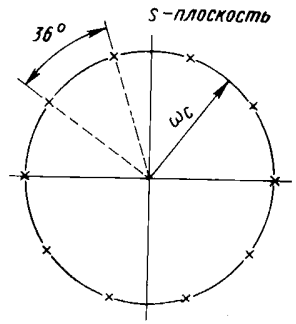


Рис. 3.5. Полюсы фильтра Баттерворта в s-плоскости.

друг от друга, как это показано на рис. 3.5. При нечетных n полюсы будут при углах 0 и π; при четных n первый полюс будет иметь угол $\pi/2n$. Можно показать, что требуемая передаточная функция $F(s)$ представляет собой рациональную функцию с постоянным числителем и знаменателем, определяемым полюсами, показанными на рис. 3.5 в левой полуплоскости. На

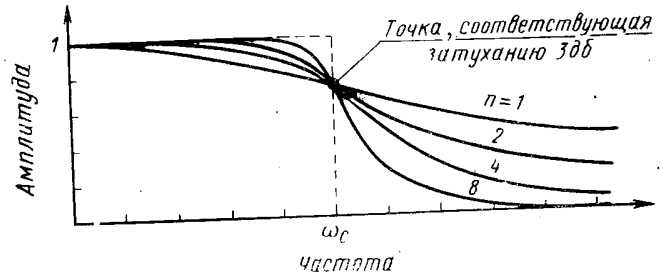


Рис. 3.6. Частотные характеристики фильтров Баттерворта.

рис. 3.6 даны графики $|F(j\omega)|$, вычисленные по выражению (3.21) для нескольких значений n. Из этих графиков становятся ясными избирательные свойства фильтра Баттерворта.

Фильтр Чебышева определяется соотношением

$$|F(j\omega)|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 V_n^2(\omega/\omega_c)}, \qquad (3.22)$$

где V_n — полином Чебышева порядка n, который может быть образован с помощью рекурсивной формулы

$$V_{n+1}(x) - 2xV_n(x) + V_{n-1}(x) = 0, \qquad (3.23)$$

причем $V_1(x) = x$ и $V_2(x) = 2x^2 - 1$.

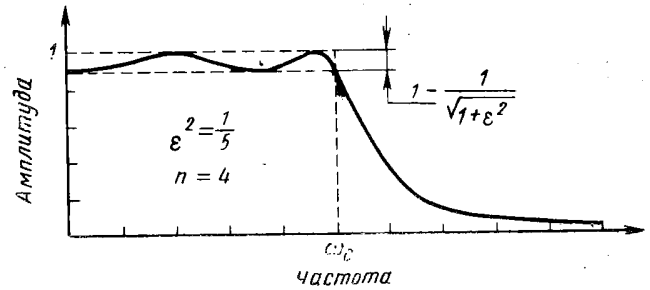


Рис. 3.7. Частотная характеристика фильтра Чебышева.

Полином Чебышева характеризуется колебаниями одинаковой амплитуды в заданном диапазоне x, что при принятом значении ε приводит к модулю передаточной функции вида, показанного на рис. 3.7. Эта функция имеет равновеликие пульсации в полосе пропускания, а за ее пределами монотонно спадает. Размах пульсаций определяется выражением

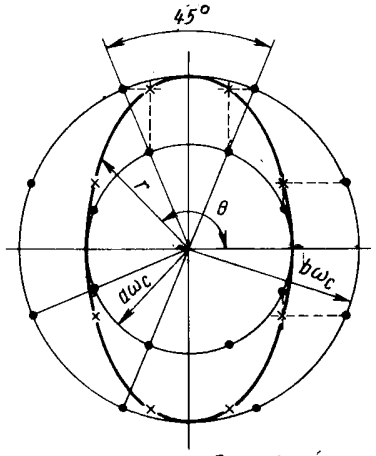
$$\delta = 1 - \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}.$$

Полюсы выражения (3.22) располагаются на эллипсе, который полностью определяется заданными значениями ε, n и ω_c. Этот эллипс показан на рис. 3.8, причем положения его крайних точек в вертикальном и горизонтальном направлениях определяются величинами $b\omega_c$ и $a\omega_c$, где

$$b, a = \frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{\varepsilon^{-2}+1}+\varepsilon^{-1}\right)^{1/n} \pm \left(\sqrt{\varepsilon^{-2}+1}+\varepsilon^{-1}\right)^{-1/n}\right].$$

Здесь величине b соответствует знак плюс, а величине a — знак минус. Полюсы на эллипсе могут быть геометрически связаны с полюсами двух окружностей Баттерворта с радиусами $a\omega_c$ и $b\omega_c$. На вертикальной оси совпадают положения полюсов у эллипса и у большой окружности, а на горизонтальной оси — у эллипса и у малой окружности.

Эллиптический фильтр основывается на свойствах эллиптической функции Якоби, впервые исследованной им [7], которая затем широко использовалась во многих математических работах [1, 17]. Для наших целей важно знать, что эллиптическая функция Якоби, обозначаемая как $\mathrm{sn}\,u$, является дважды периодической функцией комплексной переменной u, аналитической во всех точках пло-



×-фильтр Чебышева
•-фильтр Баттерворта

Рис. 3.8. Полюсы фильтра Чебышева в s-плоскости.

скости u, за исключением простых полюсов функции. Это очевидно из рис. 3.9; так как $\mathrm{sn}\,u$ является дважды периодической, то картина расположения двух нулей и двух полюсов бесконечно повторяется вдоль осей x и y. Вычеты, связанные с каждой парой полюсов (соседние полюсы вдоль любой горизонтальной линии), равны по величине и противоположны по знаку.

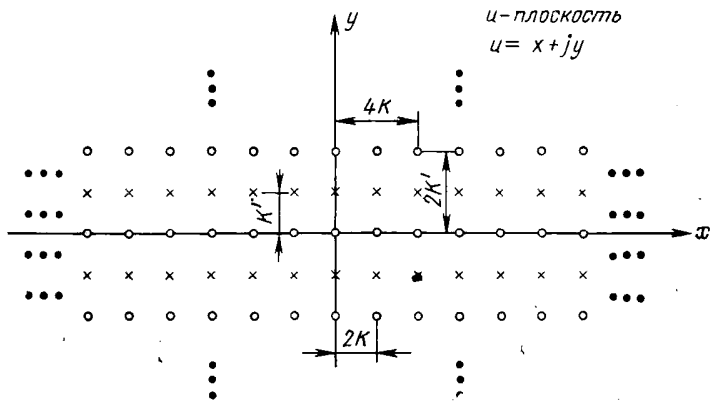


Рис. 3.9. Полюсы и нули эллиптической функции Якоби.

Функцию $\mathrm{sn}\,u$ иногда записывают как $\mathrm{sn}(u, k)$, чтобы показать наличие параметра k. Аналитически, если $y = \mathrm{sn}(u, k)$, то

$$u = \int_0^y \frac{dt}{(1-t^2)^{1/2}(1-k^2t^2)^{1/2}} = \mathrm{sn}^{-1}\,y, \qquad (3.24)$$

т. е. y является обратной функцией для неполного эллиптического интеграла первого рода. Параметры $K(k)$ и $K'(k)$, показанные на рис. 3.9, определяются следующим образом:

$$K(k) = \mathrm{sn}^{-1}1 \qquad K'(k) = K(k'),$$

где

$$k' = (1-k^2)^{1/2}. \qquad (3.25)$$

Двойная периодичность функции $\mathrm{sn}u$ и особенности расположения ее полюсов и нулей позволяют найти квадрат модуля передаточной функции, имеющий необходимые свойства — постоянную амплитуду колебаний как в полосе пропускания, так и в полосе непропускания, как показано на рис. 3.10. Чтобы продемонстрировать это, рассмотрим функцию

$$T^2(u) = \frac{1}{1+\varepsilon^2\,\mathrm{sn}^2(u, k_1)}, \qquad (3.26)$$

где $k_1 = \varepsilon/\sqrt{A^2-1}$, а ε и A являются параметрами, смысл которых показан на рис. 3.10. Расположение полюсов и нулей функции $T^2(u)$ показано на рис. 3.11,*а*.

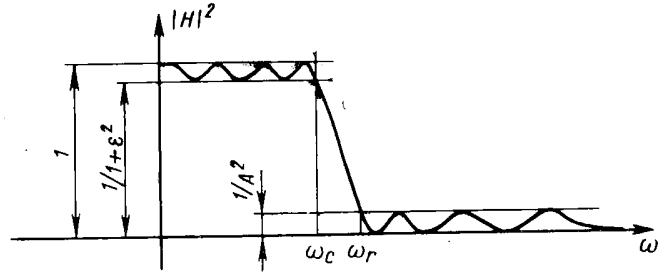


Рис. 3.10. Частотная характеристика эллиптического фильтра.

Полюсы функции $\mathrm{sn}\,u$ становятся двойными нулями для $T^2(u)$. Полюсы для $T^2(u)$ находятся путем решения уравнения

$$1+\varepsilon^2\mathrm{sn}^2u = 0,$$

что приводит к картине полюсов, показанной на рис. 3.11,*а*. Картина на рис. 3.11,*а* также повторяется периодически по двум осям. Последующий анализ для нечетных значений N основывается на рис. 3.11,*б*. Для четных значений N анализ осуществляется подобным же образом (см. рис. 3.12), поэтому он не будет рассматриваться в деталях.

Рассматривая точки $u=K$ и $u=K+jK'$, можно получить в явном виде соотношения, описывающие пульсации на частотной характеристике, изображенной на рис. 3.10. Из условий симметрии рис. 3.11,*а* можно определить полосу пропускания и полосу непропускания. Полоса пропускания определяется отрезком на оси x, а полоса непропускания — горизонтальной линией, проходящей через нули выше оси x. Переход от полосы пропускания к полосе непропускания происходит по вертикальным сторонам прямоугольника, показанного на рис. 3.11,*а*; AC — для положительных частот и BD —

для отрицательных частот. Кроме того, точка $u=K(k_1)$ соответствует минимальному значению $T^2(u)$ в полосе пропускания, а точка $u=K(k_1)+jK'(k_1)$ соответствует максимуму в полосе непропускания. Применение соотношений $\operatorname{sn} K=1$ и $\operatorname{sn}(K+jK)=1/k_1$ прямо приводит

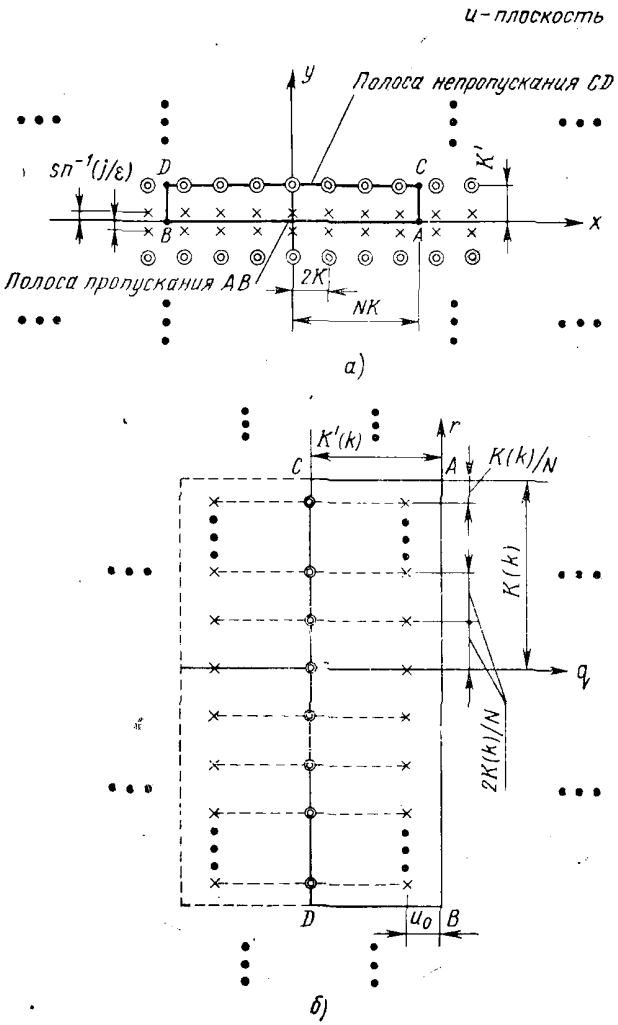


Рис. 3.11. Полюсы и нули эллиптического фильтра: *а*) в *u*-плоскости; *б*) в λ-плоскости для нечетного *N*.

к определению параметров пульсаций на частотной характеристике рис. 3.10. Однако на этом рисунке дан квадрат модуля передаточной функции вдоль оси, простирающейся до бесконечности, в то время как рис. 3.11,*а* определяет функцию вдоль прямоугольника

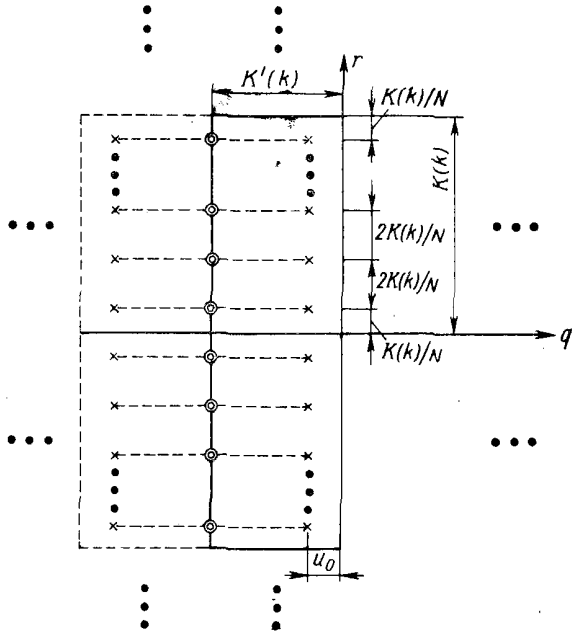


Рис. 3.12. Полюсы и нули эллиптического фильтра в λ-плоскости для четного *N*.

в плоскости *u*. Чтобы получить полное представление об этой функции, необходимо прямоугольник отобразить на ось $j\omega$ в плоскости *s*. Эта операция отображения обычно выполняется в два этапа. На первом этапе осуществляется преобразование

$$\lambda=j\frac{K(k)\,u}{NK(k_1)},\quad \text{где } k=\frac{\omega_c}{\omega_r},$$

которое превращает изображение рис. 3.11,*а* в изображение рис. 3.11,*б*. После этого прямоугольник рис. 3.11,*б* должен быть отображен на ось $j\omega$ в плоскости *s*. Читатель может проверить, что если положить

$$N=\frac{K'(k_1)\,K(k)}{K(k_1)\,K'(k)} \tag{3.27}$$

и выполнить конформное преобразование

$$s = j\omega_c \operatorname{sn}(-j\lambda, k), \tag{3.28}$$

то получим отображение, показанное в следующей таблице:

Плоскость λ	Плоскость s
0	0
$\pm jNK(k)$	$\pm j\omega_c$
$\pm jNK(k) - K'(k)$	$\pm j\omega_r$
$-K'(k)$	$\pm j\infty$

Можно также убедиться, что прямоугольник $ABCD$ на рис. 3.11,*б* действительно отображается на ось $j\omega$ в плоскости s. Точные положения полюсов и нулей в плоскости s получаются из выражения (3.28), которое может быть представлено в виде двух действительных преобразований; если $s=\sigma+j\omega$ и $\lambda=q+jr$, то

$$\sigma = \omega_c \frac{\operatorname{sn}(q, k')\operatorname{cn}(q, k')\operatorname{cn}(r, k)\operatorname{dn}(r, k)}{1-\operatorname{sn}^2(q, k')\,dn^2(r, k)},$$

$$\omega = \omega_c \frac{\operatorname{sn}(r, k)\operatorname{dn}(q, k')}{1-\operatorname{sn}^2(q, k')\operatorname{dn}^2(r, k)}. \tag{3.29}$$

Функции cn и dn легко получить из формул $\operatorname{cn}^2 u = 1-\operatorname{sn}^2 u$, $\operatorname{dn}^2 u = 1-k^2\operatorname{sn}^2 u$, а u_0, обозначенное на рис. 3.11,*б*, можно записать в виде

$$u_0 = -j\frac{K(k)}{NK(k_1)}\operatorname{sn}^{-1}\frac{j}{\varepsilon}. \tag{3.30}$$

Поясним различие между фильтрами Баттерворта, Чебышева и эллиптическими фильтрами. Все эти фильтры являются аппроксимациями заданного фильтра с прямоугольной полосой пропускания. В фильтре Баттерворта аппроксимация производится с помощью монотонной амплитудно-частотной характеристики. Допуская пульсации характеристики в полосе пропускания, можно с помощью фильтра Чебышева, имеющего то же число полюсов и нулей, обеспечить более крутой скат характеристики на границе полосы пропускания. Эллиптические фильтры обеспечивают еще более крутой скат, чем фильтры Чебышева, при той же сложности цепи, но при этом имеют пульсации характеристики не только в полосе пропускания, но и в полосе непропускания. Выбор фильтра зависит от области его применения, требований к его размерам и от времени, которое можно затратить на его расчет.

Прежде чем углубляться в подробности методов расчета цифровых фильтров, следует сделать несколько общих замечаний. Приведенная теория и та, что будет рассмотрена ниже в данной главе, являются в значительной степени приспособлением теории аналоговых фильтров в проблеме цифровой фильтрации. Возможен, однако, более широкий подход, заключающийся в том, что создается общая теория фильтров, которую можно применять для обеих специфических ситуаций. Например, в рассуждениях, приводящих к выражению (3.26), не имелись в виду какие-либо конкретные виды фильтров. Выражение (3.26) просто определяет функцию с желаемыми свойствами на прямоугольнике в u-плоскости на рис. 3.11,*а*. Чтобы преобразовать эту функцию в такую, которая была бы полезна для синтеза аналогового фильтра, требуется произвести преобразование, которое отображает этот прямоугольник в ось $j\omega$ в плоскости s. Если вместо этого требуется использовать ту же функцию для синтеза цифрового фильтра, то необходимо отобразить прямоугольник рис. 3.11,*а* в единичную окружность на плоскости z. С этой точки зрения можно применять «общую» теорию фильтров непосредственно к аналоговой или к цифровой реализации. В частности, как будет видно из § 3.9, можно задать квадраты модулей передаточных функций в такой форме, которая удобна для прямого применения к расчету цифровых фильтров. С другой стороны, читатель, хорошо знакомый с расчетом непрерывных фильтров, может найти удобным применение методов § 3.10, для того чтобы непосредственно перейти от аналогового проектирования к цифровому.

3.9. МЕТОД 2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА С ПОМОЩЬЮ КВАДРАТА МОДУЛЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ

Из материалов § 3.8 видно, что фильтры Баттерворта и Чебышева задаются квадратами модулей передаточных функций надлежащей формы, такими, как (3.21) и

(3.22) или (3.26). Аналогичная процедура для цифровых фильтров описывается в настоящем параграфе.

Допустим, что системная функция цифрового фильтра $H(z)$ представляет собой рациональную функцию относительно z^{-1}.

Отсюда следует, что в том случае, когда значения z располагаются на единичной окружности, $H(z)$ представляет собой рациональную функцию относительно $e^{j\omega T}$. Таким образом, квадрат модуля $|H(e^{j\omega T})|^2$ всегда может быть выражен в виде отношения двух тригонометрических функций от ωT.

Примером квадрата модуля передаточной функции, пригодного для фильтрации нижних частот, является

$$|H(e^{j\omega T})|^2 = \left[1 + \frac{\operatorname{tg}^{2n}(\omega T/2)}{\operatorname{tg}^{2n}(\omega_c T/2)}\right]^{-1}. \qquad (3.31)$$

На рис. 3.13 представлен график функции (3.31) для $\omega_c T = \pi/2$ и нескольких значений n. Полученные кривые подобны кривым для фильтра Баттерворта (3.21), изображенным на рис. 3.6. Частота среза ω_c как в случае непрерывного, так и в случае цифрового фильтра играет одинаковую роль.

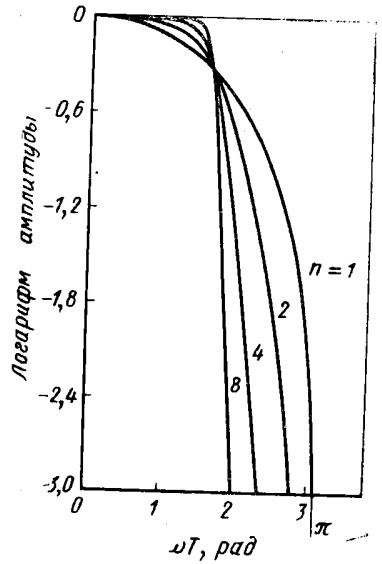


Рис. 3.13. Частотные характеристики цифровых фильтров Баттерворта.

Полагая $z = e^{j\omega T}$, выражение (3.31) можно записать в виде

$$|H(z)|^2 = \frac{\operatorname{tg}^{2n}(\omega_c T/2)}{\operatorname{tg}^{2n}(\omega_c T/2) + (-1)^n[(z-1)(z+1)]^{2n}}. \qquad (3.32)$$

Следовательно, (3.32) является рациональной функцией относительно z, имеющей при $z = -1$ нуль порядка $2n$. Полюсы находятся путем подстановки в (3.32)

$$p = \frac{z-1}{z+1}, \qquad (3.33)$$

откуда можно убедиться в том, что $2n$ полюсов функции $|H(p)|^2$ размещаются равномерно по окружности радиуса $\operatorname{tg}(\omega_c T/2)$ в плоскости p. Далее с помощью преобразования, обратного (3.33), а именно

$$z = \frac{1+p}{1-p}, \qquad (3.34)$$

легко находятся полюсы в плоскости z.

Полагая $p = x + jy$ и $z = u + jv$, из (3.34) находим соотношения для составляющих

$$u(x, y) = \frac{1 - x^2 - y^2}{(1-x)^2 + y^2}, \qquad v(x, y) = \frac{2y}{(1-x)^2 + y^2}. \qquad (3.35)$$

Окружность, на которой располагаются полюсы в плоскости p, удовлетворяет уравнению

$$x^2 + y^2 = \operatorname{tg}^2 \frac{\omega_c T}{2}. \qquad (3.36)$$

Из (3.35) и (3.36) можно показать, что эта окружность отображается в окружность на плоскости z с координатами центра (u_c, v_c) и радиусом ρ:

$$u_c = \frac{1 + \operatorname{tg}^2(\omega_c T/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(\omega_c T/2)} = \sec \omega_c T, \quad v_c = 0,$$
$$\rho = \frac{2 \operatorname{tg}(\omega_c T/2)}{1 - \operatorname{tg}^2(\omega_c T/2)} = \operatorname{tg} \omega_c T. \qquad (3.37)$$

Для нечетных значений n упомянутые $2n$ полюсов в p-плоскости имеют следующие координаты x и y:

$$x_m = \operatorname{tg}\frac{\omega_c T}{2} \cos\frac{m\pi}{n}, \qquad m = 0, 1, \ldots, 2n-1 \qquad (3.38)$$
$$y_m = \operatorname{tg}\frac{\omega_c T}{2} \sin\frac{m\pi}{n}.$$

Для четных значений n координатами являются

$$x_m = \operatorname{tg}\frac{\omega_c T}{2}\cos\frac{2m+1}{2n}\pi,$$

$$m = 0,\ 1,\ldots,\ 2n-1 \qquad (3.39)$$

$$y_m = \operatorname{tg}\frac{\omega_c T}{2}\sin\frac{2m+1}{2n}\pi.$$

Из (3.38) и (3.39) можно рассчитать координаты соответствующих полюсов в плоскости z:

$$u_m = \frac{2\left[1-\operatorname{tg}^2(\omega_c T/2)\right]}{1-2\operatorname{tg}(\omega_c T/2)\cos(m\pi/n)+\operatorname{tg}^2(\omega_c T/2)},$$

$$v_m = \frac{2\operatorname{tg}(\omega_c T/2)\sin(m\pi/n)}{1-2\operatorname{tg}(\omega_c T/2)\cos(m\pi/n)+\operatorname{tg}^2(\omega_c T/2)}, \qquad (3.40)$$

$$m = 0,1,\ldots,\ 2n-1.$$

Заменяя $m\pi/n$ на $(2m+1)\pi/2n$, получаем эквивалентные формулы для четных n.

Пример. Найти полюсы и нули квадрата модуля передаточной функции для фильтра нижних частот, имеющего затухание 3 *дб* на частоте 1250 *гц* и затухание по крайней мере 20 *дб* на частоте 2000 *гц*. Пусть частота дискретизации составляет 10 000 *гц*. Граничная частота 1250 *гц* соответствует величине $\omega_c T = 45°$. Частота 2000 *гц* соответствует значению $\omega T = 72°$.

Квадрат модуля передаточной функции (3.31) принимает вид

$$|H(e^{j\omega T})|^2 = \frac{1}{1+\dfrac{\operatorname{tg}^{2n}(\omega T/2)}{\operatorname{tg}^{2n}(\pi/8)}}. \qquad (3.41)$$

Соответствующее значение n в (3.41) составляет $n=4$, оно получается, если положить $\omega T = 72°$ и $|H(e^{j\omega T})|^2 = 0{,}01$, что соответствует условию затухания на 20 *дб*. Восемь полюсов в плоскости p находятся из (3.39). Теперь можно использовать выражения (3.40) для нахождения полюсов в плоскости z, показанных на рис. 3.14. На этом рисунке показано $2n$ нулей, расположенных в точке $z=-1$, которые непосредственно следуют из (3.32). Таким образом, квадрат модуля передаточной функции полностью определен в виде расположения полюсов и нулей в плоскости z.

В приложении к данной главе дан анализ необходимых зависимостей между заданным квадратом модуля передаточной функции и определяемым этой функцией цифровым фильтром. Показано, что для того чтобы

обеспечить реализуемость квадрата модуля передаточной функции, любому полюсу внутри единичной окружности (например, z_4 на рис. 3.14) должен соответствовать другой полюс вне этой окружности, характеризующийся тем же углом и модулем, обратным по величине модулю первого полюса.

Так, если $z_4 = re^{j\psi}$, то должен существовать полюс (в данном случае это полюс z_8) вида $(1/r)e^{j\psi}$. Кроме того, все полюсы должны состоять из комплексно-сопря-

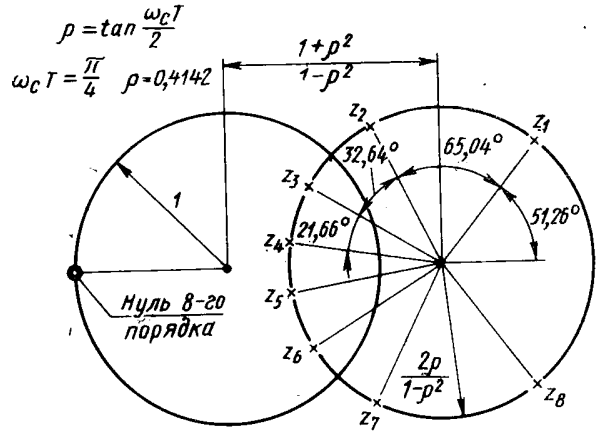


Рис. 3.14. Полюсы и нули цифровых фильтров Баттерворта.

женных пар. Следовательно, цифровой фильтр, соответствующий рис. 3.14, имеет сопряженные полюсы z_4, z_5 и z_3, z_6.

Аргументация, приведенная выше, справедлива также и в отношении нулей, включая частный случай нулей на действительной оси. На рис. 3.14 все восемь нулей расположены в точке $z=-1$. Полученный фильтр имеет четыре нуля при $z=-1$.

Если квадрат модуля передаточной функции задается уравнением

$$|H(e^{j\omega T})|^2 = \frac{1}{1+\varepsilon^2 V_n^2\left[\dfrac{\operatorname{tg}(\omega T/2)}{\operatorname{tg}(\omega_c T/2)}\right]}, \qquad (3.42)$$

то можно показать, что полюсы для $p=(z-1)/(z+1)$ лежат на эллипсе в p-плоскости, который имеет те же

свойства, что и для фильтра Чебышева на рис. 3.8. Используя обозначения § 3.8 и рис. 3.14, можно записать выражения для составляющих в плоскости p:

$$x = a \operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2} \cos\theta, \qquad y = b \operatorname{tg} \frac{\omega_c T}{2} \sin\theta. \tag{3.43}$$

Подставляя (3.43) в (3.35), получаем

$$u = \frac{2[1 - a \operatorname{tg}(\omega_c T/2)\cos\theta]}{[1 - a \operatorname{tg}(\omega_c T/2)\cos\theta]^2 + b^2 \operatorname{tg}^2(\omega_c T/2)\sin^2\theta} - 1,$$

$$v = \frac{2b \operatorname{tg}(\omega_c T/2)\sin\theta}{[1 - a \operatorname{tg}(\omega_c T/2)\cos\theta]^2 + b^2 \operatorname{tg}^2(\omega_c T/2)\sin^2\theta}. \tag{3.44}$$

На рис. 3.15 показано отображение в плоскости z для случая, когда $a \operatorname{tg}(\omega_c T/2) = 0{,}5$, а $b \operatorname{tg}(\omega_c T/2) = 1$. Эллипс на рис. 3.8 отображается в кривую, подобную кар-

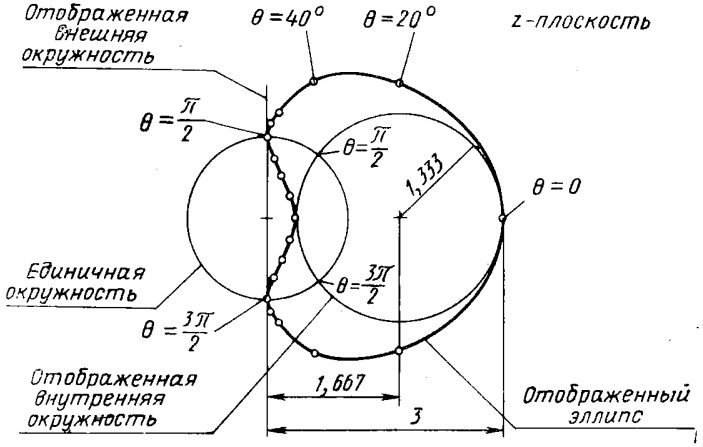


Рис. 3.15. Отображение фильтра Чебышева в z-плоскость.

диоиде на рис. 3.15, а внутренняя окружность на рис. 3.8 — в окружность, показанную на рис. 3.15 справа. Внешняя окружность на рис. 3.8 отображается в окружность бесконечного радиуса, показанную на рис. 3.15 в виде прямой линии. Точки, указанные на отображенном эллипсе (рис. 3.15), соответствуют точкам, вычисленным согласно (3.44).

3.10. МЕТОД 3. РАСЧЕТ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ ПУТЕМ БИЛИНЕЙНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУНКЦИИ НЕПРЕРЫВНОГО ФИЛЬТРА

В предыдущем параграфе было показано, каким образом могут быть найдены полюсы и нули цифрового фильтра с соответствующим квадратом модуля передаточной функции. Описанные методы полностью подобны математическим методам расчета аналоговых фильтров, которые достигли высокой степени совершенства. Для многих задач проектирования цифровых фильтров подстановка (3.33) преобразует задачу расчета цифрового фильтра в задачу, которая, по существу, идентична некоторой уже решенной задаче расчета аналогового фильтра. Например, задача нахождения положения полюсов (3.32) и (3.42) с помощью (3.33) преобразуется в уже решенные задачи нахождения положения полюсов аналоговых фильтров Баттерворта и Чебышева. Это приводит к другому способу проектирования цифровых фильтров, при котором расчет производится непосредственно на s-плоскости.

Предположим, что имеется стабильный аналоговый фильтр, описываемый с помощью $H(s)$. Его частотная характеристика находится путем вычисления $H(s)$ в точках на мнимой оси плоскости s. Если в функции $H(s)$ заменить s рациональной функцией от z, которая отображает мнимую ось в s-плоскости на единичную окружность в z-плоскости, то полученная в результате функция $H'(z)$, вычисленная вдоль единичной окружности, примет те же значения, что и функция $H(s)$ при вычислении вдоль мнимой оси.

Это не означает, что данные функции одинаковы, так как частотные шкалы искажены одна относительно другой. Сказанное легко проиллюстрировать с помощью простейшей рациональной функции, которая отображает ось $j\omega$ на единичную окружность,

$$s \to \frac{z-1}{z+1}. \tag{3.45}$$

Обозначим аналоговую текущую частоту через ω_A, а цифровую текущую частоту — через $\omega_D T$. Тогда при

$$\omega_A = \operatorname{tg} \frac{\omega_D T}{2} \tag{3.46}$$

функции $H(\omega_A)$ и $H'(\omega_D T)$ принимают одни и те же значения.

Заметим, что преобразование (3.45) приводит к отношению полиномов от z. Поскольку оно отображает левую полуплоскость s на внутреннюю часть единичного круга, то можно быть уверенным в том, что это преобразование во всех случаях будет давать $H'(z)$, соответствующие реализуемым стабильным цифровым фильтрам.

Выражения (3.45) и (3.46) приводят к расчету цифровых фильтров с помощью аналоговых методов. Процедура расчета заключается в следующем:

1. Задают критические частоты и диапазоны (полосу пропускания или непропускания, точку максимального затухания и т. д.) требуемого цифрового фильтра и обозначают их через $\omega_{D_i} T$. Вычисляют новый набор частот ω_{A_i} с помощью соотношения

$$\omega_{A_i} = \operatorname{tg} \frac{\omega_{D_i} T}{2}. \qquad (3.47)$$

2. Рассчитывают передаточную функцию $H(s)$, имеющую на новых частотах и диапазонах свойства цифрового фильтра. Ясно, что в синтезе $H(s)$ нет необходимости.

3. Заменяют величину s в функции $H(s)$ на $(z-1):(z+1)$ и выполняют алгебраические действия, необходимые для того, чтобы выразить полученную функцию $H'(z)$ в виде отношения полиномов; это приводит к требуемому цифровому фильтру.

Этот метод иллюстрируется следующими примерами.

Пример 1. Рассчитать цифровой фильтр, имеющий частоту дискретизации 10 *кгц*, плоскую частотную характеристику в пределах 3 *дб* в полосе пропускания от 0 до 1000 *гц* и затухание более 10 *дб* на частотах выше 2000 *гц*. Характеристика фильтра в полосе пропускания и полосе непропускания должна быть монотонной.

Из рис. 3.6 мы видим, что в аналоговой области указанным требованиям удовлетворяет фильтр Баттерворта. Критическими частотами являются

$$\omega_{D_1} T = 2\pi \times 0{,}1 \quad \text{и} \quad \omega_{D_2} T = 2\pi \times 0{,}2.$$

1) Вычисляем ω_{A_1}, ω_{A_2}:

$$\omega_{A_1} = \operatorname{tg} \frac{2\pi \times 0{,}1}{2} = 0{,}3249, \qquad \omega_{A_2} = \operatorname{tg} \frac{2\pi \times 0{,}2}{2} = 0{,}7265.$$

2) Рассчитываем фильтр Баттерворта с затуханием 3 *дб* на частоте $\omega_c = \omega_{A_1} = 0{,}3249$. Отношение $\omega_{A_2}/\omega_c = 2{,}235$. Для того чтобы

найти порядок n, решаем уравнение $1+2{,}235^{2n}=10$ и получаем $n=2$. Фильтр Баттерворта второго порядка с частотой $\omega_c=0{,}3249$ имеет полюсы в точках $s=0{,}3249 \times (-0{,}707 \pm j0{,}707) = -0{,}23 \pm j0{,}23$ и не имеет нулей. Следовательно,

$$H(s) = \frac{s_1 s_2}{(s+s_1)(s+s_2)} = \frac{2 \times 0{,}23^2}{(s+0{,}23)^2 + 0{,}23^2} = \frac{0{,}1058}{s^2 + 0{,}46s + 0{,}1058}.$$

3) Заменяем s на $(z-1)/(z+1)$, что дает

$$H'(z) = \frac{0{,}1058}{(z-1)^2/(z+1)^2 + 0{,}46(z-1)/(z+1) + 0{,}1058},$$

$$H'(z) = \frac{0{,}1058\,(z^2+2z+1)}{1{,}5658z^2 - 1{,}7884z + 0{,}6458} = \frac{0{,}067569\,(z^2+2z+1)}{z^2 - 1{,}14216z + 0{,}412441}.$$

Это и есть требуемый цифровой фильтр. В нем предусматривается выполнение трех операций умножения для вычисления каждого выходного отсчета сигнала или, если можно пренебречь усилением на постоянном токе, только две операции умножения.

Пример 2. Рассчитать цифровой фильтр, имеющий полосу пропускания от 0 до 100 *гц* при колебаниях характеристики 0,5 *дб*, которая затем монотонно спадает по крайней мере до —19 *дб* на частоте 183 *гц*. Частота дискретизации равняется 1000 *гц*.

1) Критические частоты 100 и 183 *гц* преобразуем в аналоговые частоты:

$$\omega_c = \operatorname{tg} \frac{2\pi \times 100}{2 \times 1000} = \operatorname{tg} 18^\circ = 0{,}32492,$$

$$\omega_a = \operatorname{tg} \frac{2\pi \times 183}{2 \times 1000} = 0{,}6498 \approx 2\omega_c.$$

2) Рассчитываем далее аналоговый фильтр из класса фильтров Чебышева. Колебаниям 0,5 *дб* соответствует величина $\varepsilon^2=0{,}1220184$. Чтобы найти требуемый порядок фильтра, решаем уравнение $1+\varepsilon^2 V_n^2(\omega_a/\omega_c) \geqslant 10^{1,9}$. Наименьшее n, удовлетворяющее этому соотношению, равно трем. Фильтр Чебышева с единичной полосой при колебаниях характеристики 0,5 *дб* определяется соотношением

$$H_1(s) = \frac{\text{const}}{s^3 + 1{,}252913s^2 + 1{,}5348954s + 0{,}7156938}.$$

Заменяя s на s/ω_c, получаем

$$H(s) = \frac{0{,}0255842155}{s^3 + 0{,}4127346s^2 + 0{,}16656307s + 0{,}0255842155},$$

где постоянная в числителе подбирается таким образом, чтобы при $s=0$ коэффициент передачи равнялся единице.

3) Заменяем s на $(z-1)/(z+1)$, что дает после умножения числителя и знаменателя на $(z+1)^3$ для требуемого цифрового фильтра

$$H'(z) = \frac{0{,}0159414914\,(z^3+3z^2+3z+1)}{z^3 - 1{,}974860236z^2 + 1{,}524277838z - 0{,}45376786}.$$

Это соотношение определяет вид требуемого цифрового фильтра.

Стоит указать на полезную геометрическую интерпретацию третьего пункта методики расчета. Замена s на $(z-1)/(z+1)$ представляет собой отображение точек плоскости s на плоскость z. В приводимой ниже таблице даются соответствия для некоторых критических точек в плоскостях s и z.

Плоскость s	Плоскость z
$0+j0$	$1+j0$
∞	$-1+j0$
$0+j1$	$0+j1$
$0-j1$	$0-j1$
$-1+j0$	$0+j0$
Точка на действительной оси	Точка на действительной оси
Точка на мнимой оси	Точка на единичной окружности
Точка на любой прямой	Точка окружности, проходящей через $-1+j0$

Сходное с этим отображение оказалось полезным в ряде приложений. Для его выполнения может быть использована номограмма, которая известна под названием диаграммы Смита (рис. 3.16).

Положение любой точки $-a+jb$ в плоскости s (в ее левой половине) используется для нахождения соответствующего положения точки в плоскости z следующим образом:

1) Отмечается a — точка на центральной линии. Все точки на окружности, проходящей через эту точку, соответствуют точкам плоскости s, имеющим действительную часть, равную $-a$.

2) Отмечается b — точка на периметре внешней окружности. Для $b>0$ используется верхняя полуокружность, для $b<0$ — нижняя полуокружность. Дуга, проходящая через отмеченную точку, соответствует точкам плоскости s, имеющим мнимую часть b.

3) Точка пересечения окружности, соответствующей значению a, с дугой, соответствующей значению b, представляет собой точку в плоскости z, соответствующую $-a+jb$ в плоскости s.

Диаграмма Смита полезна в том случае, когда функция в плоскости s задана с помощью полюсов и нулей или полюсов и вычетов, и особенно в том случае, если именно в такой форме желательно иметь представление в плоскости z.

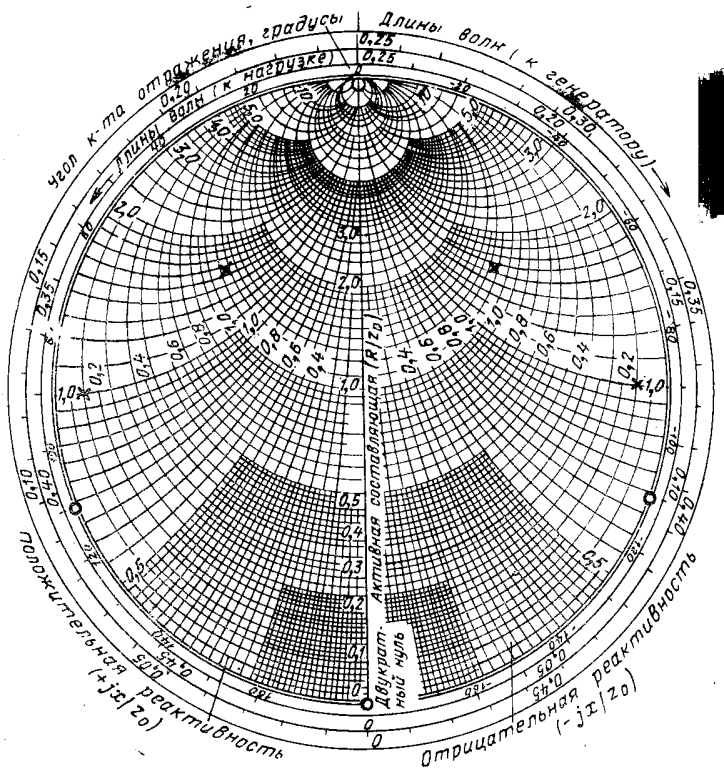


Рис. 3.16. Диаграмма Смита.

Пример. Рассчитать цифровой фильтр верхних частот с затуханием в полосе непропускания (0—500 *гц*) более 36 *дб* и с пульсациями характеристики в полосе пропускания (выше 660 *гц*) 1,25 *дб*. Частота дискретизации 2,5 *кгц*.

1) Критические частоты, пересчитанные применительно к аналоговому фильтру, дают границу полосы непропускания 0,72654 *рад/сек* и границу полосы пропускания 1,09 *рад/сек*.

2) Этим требованиям удовлетворяет эллиптический фильтр четвертого порядка. Здесь приводятся только результаты. Полюсы будут в точках $s=-1{,}1915812\pm j1{,}5528835$ и $-0{,}11078815\pm j1{,}09445605$,

а нули — в точках $s=0$ (двойной) и $\pm j0{,}69117051$. Положение этих точек указано на диаграмме Смита (рис. 3.16) крестиками (полюсы) и кружочками (нули).

С помощью линейки и транспортира находим, что нули в плоскости z оказываются в точках $z=1$ (двойной) и $e^{\pm j69{,}3°}$, а полюсы — в точках $z=0{,}586e^{\pm j131{,}6°}$ и $0{,}895e^{\pm j90{,}6°}$. Таким образом, функция $H(z)$, определяющая фильтр, имеет следующий вид:

$$H(z)=\frac{(z-1)^2(z^2-0{,}707z+1)}{(z^2+0{,}777z+0{,}3434)(z^2+0{,}01877z+0{,}801)}.$$

Основная трудность, связанная с применением метода диаграммы Смита, проиллюстрированная примером, заключается в том, что положение полюсов нельзя определить с высокой точностью. В порядке компенсации этот метод дает возможность лучше объяснять работу цифрового фильтра при изложении основ проектирования этих фильтров. Если требуется более высокая точность, то полюсы в плоскости z могут быть рассчитаны, исходя из положения полюсов в плоскости s, с помощью соотношения $z=(1+s)/(1-s)$.

Используемая в преобразовании $s\longrightarrow(z-1)/(z+1)$ функция не является единственной рациональной функцией z, отображающей мнимую ось плоскости s на единичную окружность. Другим преобразованием такого же типа, например, является

$$s\longrightarrow\frac{z^2-2z\cos\psi_0T+1}{z^2-1}. \qquad (3.48)$$

При этом преобразовании мнимая ось в плоскости s отображается одновременно на верхнюю и на нижнюю части дуги единичной окружности. Начало координат в плоскости s отображается на две точки $e^{\pm j\psi_0T}$.

Таким образом, (3.48) преобразует функцию частоты $H(\omega_A)$ в $H'(\omega_DT)$, где

$$\omega_A=\frac{\cos\psi_0T-\cos\omega_DT}{\sin\omega_DT}. \qquad (3.49)$$

Это означает, что (3.48) преобразует функцию аналогового фильтра нижних частот $H(\omega_A)$ в функцию цифрового полосового фильтра $H'(\omega_DT)$. Соотношение (3.48) можно, таким образом, использовать при расчете полосовых цифровых фильтров, который производится в следующем порядке:

1) Выбирается центральная частота ψ_0T для цифрового фильтра *). Это необходимо для формулировки заданных условий и для облегчения выбора других параметров. Исходя из значений критических частот, определяемых условиями, которые предъявляются к цифровому фильтру, с помощью (3.49) вычисляются критические частоты требуемого аналогового фильтра. Соотношение (3.49) часто дает отрицательные частоты, что вполне допустимо, поскольку $H(\omega_A)$ должна быть четной функцией ω_A.

2) Рассчитывается аналоговый фильтр $H(s)$, соответствующий заданным условиям, пересчитанным к аналоговому фильтру. По-видимому, одно или несколько условий окажутся лишними.

3) Производится замена s в $H(s)$ согласно соотношению

$$s=\frac{z^2-2z\cos\psi_0T+1}{z^2-1}$$

и выполняются необходимые алгебраические действия, в результате которых $H'(z)$ преобразуется в отношение полиномов, которое выражает требуемый фильтр.

Одного примера будет достаточно для иллюстрации данного метода.

Пример. Рассчитать полосовой цифровой фильтр с частотой дискретизации 1000 *гц*, имеющий характеристику в полосе пропускания от 100 до 400 *гц* без пульсаций при затухании от 0 до 3 *дб*. На частотах 450 и 45 *гц* затухание должно быть не менее 20 *дб*, а вне этих частот должен быть монотонный спад.

1) Величину ψ_0T можно выбрать так, что две точки характеристики аналогового фильтра для уровня 3 *дб* будут соответствовать расстройкам, одинаковым по величине и противоположным по знаку. Если трехдецибельные точки цифрового фильтра есть L_1 и L_2, то из (3.49) видно, что ψ_0T должно быть выбрано таким образом, чтобы

$$\cos\psi_0T=\frac{\cos\frac{1}{2}(L_1+L_2)}{\cos\frac{1}{2}(L_1-L_2)}. \qquad (3.50)$$

Из (3.50) получаем, что в данном случае $\cos\psi_0T=0$. Это означает, что преобразование критических частот цифрового фильтра в критические частоты аналогового фильтра принимает вид

$$\omega_A=-\operatorname{ctg}\omega_DT.$$

*) По существу, требуется знать только величину $\cos\psi_0T$.

Теперь трехдецибельные точки преобразуются следующим образом:

$$\omega_{3дб} = \pm 1{,}3764.$$

Точки, соответствующие уровню 20 *дб*, не одинаковы по величине и равны

$$\omega_{s1} = -3{,}442, \quad \omega_{s2} = 3{,}078.$$

2) Далее рассчитывается монотонный фильтр с затуханием 0—3 *дб* в области $0<\omega<1{,}3764$. Затухание более 20 *дб* должно быть на частоте $\omega=3{,}078$, что автоматически обеспечивает выполнение требований при $\omega=3{,}442$. В данном случае, по-видимому, подойдет фильтр типа Баттерворта с частотой среза $\omega_c=1{,}3764$. Для отношения $\omega/\omega_c=2{,}23$ требуется затухание 20 *дб*. Порядок n вычисляем из соотношения

$$1+(2{,}23)^{2n} \geqslant 100.$$

Ясно, что вполне достаточно взять $n=3$. Фильтр Баттерворта третьего порядка с единичной полосой определяется функцией

$$H_1(s) = \frac{K}{s^3+2s^2+2s+1}.$$

Произведя замену s на $s/1{,}3764$, находим

$$H(s) = \frac{2{,}6075581}{s^3+2{,}7528s^2+3{,}788954s+2{,}6075581}.$$

3) Чтобы определить требуемый цифровой фильтр, положим в выражении для $H(s)$ $s=(z^2+1)/(z^2-1)$. Отметим, что поскольку это приводит к функции от z^2, то рассчитанный цифровой фильтр будет довольно простым:

$$H'(z) = \frac{0{,}256919688\,(z^6-3z^4+3z^2-1)}{z^6-0{,}577263586z^4+0{,}421794133z^2-0{,}056299786}.$$

Если усиление фильтра не имеет значения, то его можно запрограммировать с помощью трех операций умножения на каждый выходной отсчет и небольшого числа операций сложения.

Рассмотренные в этом параграфе методы могут также применяться при проектировании фильтров верхних частот и режекторных фильтров.

3.11. ФИЛЬТРЫ НА ОСНОВЕ ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ

Прежде чем перейти к обсуждению следующего типа фильтров, напомним, что имеется еще один способ аппроксимации произвольных функций — с помощью функций отсчетов *). Так, функция $f(t)$ может быть аппроксимирована во временно́й области с помощью выражения

*) Эти функции часто называют функциями Котельникова. — *Прим. ред.*

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\,\frac{\sin[(2\pi/T)(t-nT)]}{(2\pi/T)(t-nT)}. \qquad (3.51)$$

Кроме того, известно, что $g(t)$ точно равна $f(t)$, если последняя ограничена в полосе частот $1/2T$. Даже если полоса частот функции $f(t)$ не ограничена, то $g(t)$ точно совпадает с $f(t)$ в моменты взятия отсчетов $t=nT$.

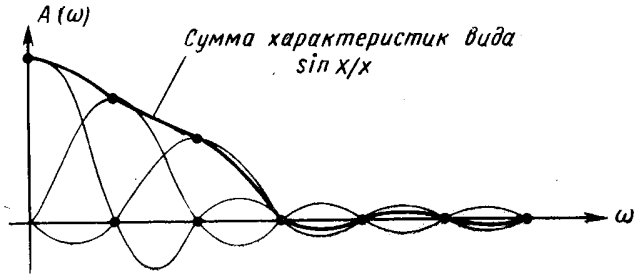


Рис. 3.17. Иллюстрация теоремы отсчетов в частотной области.

Интересно выяснить, может ли теорема отсчетов в частотной области служить в качестве полезной основы для расчета фильтров. Во-первых, необходимо показать, что можно создать *элементарный* фильтр с характеристикой (как функцией частоты), имеющей вид, подобный одной из интерполирующих функций из выражения (3.51), а также с надлежащей фазой так, чтобы выходные сигналы нескольких элементарных фильтров можно было складывать как скалярные величины. Затем необходимо удостовериться, что сумма конечного числа членов выражения, подобного (3.51), в частотной области может дать характеристику фильтра с достаточной избирательностью.

Для примера на рис. 3.17 показана требуемая $|H(e^{j\omega T})|$ и три интерполирующие функции, используемые для аппроксимации $|H(e^{j\omega T})|$.

Рассмотрим теперь схему фильтра, изображенную на рис. 3.18. Амплитуда и фаза $H(s)$ для него определяются выражениями

$$|H(j\omega)| = \frac{2\,|\sin \omega\tau/2|}{\omega}, \qquad \varphi(\omega) = -\frac{\omega\tau}{2}.$$

Эти функции показаны на рис. 3.19 и, как видно, имеют свойства фильтра нижних частот с линейной фазой. Такой подход можно теперь распространить на схему рис. 3.20.

Амплитуды и фазы на выходах каждого резонатора при отсутствии потерь показаны на рис. 3.21. На пятой сверху горизонтальной оси знаками «+» и «—» обозначены случаи, когда выходные сигналы находятся точно в фазе или в противофазе. Сигналы *находятся в противофазе* только в интервалах перекрытия главных лепестков. Поэтому при вычитании двух выходных сигналов, как видно из рис. 3.21, амплитуды $A_i(\omega)$ могут нужным образом *складываться* в интервалах перекрытия и вычитаться вне их. Это дает возможность получить сложную

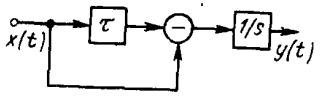


Рис. 3.18. Аналоговый гребенчатый фильтр с компенсацией нуля на постоянном токе.

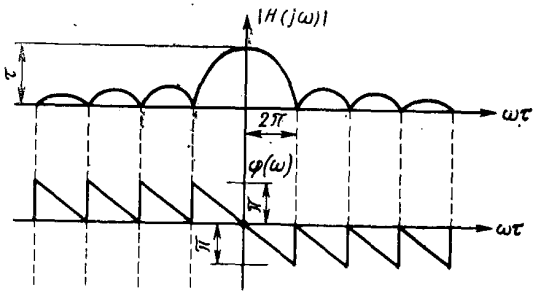


Рис. 3.19. Частотная характеристика фильтра, показанного на рис. 3.18.

амплитудную характеристику $A(\omega)$, которая достаточно постоянна в полосе перекрытия и имеет уменьшенные боковые лепестки. Помимо этого, так как фазы $\varphi_1(\omega)$ и $\varphi_2(\omega)$ — линейные, то выходная фаза $\varphi(\omega)$ должна

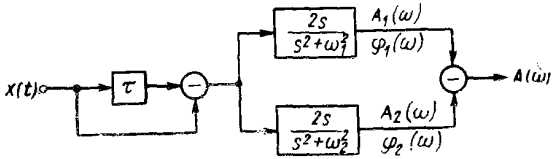


Рис. 3.20. Аналоговый гребенчатый фильтр с нулями, скомпенсированными несколькими резонаторами.

быть также линейной функцией частоты. Распространяя все эти рассуждения на случай n резонаторов без потерь, мы может достигнуть того же эффекта, что и при правильном сложении функций интерполяции вида, показанного на рис. 3.17. Таким образом, можно задать

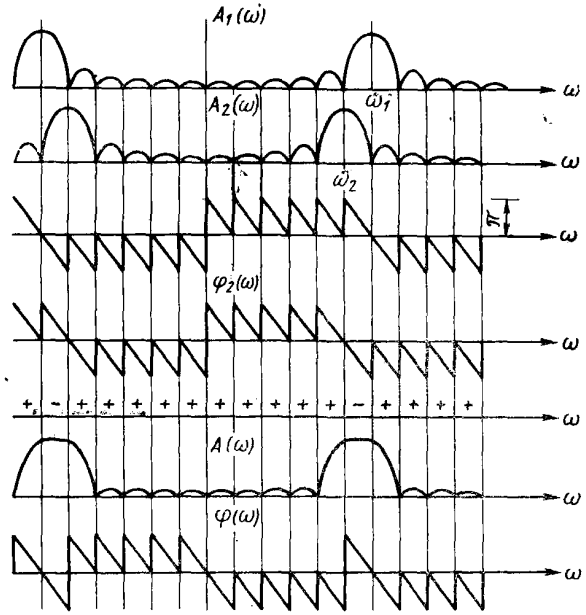


Рис. 3.21. Амплитудные и фазовые функции для рис. 3.20.

произвольный полосовой фильтр с линейной фазой во всем диапазоне частот при помощи дискретизации требуемой амплитудно-частотной характеристики на выбранных равномерно расположенных частотах.

Практическим недостатком этого метода для проектирования аналоговых фильтров является то, что он предполагает применение резонаторов без потерь. В значительной степени это затруднение преодолевается при проектировании цифровых фильтров.

3.12. МЕТОД 4. МЕТОД ЧАСТОТНОЙ ВЫБОРКИ

Разностному уравнению

$$y(nT)=x(nT)-x(nT-mT) \qquad (3.52)$$

соответствует передаточная функция вида $1-z^{-m}$, которая имеет m нулей, расположенных на одинаковых расстояниях друг от друга на единичной окружности в точках

$$z_k = e^{j2\pi k/m}, \quad k=0,\ 1, \ldots,\ m-1. \tag{3.53}$$

Если в (3.52) вычитание заменить сложением, то передаточная функция примет вид $1+z^{-m}$, для которого нули также равномерно расположены на единичной окружности в точках

$$z_k = e^{j\frac{2\pi(k+1/2)}{m}}, \quad k=0,\ 1, \ldots,\ m-1. \tag{3.54}$$

Кривые зависимости амплитуды от частоты для этих фильтров повторяются с периодом $2\pi/m$ *рад*, поэтому они являются гребенчатыми фильтрами и могут быть включены в группу цифровых устройств, привлекающих особое внимание.

Прежде чем говорить об этом методе, рассмотрим, каково практическое значение уравнения (3.52). Если следующие один за другим значения $x(nT)$ мыслятся как содержимое регистров запоминающего устройства вычислительной машины, то ясно, что для выполнения вычислений, предусматриваемых уравнением (3.52), необходимо занять в буферном запоминающем устройстве m свободных регистров. По сравнению с тем, что требуется для решения разностных уравнений второго порядка, такой объем памяти обычно составляет заметную величину. Таким образом, возможное практическое применение фильтров, которые будут описаны, ограничено системами, в которых имеется необходимый объем памяти, или системами, в которых многие фильтры используют общий входной сигнал. Важно отметить, что задержки, которые подразумеваются в уравнении (3.52), могут быть осуществлены в виде цифровых линий задержки, которые представляют собой сравнительно недорогие типы запоминающих устройств.

Простой резонатор можно соединить каскадно с гребенчатым фильтром. Предположим, что резонатор содержит два комплексно-сопряженных полюса, которые расположены точно на единичной окружности (положение нулей резонатора пока обсуждать не будем). Предположим, что угол полюса резонатора $\omega_r T$

таков, что этот полюс совпадает с нулем гребенчатого фильтра:

$$\omega_r T = \begin{cases} 2\pi k/m & \text{для фильтра первого типа;} \\ 2\pi(k+1/2)/m & \text{для фильтра второго типа.} \end{cases}$$

Полюсы такого резонатора компенсируют k-й и сопряженные с ним нули гребенчатого фильтра. Исходя из этого, мы будем относить резонатор, используемый для компенсации k-го нуля, к k-му элементарному фильтру. Последовательное соединение элементарного и гребенчатого фильтров дает составной фильтр, обладающий следующими свойствами:

1) Импульсная характеристика имеет конечную длительность mT.

2) Амплитудно-частотная характеристика определяется выражением

$$|H(e^{j\omega T})| = \left| \frac{\sin(m\omega T/2)}{\cos\omega T - \cos\omega_r T} \right|,$$

равным нулю на всех угловых частотах, на которых коэффициент передачи гребенчатого фильтра равен 0, исключая $\omega_r T$. При $\omega_r T$ характеристика равна $(m/2)\operatorname{cosec}\omega_r T$.

3) Фазочастотная характеристика абсолютно линейна, за исключением разрывов, составляющих π *рад*. Эти разрывы имеют место в точках, где амплитудная характеристика проходит через нулевые значения.

4) Разность фаз для двух составных фильтров с резонансными частотами $\omega_r T$ и $\omega_{r+1} T$ равна π для $\omega_r < \omega < \omega_{r+1}$ и равна нулю вне этих границ.

5) Амплитудная характеристика любого составного фильтра на резонансных частотах всех других составных фильтров принимает нулевые значения.

При больших m амплитудная характеристика каскадного фильтра приближается по форме к кривой

$$\left[\frac{\sin(\omega-\omega_r)T}{(\omega-\omega_r)T} + \frac{\sin(\omega+\omega_r)T}{(\omega+\omega_r)T} \right].$$

Эти свойства наводят на мысль о том, что путем сложения взвешенных выходных сигналов каскадно соединенных гребенчатых и элементарных фильтров может быть получена любая желаемая амплитудная характеристика точно таким же образом, как любая временная функция «с ограниченным спектром» может

быть сформирована с помощью взвешенной суммы задержанных функций вида $(\sin t/t)$. Рассмотрим несколько подробнее этот подход, который назовем *частотной выборкой*.

Достаточно *узкополосная* функция частотной характеристики (такая, что частотная характеристика является достаточно гладкой функцией частоты) подвергается дискретизации в равноотстоящих точках с угловыми частотами

$$\omega_k T = \frac{2\pi k}{m} \text{ или } \frac{2\pi (k+1/2)}{m}, \qquad k = 0, 1, \ldots, m-1,$$

в зависимости от вида используемого гребенчатого фильтра. Положим, что отсчетное значение амплитуды на частоте $\omega_k T$ равно W_k. Чтобы получить *элементарную частотную характеристику*, которая принимала бы значение W_k на угловой частоте $\omega_k T$ и нулевое значение на всех других дискретных частотах, элементарный фильтр с резонансной частотой $\omega_k T$ каскадно соединяется с гребенчатым фильтром, который имеет задержку mT и коэффициент передачи $W_k \sin \omega_k T$.

Так как фазы в последовательности элементарных фильтров при резонансе различаются на π, то коэффициенты передачи всех элементарных фильтров с нечетными номерами следует умножить на -1. Заданный входной сигнал фильтра подается на гребенчатый фильтр, который работает совместно со всеми элементарными фильтрами, имеющими необходимые усиления (у элементарных фильтров с нечетными номерами знаки изменяются на обратные). Выходные сигналы всех элементарных фильтров с надлежащими коэффициентами передачи складываются и в результате получается требуемый выходной сигнал фильтра. Результирующий фильтр имеет импульсную характеристику с длительностью mT, линейную фазочастотную характеристику и амплитудную характеристику, которая на частотах отсчетов удовлетворяет заданным условиям и плавно соединяет эти отсчетные точки. Число типов фильтров, которые могут быть запрограммированы по указанному методу, довольно велико.

Прежде чем пользоваться методом частотной выборки, следует рассмотреть некоторые практические вопросы. Один из них состоит в том, что из-за квантования резонансные полюсы элементарного фильтра не могут

в точности компенсировать нули гребенчатого фильтра. Поэтому целесообразно несколько переместить как нули гребенчатого фильтра, так и полюсы элементарного фильтра внутрь единичного круга таким образом, чтобы их радиус составлял около $e^{-aT} = 1 - 2^{-26}$.

Успешно программировались фильтры, полюсы и нули которых располагались на окружностях с радиусами от $1 - 2^{-12}$ до $1 - 2^{-27}$, причем в этих условиях свойства фильтра изменялись мало.

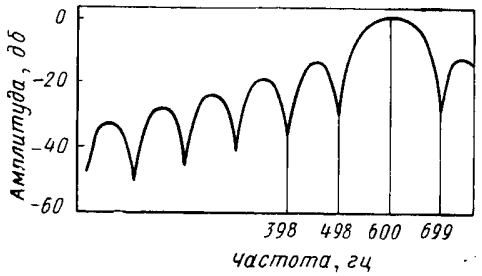


Рис. 3.22. Измеренная частотная характеристика гребенчатого фильтра, соединенного последовательно с цифровым резонатором.

Вернемся к нулям резонаторов, которые особенно важны для полосовых фильтров. В полосе пропускания отсчеты W_k обычно одинаковы. Поэтому желательно, чтобы при резонансе коэффициенты передачи всех элементарных фильтров были равны. Если нуль помещен в точку $(\cos \omega_k T) e^{-aT}$, то коэффициент передачи каждого элементарного фильтра, соединенного каскадно с гребенчатым фильтром, принимает значение $m/2$, что влияет на амплитудно-частотную и фазочастотную характеристики, но при больших m этим можно пренебречь. Таким образом, z-преобразование для модифицированного гребенчатого фильтра принимает вид

$$H(z) = 1 - e^{-maT} z^{-m}, \tag{3.55}$$

а для модифицированного k-го элементарного фильтра

$$H_k(z) = \frac{1 - e^{-aT} \cos \omega_k T z^{-1}}{1 - 2e^{-aT} \cos \omega_k T z^{-1} + e^{-2aT} z^{-2}}. \tag{3.56}$$

Следует отметить, что введение дополнительного нуля не требует еще одной операции умножения, поскольку удвоенный коэффициент числителя имеется также и

в знаменателе. Характеристика фильтра вида (3.55), соединенного каскадно с фильтром вида (3.56), показана на рис. 3.22. Как показано в § 3.6 (случай I), можно получить еще более равномерную частотную характеристику, убрав e^{-aT} из числителя (3.56).

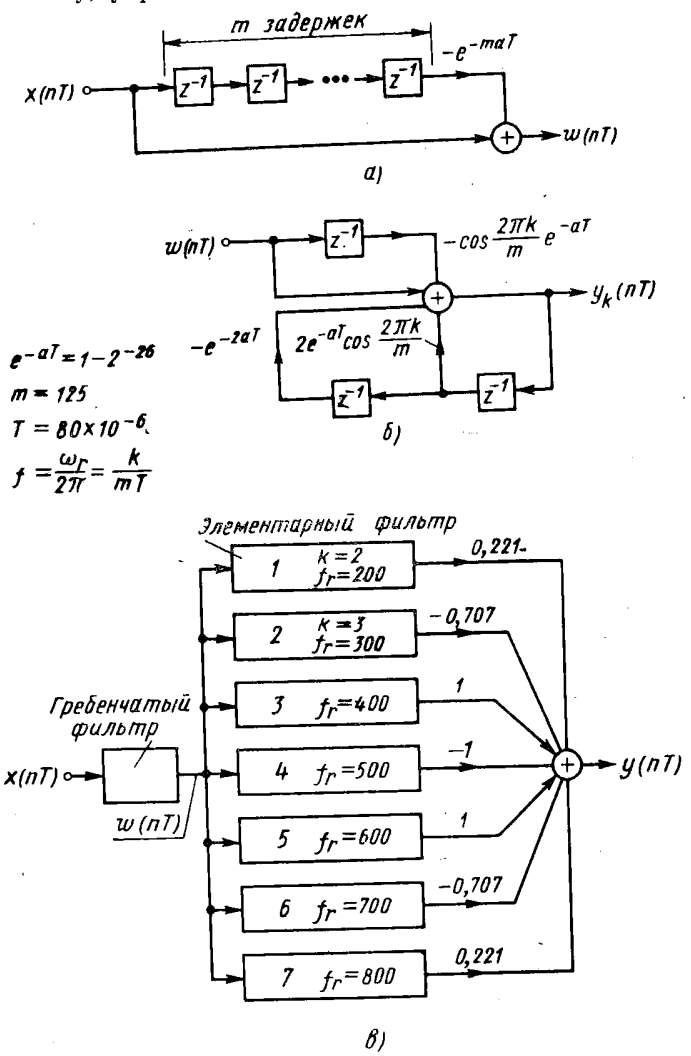


Рис. 3.23. Полосовой фильтр, рассчитанный методом частотной выборки.

Пример. Набор полосовых фильтров. Требуется рассчитать набор полосовых фильтров (с общим входом), каждый из которых имеет полосу 400 *гц*, так, чтобы перекрывалась полоса от 300 до 3100 *гц*. Фильтры должны быть настолько избирательны, насколько это возможно, но с минимальной длительностью пульсаций. Следующее требование заключается в том, чтобы характеристики соседних фильтров пересекались в точках с затуханием 3 *дб* по отношению к коэффициенту передачи в середине полосы. Ни один из стандартных методов расчета не обеспечивает одновременно удовлетворительную избирательность и малую продолжительность пульсаций.

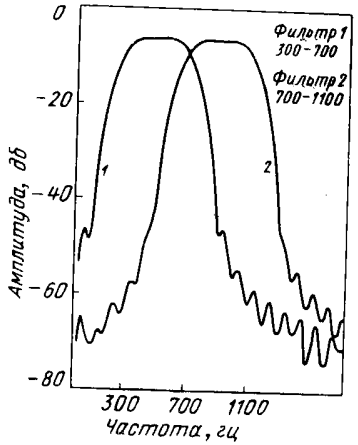


Рис. 3.24. Характеристика полосового фильтра, рассчитанного методом частотной выборки.

Выбранные фильтры были фильтрами на основе частотной выборки; каждый из них составлен из 7 элементарных фильтров. Последовательные нули отстоят друг от друга на 100 *гц*. Так как частота дискретизации равна 12,5 *кгц*, то $m=125$. Такой фильтр в общем виде имеет z-преобразование

$$H(z)=(1-e^{-maT}z^{-m})\times$$
$$\times\sum_{k=r}^{r+6}(-1)^k\frac{1-e^{-aT}\cos(2\pi k/m)z^{-1}}{1-2e^{-aT}\cos(2\pi k/m)z^{-1}+e^{-2aT}z^{-2}}W_k. \quad (3.57)$$

Структура фильтра полностью определяется выбором r и набора чисел W_k в (3.57). Так как трехдецибельные точки пересечения должны отстоять друг от друга на 400 *гц*, то W_{r+1} и W_{r+5} принимаются равными 0,707. Три центральных члена имеют $W_k=1$. Коэффициенты передачи оконечных членов W_r и W_{r+6}, равные 0,221, были найдены эмпирически, исходя из условия удовлетворительного затухания вне полосы.

Структура фильтра с полосой от 300 до 700 *гц* показана на рис. 3.23. На рис. 3.24 представлены экспериментальные частотные характеристики этого фильтра, а также следующего за ним более высокочастотного фильтра (с полосой от 700 до 1100 *гц*).

3.13. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

1. Программа расчета цифровых эллиптических фильтров

В этом примере мы кратко опишем некоторые подробности вычислительной программы, с помощью которой рассчитываются полюсы и нули эллиптического цифрового низкочастотного фильтра по

заданным параметрам. Формулы, используемые в этом параграфе, основываются на теоретических предпосылках § 3.8. Принято, что переход от аналогового фильтра к цифровому совершается с помощью билинейных преобразований. Это означает (в соответствии с результатами § 3.10), что граничная угловая частота ω_c заменяется на $\operatorname{tg}(\omega_c T/2)$ и ω_r — на $\operatorname{tg}(\omega_r T/2)$. Предположим, что требуется, чтобы пульсации характеристики в полосе пропускания составляли 0,5 *дб*, а в полосе непропускания 60 *дб* относительно значения на нулевой частоте. Граничная угловая частота ω_c задается $2\pi \times 2000$ *рад/сек*, и начало полосы запрета $\omega_r = 2\pi \times 2200$ *рад/сек*. Для рис. 3.10 это означает, что $A = 1000$ и $\varepsilon^2 = 0{,}122$, $\varepsilon = 0{,}349285$. Выбираем $T = 10^{-4}$ *сек*.

1) Найдем k и k_1*):

$$k_1 = \frac{\varepsilon}{\sqrt{A^2 - 1}} = 3{,}4928514 \times 10^{-4},$$

$$k = \frac{\operatorname{tg}(\omega_c T/2)}{\operatorname{tg}(\omega_r T/2)} = 0{,}87823911.$$

2) Вычислим полные эллиптические интегралы $K(k)$, $K(k_1)$, $K'(k)$, $K'(k_1)$. Алгоритм вычисления полных эллиптических интегралов дается Хэстингсом [6]. Таблицы этих функций можно найти у Абрамовича [1]. В нашем примере

$$K(k) = 2{,}1965323, \qquad K(k_1) = 1{,}5707964,$$

$$K'(k) = 1{,}6743388, \qquad K'(k_1) = 9{,}3459166.$$

3) Найдем порядок требуемого N. Используя формулу (3.27):

$$N = \frac{K'(k_1)\,K(k)}{K(k_1)\,K'(k)},$$

получим $N = 7{,}80519$. Выбираем $N = 8$, так как N должно быть целым числом. Для большинства применений k близко к единице и k_1 много меньше единицы; в этих случаях требуемый порядок N может быть вычислен приближенно по формуле

$$N \approx \frac{2}{\pi^2} \ln \frac{4A}{\varepsilon} \ln \frac{8\operatorname{tg}(\omega_c T/2)}{\operatorname{tg}(\omega_r T/2) - \operatorname{tg}(\omega_c T/2)}.$$

4) В случае $k \approx 1$ и $k_1 \ll 1$ для действительной составляющей u_0 полюсов в λ-плоскости справедливо следующее приближенное выражение:

$$u_0 \approx -\frac{K'(k)}{K'(k_1)} \ln(\sec\varphi + \operatorname{tg}\varphi) =$$

$$= -\frac{K'(k)}{K'(k_1)} \ln \frac{\sqrt{(1+\varepsilon^2)} + 1}{\varepsilon} \quad \text{при} \quad \operatorname{tg}\varphi = 1/\varepsilon;$$

$$u_0 = -0{,}31786181.$$

*) Величины, полученные для эллиптических функций в данном и в следующем примерах, являются приближенными. Их точность не соответствует числу приведенных десятичных разрядов.

5) Зная N и u_0, можно быстро определить полюсы и нули в λ-плоскости, как показано на рис. 3.12, который построен для четного N. Чтобы найти соответствующие полюсы и нули в z-плоскости, требуется выполнить преобразования (3.28), которые следуют из билинейного преобразования, определяемого выражением (3.35). Преобразование (3.28) выполняется с помощью (3.29), в котором осуществляется предварительное искажение нормализованного аналогового фильтра путем замены ω_c в (3.29) на $\operatorname{tg}(\omega_c T/2) = 0{,}7265425$. На рис. 3.25 показано схематически расположение этих полюсов и нулей в z-плоскости, а на рис. 3.26 показана соответствующая амплитудно-частотная характеристика. Из последнего видно, что исходные требования удовлетворены.

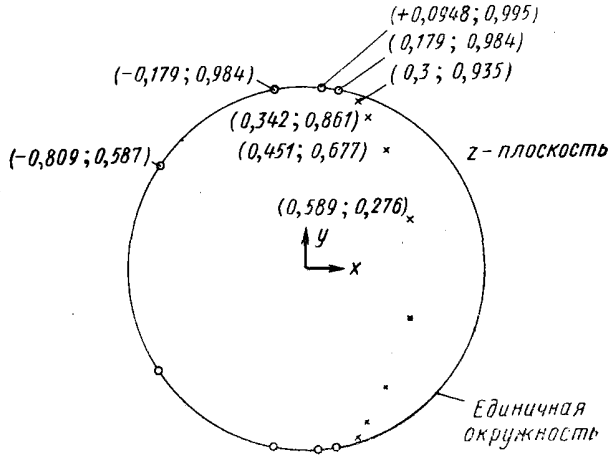


Рис. 3.25. Полюсы и нули цифрового эллиптического фильтра.

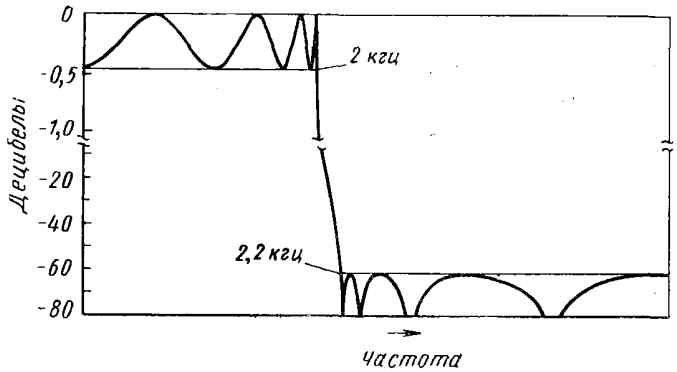


Рис. 3.26. Вычисленная характеристика цифрового эллиптического фильтра.

Полюсы	Нули
$0{,}58921995 \pm j0{,}2763795$	$-0{,}80925294 \pm j0{,}5874599$
$0{,}4509549 \pm j0{,}67726114$	$-0{,}17915135 \pm j0{,}98382143$
$0{,}3420187 \pm j0{,}8611878$	$0{,}09481303 \pm j0{,}99549506$
$0{,}29985251 \pm j0{,}93454875$	$0{,}178863 \pm j0{,}983874$

Все приведенные вычисления являются обычными и могут легко программироваться на универсальной ЦВМ, за исключением эллиптических функций, входящих в уравнение (3.28). Для их вычисления, во-первых, рассмотрим соотношение (3.29). Так как $\operatorname{cn} u$ и $\operatorname{dn} u$ легко находятся из $\operatorname{sn} u$, то требуется составить алгоритм вычисления только $\operatorname{sn} u$. Его можно получить из выражения $\operatorname{sn} u$ через θ-функции:

$$\operatorname{sn}(y, k) = \frac{\theta_1(y/2K, q)}{\sqrt{k}\,\theta_4(y/2K, q)}, \tag{3.58}$$

где θ-функции определяются бесконечными рядами

$$\theta_4\left(\frac{y}{2K}, q\right) = 1 + 2\left(-q\cos\frac{2\pi y}{2K} + q^4\cos\frac{4\pi y}{2K} - q^9\cos\frac{6\pi y}{2K} + \dots\right) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n q^{n^2}\cos\frac{2n\pi y}{2K},$$

$$\theta_1\left(\frac{y}{2K}, q\right) = 2q^{1/4}\sin\frac{\pi y}{2K} - 2q^{9/4}\sin\frac{3\pi y}{2K} + 2q^{25/4}\sin\frac{5\pi y}{2K} - \dots\Big) = 2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n q^{(n+1/2)^2}\sin(2n+1)\frac{\pi y}{2K}. \tag{3.59}$$

Параметр q задается выражением

$$q = e^{-\pi K'(k)/K(k)}. \tag{3.60}$$

В приведенных выражениях переменная y и эллиптическая функция Якоби являются действительными. Так как q обычно достаточно мало; то ряды (3.59) сходятся очень быстро и могут использоваться для определения алгоритма вычислительной программы. Даже если q близко к единице, сходимость рядов все равно остается достаточно быстрой.

2. Расчет эллиптической цифровой 90°-ной фазорасщепляющей цепи

Отображения, основанные на эллиптических функциях Якоби совместно с билинейным преобразованием, можно также использовать для расчета пары всепропускающих цепей, разность фаз которых

есть возможно более точное приближение к 90° в некотором интервале частот (90°-ный фазорасщепитель). Следует отметить, что любая цифровая цепь является всегда всепропускающей при условии, что все полюсы и нули могут быть объединены в обратные пары, например:

$$H(z) = \prod_i \frac{(a_i - z^{-1})}{(1 - a_i z^{-1})}. \tag{3.61}$$

Можно организовать такую цепь, в которой для каждой пары, состоящей из полюса и нуля, потребуется только одно умножение. На

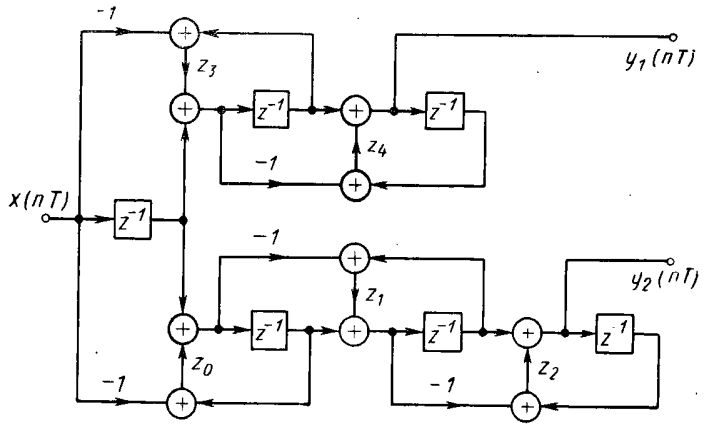


Рис. 3.27. Всепропускающий фазорасщепитель.

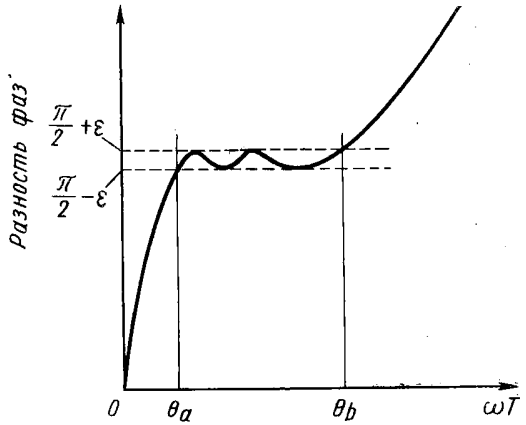


Рис. 3.28. Характеристика 90°-ного фазорасщепителя.

рис. 3.27 показана цифровая цепь с двумя выходами $y_1(nT)$ и $y_2(nT)$, каждый из которых является всепропускающим относительно входа. Нетрудно проверить, что выходу $y_1(nT)$ соответствует передаточная функция с полюсами z_3 и z_4 и нулями $1/z_3$ и $1/z_4$, в то время как передаточная функция, связанная с $y_2(nT)$, имеет полюсы z_0, z_1 и z_2 и нули $1/z_0$, $1/z_1$ и $1/z_2$. Оптимальная цифровая цепь такого вида в качестве 90°-ного фазорасщепителя будет иметь характеристику, показанную на рис. 3.28. Это, конечно, только разность фаз. Ни одна из ветвей этой цепи, сама по себе, не имеет такой полезной фазовой характеристики.

Расчет таких цепей по сложности можно сравнить с расчетом фильтров нижних частот с равномерными пульсациями характеристики. Ограничимся здесь тем, что дадим порядок расчета для значения фазового сдвига $\simeq 90°$ с ошибкой $\pm\varepsilon$ в диапазоне частот $\theta_a \leqslant \omega T \leqslant \theta_b$, причем рассмотрим эту процедуру на конкретном примере, в котором допустимая ошибка составляет 1° в диапазоне от 10 до 120°.

1) Вычислим

$$k = \frac{\operatorname{tg}(\theta_a/2)}{\operatorname{tg}(\theta_b/2)} = 8{,}74887 \times 10^{-2},$$

$$k_1 = \left[\frac{1 - \operatorname{tg}(\varepsilon/2)}{1 + \operatorname{tg}(\varepsilon/2)}\right]^2 = 0{,}96569.$$

2) Вычислим

$$N = \frac{K'(k)K(k_1)}{K'(k_1)K(k)} = 4{,}8$$

и примем его равным ближайшему большему целому числу 5.

3) Вычислим значения

$$p_l = -\operatorname{tg}\left(\frac{\theta_a}{2}\right)\frac{\operatorname{sn}[(4l+1)K'(k)/2N,\ k]}{\operatorname{cn}[(4l+1)K'(k)/2N,\ k]} \quad \text{для} \quad l = 0, 1, \ldots, N-1;$$

$$p_0 = -0{,}03950304, \qquad p_3 = 1{,}0039420,$$
$$p_1 = -0{,}3892747, \qquad p_4 = 0{,}1509398.$$
$$p_2 = -3{,}8360295,$$

4) Для отрицательных p_l коэффициенты цепи, исходя из формулы

$$z_l = \frac{1 + p_l}{1 - p_l},$$

будут равны

$$z_0 = 0{,}923997, \quad z_1 = 0{,}4396001, \quad z_2 = -0{,}5864377,$$

для положительных p_l коэффициенты цепи, исходя из формулы

$$z_l = \frac{1 - p_l}{1 + p_l},$$

будут равны

$$z_3 = -0{,}0019671, \quad z_4 = 0{,}7377101.$$

Положительные p_l дают полюсы одной ветви цепи, в то время как отрицательные p_l дают полюсы другой ветви (с помощью другой формулы). Эта процедура расчета соответствует методу Сторера [14], но она расширена здесь для случая, при котором общее число полюсов в обеих цепях может быть нечетным или четным.

3.14. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе были представлены теоретические основы расчета цифровых фильтров в частотной области. При этом упор был сделан на концепцию, рассматривающую теорию фильтров как общую теорию, которую можно применить для проектирования и аналоговых, и цифровых фильтров. Во-первых, было установлено, что для любого реализуемого аналогового фильтра с передаточной функцией в виде рациональной функции можно найти цифровой фильтр с той же самой импульсной характеристикой, что и у аналогового фильтра (в точках отсчетов). Для узкополосных фильтров, где эффект наложения спектров при дискретизации практически не проявляется, это означает, что частотная характеристика цифрового фильтра будет также близка к частотной характеристике аналогового фильтра. Этот метод назван методом инвариантности импульсной характеристики. Для широкополосных фильтров он может оказаться невыполнимым из-за эффекта наложения спектров. Если фильтр задается как аппроксимация идеального фильтра, частотная характеристика которого состоит из ряда участков с постоянным затуханием, то можно применить много подходов, часто ведущих к одним и тем же результатам. Например, используя подход с точки зрения потенциального сходства, можно разместить полюсы и нули фильтра в λ-плоскости таким образом, что требуемая частотная характеристика будет рассматриваться вдоль некоторой кривой в λ-плоскости. Если затем можно будет выполнить отображение λ-плоскости в z-плоскость так, чтобы эта кривая отображалась на единичную окружность, и если отображенные на z-плоскость полюсы будут располагаться внутри единичного круга, то можно получить требуемый фильтр. Аналогично, знание того, что передаточную функцию цифрового фильтра можно выразить в виде рациональной функции относительно степеней тригонометрической функцией от ωT, позволяет задавать цифровой фильтр с помощью требуемого квадрата модуля передаточной функции. Иногда эти расчеты можно удобно осуществить, применяя билинейное преобразование непосредственно к заранее рассчитанному аналоговому фильтру.

Упомянутые выше методы относятся к фильтрам для реализации которых требуются и полюсы, и нули, поэтому они имеют импульсные характеристики теоретически бесконечной длительности. Если фильтр определяется импульсной характеристикой конечной длительности, тогда справедлива в частотной области теорема отсчетов, так что сложная частотная характеристика может быть представлена с помощью конечного числа элементарных функций частотных характеристик. Это позволяет рассчитывать фильтр, задавая значения характеристики в конечном числе равномерно расположенных частот с уверенностью, что реальная характеристика будет иметь точно эти значения на тех же частотах. Таким образом можно рассчитать полосовые фильтры с крутыми скатами и линейной фазой. Такие цифровые фильтры можно реализовать с помощью гребенчатых фильтров и цифровых резонаторов без потерь.

ПРИЛОЖЕНИЕ

РЕАЛИЗУЕМОСТЬ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ С КВАДРАТОМ МОДУЛЯ ПЕРЕДАТОЧНОЙ ФУНКЦИИ ОПРЕДЕЛЕННОГО ВИДА

Для последующего изложения будет полезно определить полиномы вида

$$a_0z^k+a_1z^{k-1}+\ldots+a_1z+a_0,$$

в которых коэффициент при z^r равен коэффициенту при z^{k-r}, как зеркально-симметричные полиномы порядка k, и установить некоторые свойства этих полиномов.

1) Зеркально-симметричный полином (ЗСП) порядка k имеет корни, которые при четном k представляют собой пары взаимно обратных величин.

Доказательство. Заменим z в исходном ЗСП на $1/z$ и приравняем полином нулю:

$$a_0z^{-k}+a_1z^{-k+1}+\ldots+a_1z^{-1}+a_0=0.$$

Если умножить обе части на z^k, что не приведет к появлению новых корней уравнения, то можно убедиться, что полином от $1/z$ имеет те же корни, что и полином от z. Таким образом, корни либо представляют собой пары взаимно обратных величин, либо являются обратными сами себе. При нечетных k один из корней не может входить в пару взаимно обратных величин. Этот корень является обратным сам себе, и поскольку он должен быть действительным, то он равен $+1$ или -1. Как правило, ЗСП нечетного порядка нас интересовать не будет.

2) Сумма зеркально-симметричных полиномов одного и того же порядка является ЗСП такого же порядка.

3) Зеркально-симметричный полином порядка k, сложенный с зеркально-симметричным полиномом порядка $k-2r$, умноженным на z^r, дает зеркально-симметричный полином порядка k.

4) Произведение нескольких зеркально-симметричных полиномов есть также зеркально-симметричный полином.

5) Полином, имеющий корни в виде пар взаимно обратных величин, есть ЗСП. Это свойство доказывается путем взаимного перемножения сомножителей, которые являются обратными величинами. При этом отмечаем, что каждое произведение есть ЗСП, и учитываем свойство *4*.

Указанные свойства ЗСП мы используем для доказательства существования цифровых фильтров, характеризующихся квадратами модулей передаточных функций определенного вида. Положим, что задан квадрат модуля передаточной функции $F(\omega T)$. Всегда можно заменить ωT на $-j\ln z$ (это эквивалентно соотношению $z=e^{\omega}$ для того, чтобы получить функцию $G(z)$, которая для точек на единичной окружности равна $F(\omega T)$. Для наших целей $G(z)$ должна быть рациональной функцией z с действительными коэффициентами. Выполнение этого условия гарантируется только в том случае, если в квадрате модуля передаточной функции ωT появляется лишь в составе выражений вида $\sin^2(\omega T/2)$, $\cos^2(\omega T/2)$, $\mathrm{tg}^2(\omega T/2)$, $\mathrm{ctg}^2(\omega T/2)$, $\sec^2(\omega T/2)$, $\mathrm{cosec}^2(\omega T/2)$ и если эти выражения комбинируются только путем сложения, вычитания, умножения и деления. Последнее объясняется тем, что квадраты тригонометрических функций от $\omega T/2$ формируют рациональные функции от z, а рациональные функции образуют поле с операциями сложения и умножения. Ниже дано соответствие квадратов тригонометрических функций от $\omega T/2$ рациональным функциям от z:

Таблица 3.1

$$\sin^2\frac{\omega T}{2}\to\frac{(z-1)^2}{-4z},\qquad \mathrm{tg}^2\frac{\omega T}{2}\to\frac{-(z-1)^2}{(z+1)^2},$$

$$\cos^2\frac{\omega T}{2}\to\frac{(z+1)^2}{4z};\qquad \mathrm{ctg}^2\frac{\omega T}{2}\to\frac{-(z+1)^2}{(z-1)^2};$$

$$\sec^2\frac{\omega T}{2}\to\frac{4z}{(z+1)^2},$$

$$\mathrm{cosec}^2\frac{\omega T}{2}\to\frac{-4z}{(z-1)^2}.$$

Теперь предположим, что задана $F(\omega T)$, на которую наложены указанные ограничения, и что найдена $G(z)$ и все полюсы и нули $G(z)$. Для отыскания передаточной функции $H(z)$, которой соответствует квадрат модуля передаточной функции $F(\omega T)$, рекомендуется:

1) Отбросить полюсы или нули в начале координат.

2) Установить для оставшихся полюсов взаимно однозначное соответствие одного по отношению к другому таким образом, чтобы для каждой пары полюсов отношение расстояния от одного из полюсов до любой точки на единичной окружности к расстоянию от этой точки на единичной окружности до другого полюса было постоянным.

3) Повторить операцию 2 для нулей.

4) Отбросить пары соответствующих полюсов и нулей таким образом, чтобы все оставшиеся полюсы лежали в пределах единичного круга.

5) Составить $H(z)$ только из оставшихся полюсов и нулей.

Эта процедура возможна лишь в том случае, когда операции *2* и *3* осуществимы. Величина $H(z)$ пропорциональна произведению расстояний от единичной окружности до оставшихся нулей, деленному на произведение расстояний до оставшихся полюсов, и, следовательно, пропорциональна корню квадратному из $F(\omega T)$. Отметим, что особенности $G(z)$ в начале координат никак не влияют на амплитудную функцию, так как расстояние от начала координат до единичной окружности всегда равно единице.

Операции *2* и *3* осуществимы в том случае, когда полюсы (и нули) образуют пары, координаты которых равны или, в более общем случае, представляют собой сопряженные взаимно обратные величины $re^{j\theta}$ и $(1/r)\,e^{j\theta}$. Так как особенности $G(z)$ образуют сопряженные пары, то достаточно потребовать, чтобы корни составляли пары равных или взаимно обратных величин.

С помощью приводимого ниже доказательства покажем, что отношение расстояний от любой точки на единичной окружности до двух особенностей, являющихся сопряженными обратными величинами, постоянно.

Доказательство. Пусть зафиксированы особенности $re^{j\theta}$ и $(1/r)\,e^{j\theta}$. Согласно теореме Аполлониуса, геометрическое место

точек, отношение расстояний от которых до двух фиксированных точек постоянно, есть окружность с центром, лежащим на одной прямой с этими двумя фиксированными точками. Рассмотрим упомянутое отношение для двух точек на такой окружности: $e^{j\theta}$ и $e^{j(\theta+\pi)}$.

Отношение для обеих точек равно r, и единственной окружностью, проходящей через обе точки и имеющей центр, расположенный на одной прямой с заданными двумя фиксированными особенностями, является единичная окружность. Следовательно, единичная окружность его окружность Аполлониуса, и отношение расстояний от любой ее точки до особенностей постоянно. Соответствующее доказательство для равных особенностей тривиально.

Если после отбрасывания полюсов или нулей в начале координат числитель и знаменатель $G(z)$ становятся зеркально-симметричными полиномами, то при помощи указанной выше процедуры, состоящей из пяти операций, можно найти $H(z)$, которая соответствует $F(\omega T)$*). Перечислим теперь несколько типов $F(\omega T)$, для которых числителем и знаменателем являются зеркально-симметричные полиномы.

Положим, что $F(\omega T)$ — рациональная функция $\sin^2(\omega T/2)$. Тогда, подставляя выражение из таблицы, получаем

$$G(z)=\frac{a_0\left[\frac{(z-1)^2}{-4z}\right]^n+a_1\left[\frac{(z-1)^2}{-4z}\right]^{n-1}+\ldots}{b_0\left[\frac{(z-1)^2}{-4z}\right]^m+b_1\left[\frac{(z-1)^2}{-4z}\right]^{m-1}+\ldots}.$$

Это выражение можно представить в виде

$$G(z)=\frac{\{a_0[(z-1)^2]^n+a_1[(z-1)^2]^{n-1}(-4z)+ +a_2[(z-1)^2]^{n-2}(-4z)^2+\ldots\}(-4z)^{m-n}}{b_0[(z-1)^2]^m+b_1[(z-1)^2]^{m-1}(-4z)+ +b_2[(z-1)^2]^{m-2}(-4z)^2+\ldots}.$$

Член $(-4z)^{m-n}$ дает полюсы или нули только в начале координат и поэтому отбрасывается. Отметим, что при возведении $(z-1)^2$ в различные степени образуются на основании свойства *5* зеркально-симметричные полиномы, и поэтому, исходя из свойства *3*, числитель $G(z)$ представляет собой ЗСП. Такое же объяснение справедливо и для знаменателя.

Совершенно аналогичные рассуждения приводят к тому, что рациональные функции $\cos^2(\omega T/2)$ также дают реализуемые цифровые фильтры. Рациональные функции $\mathrm{tg}^2(\omega T/2)$ приводят к $G(z)$ вида

$$G(z)=\frac{\{a_0(z-1)^{2n}+a_1(z-1)^{2(n-1)}(z+1)^2+\ldots +\ldots+a_n(z+1)^{2n}\}(z+1)^{2(m-n)}}{b_0(z-1)^{2m}+b_1(z-1)^{2(m-1)}(z+1)^2+\ldots+b_m(z+1)^{2m}}.$$

*) Это положение не является строго справедливым, если зеркально-симметричный полином имеет простые корни на единичной окружности, которые в этом случае являются взаимно сопряженными и обратными. Последующие утверждения справедливы при ограничениях, учитывающих эту возможность. Однако это предельный случай, который едва ли может иметь место.

Используя снова свойство *4*, отметим, что как числитель, так и знаменатель представляют собой зеркально-симметричные полиномы, и поэтому существует цифровой фильтр с требуемым квадратом модуля передаточной функции. Совершенно аналогичные рассуждения позволяют распространить это доказательство на рациональные функции $\mathrm{ctg}^2(\omega T/2)$, $\sec^2(\omega T/2)$ и $\mathrm{cosec}^2(\omega T/2)$. Подобные рассуждения показывают, что рациональные функции сумм, произведений или отношений квадратов тригонометрических функций, как, например, $\sin^2(\omega T/2)+\mathrm{tg}^4(\omega T/2)$, также дают $G(z)$, представляющие собой отношения зеркально-симметричных полиномов. Можно сделать дальнейшие обобщения, однако ограничимся этими несколькими примерами и методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abramowitz M., Stegun I. A., «Handbook of Mathematical Functions», Dover Publications, Inc., New York, 1965.
2. Craig J., неопубликованные заметки, 1963.
3. Golden R. M., «Digital Computer Simulation of a Sampled Data Voice-excited Vocoder», J. Acoust. Soc. Am., 1963, v. 35, pp. 1358—1366.
4. Golden R. M., Kaiser J. F., «Design of Wideband Sampled Data Filters», Bell System Tech. J., 1964, July, v. 43(4).
5. Guilemin E. A., «Synthesis of Passive Networks», John Wiley and Sons, Inc., New York, 1957.
6. Hastings C., Jr. «Approximation for Digital Computers», Princeton University Press, Princeton, N. J., 1955.
7. Jacobi G. J., «Fundamenta Nova Theoriae Functionum Elliptecarium», Königsber, 1829.
8. Джеймс Х., Никольс Н., Филиппс Р., «Теория следящих механизмов», Изд-во иностр. лит-ры, 1953.
9. Jury E. I., «Theory and Application of the z-Transform Method», John Wiley and Sons, Inc., New York, 1964.
10. Лернер Р., «Полосовые фильтры с линейной фазой», ТИИЭР, т. 52.
11. Lewis M., «Synthesis of Sampled Signal Network», IRE Trans. Circuit Theory, 1960, March.
12. Рэйдер Ч., Голд Б. «Методы расчета цифровых фильтров в частотной области», ТИИЭР, т. 55, № 2, 1967, февраль.
13. Ragazzini J. R., Franklin G. F., «Sampled-data Control Systems», McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.
14. Storer J. E., «Passive Network Synthesis», McGraw-Hill Book Company, New York, 1957.
15. Weinberg L., «Network Analysis and Synthesis», McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.
16. White W. D., Ruvin A. E., «Recent Advances in the Synthesis of Comb Filters», IRE Natl. Conv. Record, 1957, v. 5, pp. 186—199.
17. Whittaker E. T., Watson G. N., «Modern Analysis», Cambridge University Press, New York, 1902.

Глава четвертая

ЭФФЕКТЫ КВАНТОВАНИЯ В ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРАХ

4.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

До сих пор анализ основывался на математической теории линейных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Таким образом, мы молчаливо предполагали, что используемые при составлении уравнений постоянные и переменные параметры являются непрерывными, т. е. что они могут принимать любое значение. Реальные цифровые фильтры имеют дискретные параметры, так как длина слова в любом цифровом приборе конечна. Введение такой дискретизации параметров в уравнения фильтров превращает их в нелинейные соотношения, которые, за исключением нескольких очень простых случаев, трудно, а может быть и невозможно решить точно.

Но когда величина ступени квантования мала по сравнению со значениями сигналов и параметров, теория становится значительно проще и позволяет получить много полезных результатов, которые поддаются экспериментальной проверке. Данная глава посвящена в основном разработке приближенной модели, основанной на относительно малых ошибках квантования, для случая вычислений с фиксированной запятой.

Для иллюстрации рассмотрим простое уравнение

$$y(nT)=Ky(nT-T)+x(nT). \qquad (4.1)$$

Величина K в уравнении (4.1) является константой, заранее записанной в регистр памяти вычислительной машины. Таким образом, K может принимать только определенные дискретные значения и в общем случае может только приближаться к выбранной величине. Нечто вроде такого же эффекта встречается при проектировании аналоговых фильтров: в результате проектирования определенного фильтра значение расчетной индуктивности может оказаться равным, например, 10,2976 *гн*, но после намотки катушки и точного измерения индуктивности она может оказаться равной 10,331 *гн*. Так как невозможно добиться ни точных значений индуктивностей, ни точных значений K, то возникает задача поиска таких реализаций фильтра, которые были бы менее чувствительны к ошибкам этих фиксированных параметров [9, 13, 14].

Квантование входного сигнала $x(nT)$ в (4.1) вызывает качественно отличающийся эффект. Сигнал на входе цифрового фильтра можно рассматривать квантованным

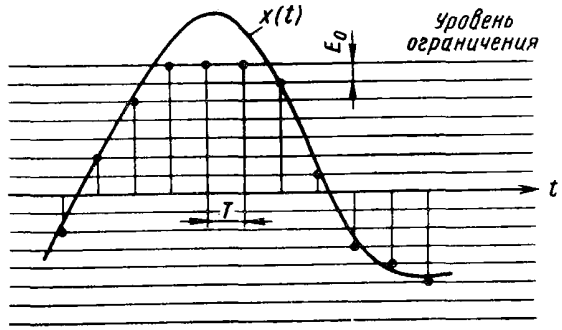


Рис. 4.1. Линейное квантование аналогового сигнала.

или неквантованным в зависимости от ситуации. Если входной сигнал по своей природе дискретен, то ошибки квантования отсутствуют. В подавляющем большинстве практических случаев входные сигналы по своей природе непрерывны, и перед цифровой обработкой необходимо выполнить преобразование аналог — цифра. Таким образом, основным источником ошибок является это преобразование. Преобразователи аналог — цифра в настоящее время делаются с точностью преобразования до 15 двоичных разрядов. На рис. 4.1 показано действие преобразователя аналог — цифра, имеющего 15 уровней с постоянной разностью между уровнями, равной E_0.

Преобразователь аналог — цифра на рис. 4.1 эффективно квантует сигнал. Можно различать несколько видов квантования. Квантование, изображенное на рис. 4.1, будем называть *округлением*, при нем сигнал аппроксимируется ближайшим уровнем квантования. Аппроксимацию сигнала с помощью ближайшего снизу уровня квантования (она эквивалентна округлению сигнала, уменьшенного на половину ступени квантования) будем называть *усечением* (truncation).

Вид квантования, который будем называть *усечением с учетом знака*, подобен простому усечению при поло-

жительных сигналах, а при отрицательных сигналах он означает аппроксимацию с помощью уровня квантования, ближайшего сверху. Полагаем, что *ошибка* $e(nT)$ вызывается отсчетами с равномерным распределением. Для случая округления предполагается распределение, показанное на рис. 4.2,*а*. Для усечения ожидаемое распределение показано на рис. 4.2,*б*. Для усечения с учетом знака ожидаемое распределение показано на рис. 4,2,*б* или *в* в зависимости от того, положителен или отрицателен сигнал.

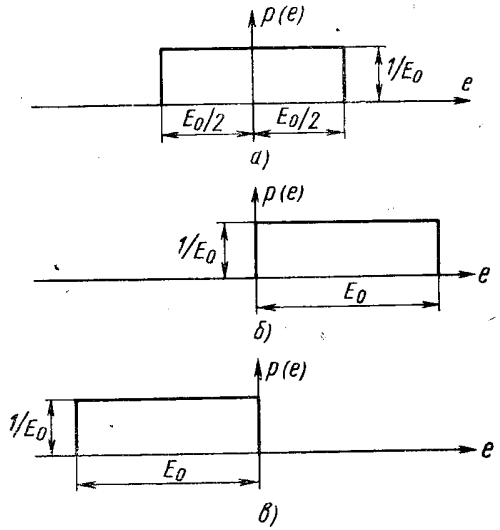


Рис. 4.2. Плотность вероятности ошибки квантования при округлении и усечении.

Если флюктуации сигнала таковы, что при переходе от одного отсчета к следующему может быть пройдено много уровней квантования, то есть основание полагать, что ошибка $e(nT)$ в некоторый момент отсчета будет статистически независимой относительно $e(mT)$ — ошибки в любой другой момент отсчета *). Легко дать противоречащий пример (в частности, когда сигнал является постоянным), однако Беннет [1] показал, что сделанное

*) Это допущение справедливо для округления. Для усечения ошибка имеет постоянную составляющую. Для усечения с учетом знака ошибка сильно коррелирована с сигналом.

допущение справедливо почти для всех встречающихся на практике сигналов. В теоретических построениях настоящей главы требуется несколько более слабое условие, а именно, чтобы шум отсчетов был некоррелирован.

Приведенные ошибки квантования, каждая со своей плотностью вероятности, показанной на рис. 4,2, дают тот очевидный эффект, что на начальный аналоговый сигнал накладывается шум. Таким образом, входной сигнал в (4.1) можно выразить как $x(nT)=x_0(nT)+$ $+e(nT)$, где $x_0(nT)$ можно считать входным сигналом без шума и $e(nT)$ — аддитивным шумом. Из рис. 4.2 можно быстро вычислить дисперсию шума,

$$\sigma_e^2 = E_0^2/12, \tag{4.2}$$

для случая округления или усечения.

Поведение линейной дискретной системы, такой, как (4.1), при наличии аддитивного шума можно легко вычислить прямыми методами, однако прежде введем третий, и возможно наиболее интересный, источник ошибок квантования, а именно ошибку, вызванную квантованием результатов умножений, необходимых для выполнения итераций. Результаты умножения K на $y(nT-T)$ в (4.1) должны быть квантованы. Если K и $y(nT-T)$ содержат каждый ν двоичных разрядов, то произведение их будет содержать 2ν двоичных разрядов. Если длина этого произведения в двоичных разрядах не уменьшается, то при каждой последующей итерации она будет возрастать на ν двоичных разрядов.

Отсюда видно, что округление неизбежно. Его влияние на фильтр не так легко ощутить, как влияние аддитивного шума от аналогоцифрового преобразования аналогового входного сигнала, и, в действительности, оно сильно зависит и от того, как именно выполнено квантование, и от конкретной реализации цифрового фильтра. Если, однако, предположить, что эти ошибки округления в различных итерациях не зависят друг от друга, то это ведет к модели, в которой источники шума подключаются к различным точкам цифровой цепи, а не просто добавляются к входному сигналу. Плотность вероятности шума, который вводится за счет этого эффекта, снова иллюстрируется на рис. 4,2,*а*, *б* или *в* в зависимости от конкретных используемых типов квантования.

Обсудив три основных источника ошибки в цифровом фильтре, разработаем в такой степени, насколько это возможно, теоретические модели, которые могут позволить предсказывать величину ошибки. Затем подробно изучим несколько конкретных цифровых фильтров и сравним различные реализации для того, чтобы посмотреть, какая из них наименее чувствительна к этим ошибкам. Некоторые результаты были проверены экспериментально, чтобы убедиться в правильности предполагаемых моделей. Основное значение этих результатов заключается в более эффективной реализации требуемого фильтра. В конце этой главы помещено несколько разделов, посвященных теории статистической оценки измерений шума, они полезны в качестве вспомогательного материала для экспериментальной проверки.

4.2. ОШИБКИ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ НЕТОЧНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ПОСТОЯННЫХ ПАРАМЕТРОВ

Возвращаясь сначала к вопросу о необходимой точности постоянных параметров, рассмотрим разностное уравнение второго порядка

$$y(nT)=Ky(nT-T)-Ly(nT-2T)+x(nT). \qquad (4.3)$$

В соответствии с анализом, проведенным в гл. 2, z-преобразование $H(z)$ передаточной функции, связанной с уравнением (4.3), имеет пару полюсов с полярными координатами r и θ в плоскости z. При этом

$$r=\sqrt{L}, \quad \theta=\omega_r T=\arccos\frac{K}{2\sqrt{L}}. \qquad (4.4)$$

Из (4.4) видно, что ошибки в постоянных параметрах вызывают явную и легко вычисляемую ошибку положений полюсов цифрового фильтра. Особый интерес представляет второе из этих уравнений. Ошибки параметров вызывают ошибку произведения $\omega_r T$. Таким образом, если интервал отсчетов T уменьшить вдвое, ошибка в определении резонансной частоты будет стремиться увеличиться вдвое при тех же ошибках в определении K и L. Оказывается, что при реализации заданного фильтра применение больших частот дискретизации требует более высокой точности вычислений. Это следует особо подчеркнуть, так как до сих пор считалось, что повышение частоты дискретизации автоматически обеспечивает лучшее соответствие цифрового фильтра некоторому аналоговому фильтру. Если, например, цифровой фильтр получается путем инвариантно-импульсного преобразования из аналогового фильтра и *если не учитываются эффекты квантования,* то цифровой фильтр лучше аппроксимирует аналоговый фильтр при уменьшении T. Однако если принимается в расчет ошибка параметра, то может случиться обратное: при уменьшении T ниже определенного уровня возрастет отклонение цифрового фильтра от аналогового.

Более полное выражение для ошибок в положениях полюсов, вызываемых квантованием K и L, можно вывести, если допустить, что ошибки малы [14]:

$$\Delta r=\frac{\partial r}{\partial L}\Delta L+\frac{\partial r}{\partial K}\Delta K, \qquad \Delta\theta=\frac{\partial\theta}{\partial L}\Delta L+\frac{\partial\theta}{\partial K}\Delta K. \qquad (4.5)$$

Пользуясь (4.4), получим систему уравнений

$$\Delta r=\frac{1}{2r}\Delta L, \qquad \Delta\theta=\frac{\Delta L}{2r^2\operatorname{tg}\theta}-\frac{\Delta K}{2r\sin\theta}. \qquad (4.6)$$

Так как $\Delta\theta=T\Delta\omega_r$, то второе уравнение непосредственно показывает, что чувствительность ошибки прямо пропорциональна частоте дискретизации. Кроме того, ясно, что ошибки по углу θ (и, следовательно, по резонансной частоте) больше, когда θ мало, поэтому к эффектам квантования особенно чувствительны узкополосные фильтры нижних частот.

Зависимость эффектов квантования от параметров может быть уменьшена благодаря использованию связанной формы резонатора, описанной в § 2.12. Если выбрать $A=D=r\cos\theta$ и $B=-C=r\sin\theta$, то получим

$$\begin{aligned}\Delta r&=\Delta A\cos\theta+\Delta B\sin\theta,\\ \Delta\theta&=-\Delta A\frac{\sin\theta}{r}+\Delta B\frac{\cos\theta}{r}.\end{aligned} \qquad (4.7)$$

Мы видим, что большие ошибки теперь уже не связаны с малыми углами, как в предыдущей реализации.

Закончим этот раздел важным замечанием о том, что почти никогда не следует выполнять реальные цифровые фильтры, за исключением фильтров первого и второго порядков, в прямой (рис. 2.19) или канонической

(рис. 2.20) форме. Для каждой из этих двух форм полюсы и нули являются исключительно чувствительными функциями коэффициентов разностного уравнения. Степень чувствительности возрастает с ростом порядка разностного уравнения. Обычно полагают, что эти эффекты не важны до тех пор, пока порядок разностного уравнения мал. Действительно, эффект важен в системах третьего и четвертого порядков, где он может даже привести к неустойчивости. Фильтр низких частот Баттерворта пятого порядка с частотой среза по уровню 3 *дб*, определяемой $\omega_c T = \pi/10$, будет, вероятно, неустойчивым, если его выполнить в виде 18-разрядного арифметического устройства в прямой или канонической форме [9, 10]. Выход из положения состоит в реализации всех цифровых фильтров в виде простого каскадного или параллельного соединений фильтров первого и второго порядков или в чрезвычайно тщательном анализе систем более высокого порядка.

4.3. ОШИБКИ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ АНАЛОГО-ЦИФРОВЫМ ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ

Как показано в § 4.1, ошибки, вызываемые квантованием*) аналогового входного сигнала перед его поступлением в вычислительную машину, можно аппроксимировать независимыми отсчетами случайных переменных, имеющими плотность вероятности в соответствии с рис. 4.2 и дисперсию, определяемую уравнением (4.2). Если пренебречь всеми остальными ошибками, то можно вычислить дисперсию выходного сигнала $y(nT)$ с помощью теории шума для линейных систем. Так как сигнал и шум независимы, то можно приступить к вычислению шумов, не обращая внимания на сигнал. Пусть фильтр определяется передаточной функцией $H(z)$ и весовой функцией $h(nT)$. Тогда выходной сигнал $f(nT)$, если входной сигнал состоит из отсчетов шума $e(nT)$, можно выразить сверточной суммой (см. § 2.7):

$$f(nT) = \sum_{m=0}^{n} h(mT)\, e(nT - mT) = \sum_{m=0}^{n} h(nT - mT)\, e(mT). \tag{4.8}$$

*) Будем полагать, что в этом и последующих параграфах рассматривается квантование типа округления.

Допустим, что входной шум $e(nT)$ начинается при $n=0$, а до этого был равен нулю; предположим также, что выходной сигнал $f(nT)$ был равен нулю до появления сигнала на входе. Уравнение (4.8) определяет линейные дискретные системы, оно особенно полезно, когда используется линейная теория шума.

Чтобы найти дисперсию $f(nT)$, вспомним наше допущение из § 4.1 о том, что каждый отсчет шума в (4.8) некоррелирован и имеет дисперсию $E_0^2/12$. Таким образом, в любой момент времени nT дисперсия $f(nT)$ есть просто сумма дисперсий каждого члена в (4.8). Поэтому дисперсия любого заданного члена есть $(E_0^2/12)h^2(nT - mT)$. Таким образом, общая дисперсия равна

$$\sigma_f^2 = (E_0^2/12) \sum_{m=0}^{n} h^2(nT - mT) = (E_0^2/12) \sum_{m=0}^{n} h^2(mT). \tag{4.9}$$

Заметим, что σ_f^2 в (4.9) в некотором смысле зависит от времени, поскольку она является функцией числа итераций n. Так как $h^2(nT)$ должен быть положительным, то σ_f^2 должна увеличиваться с ростом n, начиная с некоторой начальной минимальной величины. Это допустимо, так как на выходе не будет большой величины дисперсии сразу же после появления шума на входе. В действительности дисперсия на выходе нарастает и достигает почти такой же асимптоты, какую создает сигнал в виде скачка при воздействии на линейную дискретную систему. Установившееся состояние наступает всегда, если только полюсы фильтра не лежат точно на единичной окружности; последний случай будет рассмотрен в гл. 5. В предположении, что установившееся состояние наступило, другими словами, что правая половина (4.9) достигла с увеличением n конечной асимптоты, можно вывести из (4.9) другую формулу, из которой обычно легче получить численные результаты. Воспользовавшись определением z-преобразования в соответствии с (2.7) и учитывая, что $H(z)$ и $h(nT)$ являются парой преобразования, можно записать

$$H(z)H\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} h(mT)\, h(lT)\, z^{-m+l}. \tag{4.10}$$

Теперь умножим обе части равенства (4.10) на $z^{-1}/2\pi j$ и выполним интегрирование вдоль замкнутого контура. Для того чтобы имелась возможность в (4.10) заменить интегрирование суммированием, необходимо, чтобы контур интегрирования проходил в области сходимости не только $H(z)$, но и $H(1/z)$. Исходя из предпосылок § 2.8, можно удостовериться, что единичная окружность является подходящим контуром интегрирования для стабильных фильтров. Если правая часть (4.10) интегрируется почленно, то согласно интегральной теореме Коши все члены дадут нуль, за исключением члена при $m=l$. В результате получим

$$\sum_{m=0}^{\infty} h^2(mT) = \frac{1}{2\pi j}\oint H(z)\,H\left(\frac{1}{z}\right)z^{-1}dz. \qquad (4.11)$$

Сравнивая (4.9) и (4.11), видим, что правая часть (4.11) приводит к новой формуле для вычисления дисперсии выходного шума в установившемся режиме, т. е. при $n\longrightarrow\infty$. Это выражение часто легче применять для отыскания дисперсии (исключение составляют некоторые специфические фильтры), так как вычисление интеграла для линейных дискретных цепей всегда возможно с помощью теоремы Коши о вычетах.

Читатель может заметить, что выражение (4.11) было уже получено в § 2.8 с помощью теоремы о комплексной свертке.

4.4. АНАЛИЗ ШУМОВ В ФИЛЬТРЕ ПЕРВОГО ПОРЯДКА, ВЫЗВАННЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕМ АНАЛОГ—ЦИФРА

Пусть $h(nT)=K^n$ и $K<1$. Легко показать, что $h(nT)$ является весовой функцией цифровой цепи, определяемой разностным уравнением (4.1). Прямое вычисление (4.9) приводит к выражению

$$\sigma_f^2 = \frac{E_0^2}{12}\,\frac{1-K^{2(n+1)}}{1-K^2}. \qquad (4.12)$$

В установившемся состоянии ($n\longrightarrow\infty$) выражение для дисперсии (4.12) упрощается:

$$\sigma_f^2 = \frac{E_0^2}{12\,(1-K^2)}. \qquad (4.13)$$

Чтобы показать, что (4.13) имеет тесную связь с требуемой длиной слова выходного регистра, в котором последовательно хранятся значения $y(nT)$, рассмотрим значение K, равное 0,99. Тогда σ_f^2 примерно равна $4E_0^2$ и стандартное отклонение σ_f равно $2E_0$. Допустим, что наименьший входной сигнал, который по предположению может пройти через цифровой фильтр, должен на выходе фильтра быть на 40 *дб* больше уровня шума, вызванного квантованием. Это означает, что выходной регистр должен иметь диапазон значений, равный по крайней мере 200 E_0. Если, кроме того, цифровой фильтр должен обрабатывать входные сигналы, амплитуда которых изменяется в пределах 40 *дб*, то диапазон выходного регистра становится равным 20 000 E_0. Таким образом, требуемая длина слова выходного регистра равна 15 двоичным разрядам. Соотношение (4.13) проверялось экспериментально, и проверка дала отличное совпадение [5].

Из этого примера ясно, что эффекты квантования должны обязательно оговариваться в исходных данных для расчета цифровых фильтров. Во многих случаях моделирования цифровых фильтров на вычислительной машине программист может пользоваться длиной слова вычислительной машины в 36 разрядов и может регулировать экспериментально коэффициент передачи системы, с тем чтобы избежать влияния шумов. В этих случаях использование целиком возможной длины слова вычислительной машины не приводит к неприятностям. Однако при расчете специализированной цифровой аппаратуры основным условием для цепей фильтрации является правильный выбор требуемой длины слова.

Многие цифровые фильтры имеют полюсы, расположенные очень близко к единичной окружности. Это особенно характерно для высоко избирательных фильтров, подобных рассмотренным в гл. 3. В этих случаях формулы для дисперсии выходного шума становятся совсем простыми. Полагая в (4.13) $K=1-\varepsilon$ и допуская, что ε^2 пренебрежимо мало, получим

$$\sigma_f^2 = \frac{E_0^2}{24\varepsilon}. \qquad (4.14)$$

Таким образом, дисперсия шума обратно пропорциональна расстоянию полюса от единичной окружности и

прямо пропорциональна коэффициенту передачи фильтра на нулевой частоте.

4.5. АНАЛИЗ ЦИФРОВОГО РЕЗОНАТОРА С ДВУМЯ ПОЛЮСАМИ И БЕЗ НУЛЕЙ

Выведем теперь формулы, аналогичные (4.13), для простого цифрового резонатора вида, который рассматривался в § 2.10 и 2.12. Рассмотрим разностное уравнение второго порядка (2.23), имеющее z-преобразование, как было показано в (2.24):

$$H(z)=\frac{z^2}{z^2-K_1z-K_2}. \qquad (4.15)$$

Полюсы $H(z)$ расположены в точках $z=r\,e^{\pm j\theta}$, где

$$r=\sqrt{K_2} \text{ и } \cos\theta=\frac{K_1}{2\sqrt{K_2}}.$$

Аналогично, полюсы $H(1/z)$ расположены в точках $z=(1/r)\,e^{\pm j\theta}$. Таким образом, чтобы вычислить интеграл (4.11), выражение под интегралом нужно разложить на множители, найти вычеты, и применить теорему Коши о вычетах. Здесь приводится только окончательный результат для $H(z)$, определяемой (4.15):

$$\frac{1}{2\pi j}\oint H(z)\,H\left(\frac{1}{z}\right)z^{-1}dz=\frac{1+r^2}{1-r^2}\,\frac{1}{r^4+1-2r^2\cos 2\theta}. \qquad (4.16)$$

Из (4.9) и из равенства (4.11) следует, что правая часть выражения (4.16) пропорциональна дисперсии выходного шума в установившемся состоянии, т. е. шума, получаемого из (4.9) при $n\to\infty$. Так же как и в § 4.4, исследуя системы с полюсами, расположенными близко к единичной окружности, мы можем положить $r=1-\varepsilon$ и пренебречь членами с ε во второй и более высокой степенях. Это приводит к формуле

$$\sigma_f^2=\frac{E_0^2}{48\varepsilon\sin^2\theta}. \qquad (4.17)$$

Анализ (4.17) показывает, что дисперсия выходного шума обратно пропорциональна расстоянию полюсов от единичной окружности; к этому выводу можно было бы прийти интуитивно, обобщая результат, полученный для

случая одного полюса. Хорошо известно для аналогового фильтра и одинаково верно для цифрового, что резонатор ведет себя подобно сдвинутому по частоте варианту своего низкочастотного прототипа, когда полюсы очень близки к оси $j\omega$ (для аналогового случая) и к единичной окружности (для цифрового случая). Кроме того, из (4.17) ясно видна зависимость шума от угла резонанса $\theta=\omega_rT$. Для очень низких значений θ дисперсия шума сильно возрастает. Величина θ, равная 0,1, вызывает дисперсию шума, в 100 раз большую (стандартное отклонение в 10 раз больше), чем предполагаемая при θ, равном $\pi/2$. Таким образом, фильтры нижних частот образуют стандартное отклонение шума примерно на три или четыре двоичных разряда больше. Применительно к постулированным в § 4.4 критерию динамического диапазона и отношению сигнал/шум, для фильтров с низкой резонансной частотой потребуется длина слова в 18 двоичных разрядов.

4.6. АНАЛИЗ ЦИФРОВОГО РЕЗОНАТОРА С ДВУМЯ ПОЛЮСАМИ И ОДНИМ НУЛЕМ

Рассмотрим цифровой резонатор с двумя полюсами и одним нулем, определенный разностным уравнением (2.32) и цепью, показанной на рис. 2.14. Передаточная функция цепи, как видно из (2.33), задается в виде

$$H(z)=\frac{z^2-Lz}{z^2-K_1z-K_2}, \qquad L=r\cos\theta. \qquad (4.18)$$

Выполняя ту же процедуру, что и в § 4.5, можно получить выражение для дисперсии выходного шума в установившемся режиме:

$$\sigma_f^2=\frac{E_0^2}{12}\left[\frac{1}{1-r^2}-r^2\sin^2\theta\left(\frac{1+r^2}{1-r^2}\cdot\frac{1}{r^4+1-2r^2\cos^2\theta}\right)\right]. \qquad (4.19)$$

Для $r=1-\varepsilon$ и при малом ε получим

$$\sigma_f^2=\frac{E_0^2}{48\varepsilon}. \qquad (4.20)$$

Здесь снова наблюдается обратно пропорциональная зависимость дисперсии шума от ε, но зависимости от резонансной частоты теперь уже нет.

Все полученные до сих пор результаты приводят к интуитивному заключению, что дисперсия выходного шума пропорциональна усилению фильтра, определенному на некоторой соответствующей частоте (например, на резонансной частоте фильтра). Ясно, что для малых ε усиление фильтров, рассмотренных до сих пор, обратно порпорционально ε. Очень простые соображения показывают, что такое поведение шума не является неожиданным: в конце концов, чем выше усиление данной системы, тем выше уровень выходного шума при данном шуме на входе.

4.7. ОШИБКИ, ВЫЗЫВАЕМЫЕ КВАНТОВАНИЕМ ПРОИЗВЕДЕНИЙ

Теперь мы подходим к наиболее сложному проявлению ошибок квантования, а именно к ошибкам, вызываемым округлением результатов вычислений при выполнении реальной программы цифрового фильтра. Так как эти ошибки появляются при выполнении каждой итерации разностного уравнения, то эффект заключается в наложении на сигнал последовательности шумовых отсчетов; в этом смысле эффект подобен шуму, обусловленному аналого-цифровым пребразованием. Однако точное место, в котором шум вводится в цифровой фильтр, зависит от конкретного выполнения программы [5, 6, 11, 12].

На рис. 4.3 показано, каким образом шум квантования, вызываемый выполнением операций умножения, вводится в случае прямой формы реализации системы с четырьмя полюсами и нулями *). С каждой операцией умножения связаны шумы от $e_0(nT)$ до $e_8(nT)$. Для этой реализации ясно, что все шумы взаимно аддитивны и поэтому могут быть заменены одним общим шумом:

$$e(nT) = \sum_{k=0}^{8} e_k(nT),$$

как это показано на рис. 4.4. Если допустить, что все шумы на рис. 4.3 некоррелированы, то дисперсия общего шума $e(nT)$ в девять раз больше дисперсии каждого малого шума или равна $3E^2_0/4$. Следует однако отме-

*) Как отмечалось в § 4.2, систему четвертого порядка в прямой форме реализовывать нецелесообразно.

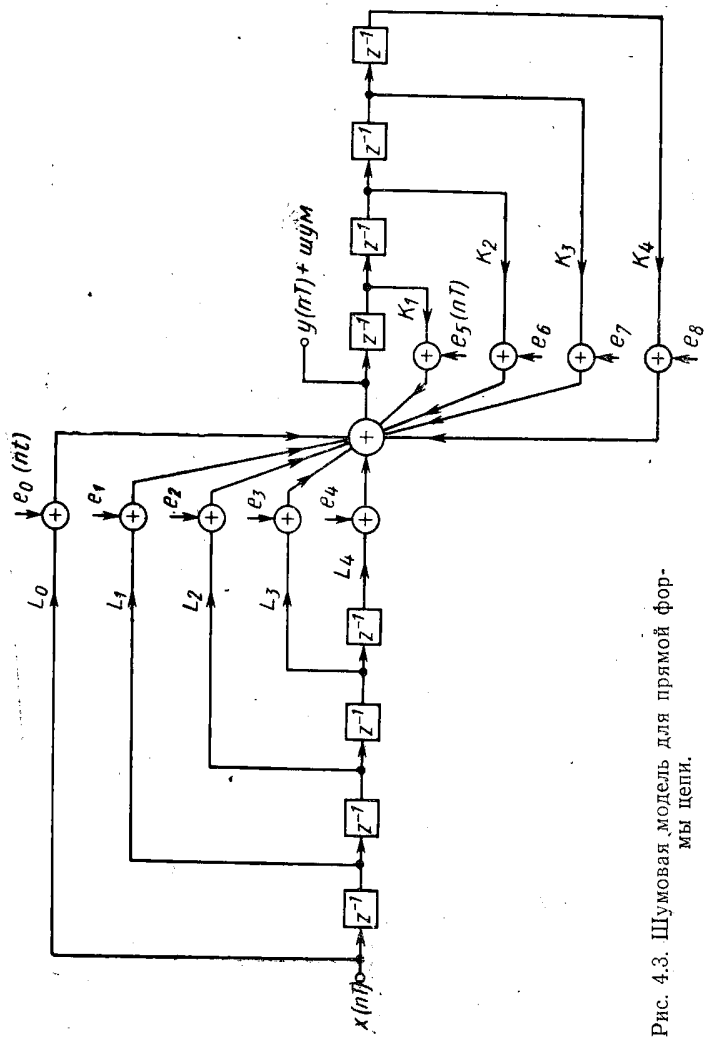


Рис. 4.3. Шумовая модель для прямой формы цепи.

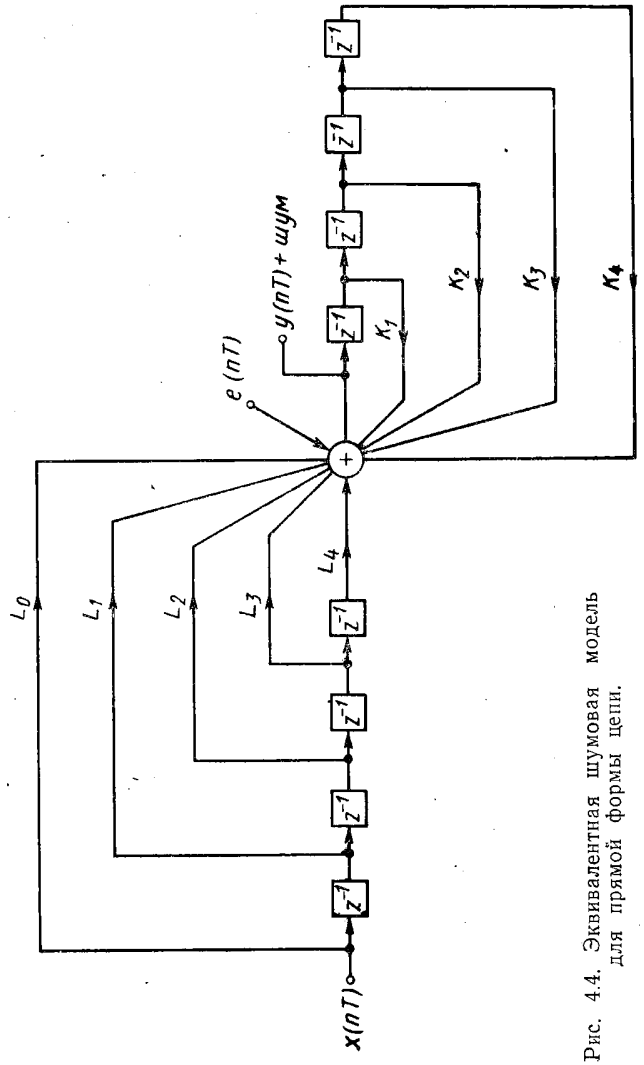


Рис. 4.4. Эквивалентная шумовая модель для прямой формы цепи.

тить, что имеется в виду определенный тип программы, а именно программа, по которой младшие значащие двоичные разряды отбрасываются после каждого умножения. Если накапливающаяся сумма хранится в несколько большем (на 3 или 4 разряда) регистре, то дисперсия $e(nT)$ может быть уменьшена до $E^2_0/12$. С практической точки зрения сохранение дополнительных разрядов может привести к заметному увеличению времени выполнения программы. Однако с помощью специализированного аппаратурного блока при небольших дополнительных затратах или вообще без них можно добиться заметного уменьшения шума.

Важной особенностью рис. 4.3 является то, что он отражает прохождение шума через фильтр; ясно, что этот шум, в отличие от шума аналого-цифрового преобразования, проходит только через полюсы фильтра. Таким образом, усиление шума при прохождении через фильтр будет, в общем случае, существенно отличаться от усиления сигнала.

На рис. 4.5 показана цифровая цепь, имеющая то же z-преобразование, что и цепи рис. 4.3 и 4.4, но реализованная в канонической форме. Из него видно, что шум вводится в систему несколько иначе, чем при прямой форме реализации. На рис. 4.6 показана эквивалентная цепь, где

$$e_A(nT) = e_5(nT) + e_6(nT) + e_7(nT) + e_8(nT)$$

и

$$e_B(nT) = \sum_{k=0}^{4} e_k(nT).$$

Ясно, что $e_A(nT)$ с дисперсией $E_0^2/3$ проходит через всю цепь (как полюсы, так и нули), в то время как $e_B(nT)$ представляет собой просто шум, добавляемый на выходе.

Как можно сравнить прямую и каноническую реализации на основе рис. 4.3—4.6? В фильтрах нижних частот и полосовых фильтрах эффект, вызваный нулями в полосе пропускания, заключается в уменьшении шума, в то время как полюсы в полосе пропускания увеличивают его. Поэтому кажется, что прямая форма реализации вводит в этих случаях больше шума, чем каноническая, так как в первом случае шум проходит только через полюсы с большим усилением, а во втором случае — через полюсы и нули с малым усилением. Однако

ответ не так прост, поскольку наличие нулей с малым усилением при прямой реализации означает, что уровни сигналов, проходящих через полюсы, будут меньше. Так как наша основная задача при проектировании — уменьшить длину регистра, то необходимо обращать внимание не только на величину шума, но и на уровни сигналов.

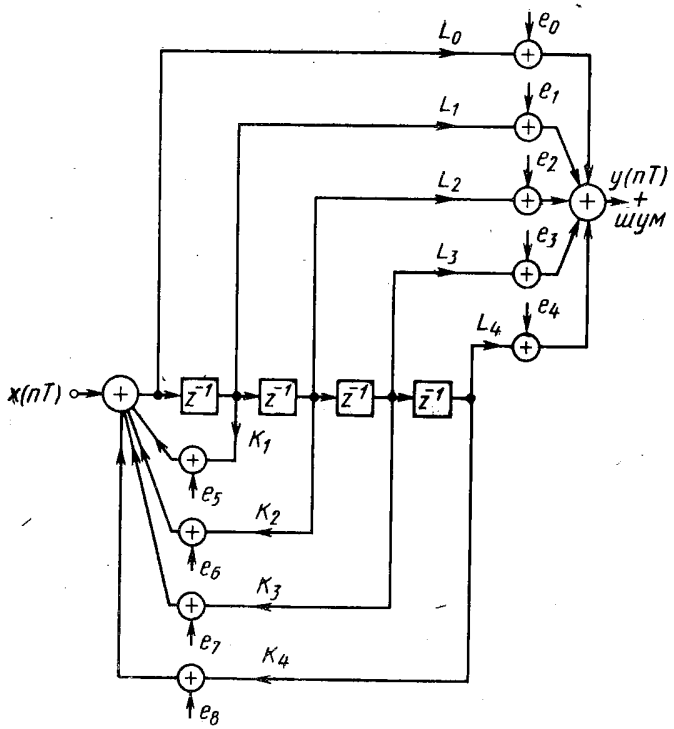


Рис. 4.5. Шумовая модель для канонической формы цепи.

На рис. 4.7 и 4.8 показаны каскадные реализации системы четвертого порядка. Схема рис. 4.7 составлена из двух прямых реализаций второго порядка. Шумы, соответствующие ошибкам при умножениях, вводятся, как и раньше. Схема рис. 4.8 является последовательным соединением двух канонических фильтров второго порядка; на этой схеме шумы показаны как комбинированный эффект операций умножения. Отметим, что,

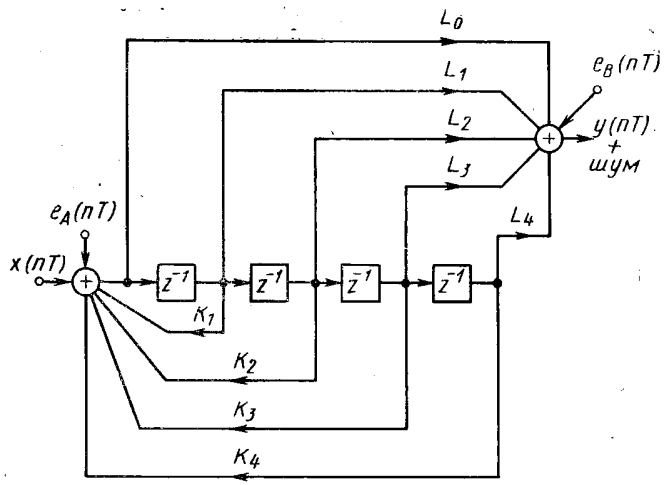


Рис. 4.6. Эквивалентная шумовая модель для канонической формы цепи.

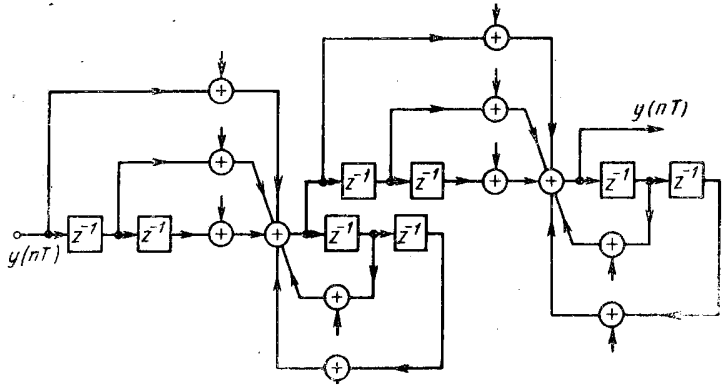


Рис. 4.7. Шумовая модель для каскадной или последовательной формы цепи.

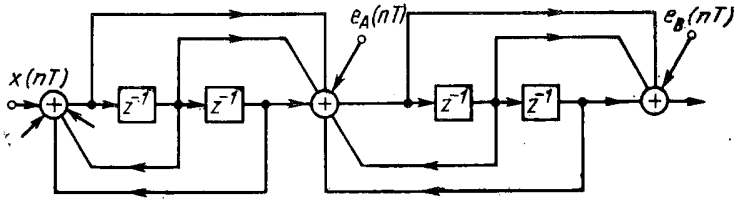


Рис. 4.8. Эквивалентная шумовая модель для последовательной формы цепи.

за исключением начала и конца, цепь из резонаторов, соединенных в схему прямого или канонического типа, образует идентичную структуру.

4.8. ЭФФЕКТ МЕРТВОЙ ЗОНЫ

В § 4.7 предполагалось, что ошибки, вносимые каждым округлением, являются взаимно некоррелированными случайными величинами. Нам известен по крайней мере один противоречащий пример, а именно когда входным сигналом фильтра является константа. Исследуем подробно этот случай.

Рассмотрим простой фильтр (4.1) с $K=0{,}96$, на вход которого поступает константа, равная 10. Предположим, что округление проводится до ближайшего целого числа ($E_0=1$) и что $y(-T)=265$. Предположим также, что при точном выполнении арифметических операций $y(nT)$ достигнет установившегося значения 250. Однако при округлении наблюдается следующее:

До округления		После округления
$y(0)$	264,40	264
$y(T)$	263,44	263
$y(2T)$	262,48	262
$y(3T)$	261,52	262
⋮	⋮	⋮
$y(nT)$	261,52	262

и фильтр достигнет установившегося значения 262. Предположим, что начальное условие $y(-T)=245$. Тогда итерации выполняются следующим образом:

До округления		После округления
$y(0)$	245,20	245
⋮	⋮	⋮
$y(nT)$	245,20	245

и фактически любое начальное состояние в диапазоне $238 \leqslant y(-T) \leqslant 262$ будет в то же время установившимся состоянием. Этот диапазон называется «мертвой» зоной (*deadband*) [3].

Если рассмотреть общий случай прямой реализации цифрового фильтра, описываемый (2.38), и предположить, что все произведения суммируются прежде, чем будет произведено округление, то можно получить общее соотношение для эффекта мертвой зоны. Пусть постоянный входной сигнал равен X, а выходной сигнал достигает установившегося значения Y, не обязательно равного предсказанной величине Y_c, которую можно получить, если выполнять арифметические операции с бесконечной точностью. Тогда из (2.38)

$$y(nT)=Y=\left(\sum_{i=0}^{r} L_i\right)X-\left(\sum_{i=1}^{m} K_i\right)Y+e(nT), \quad (4.21)$$

где $|e(nT)| \leqslant E_0/2$. Это позволяет записать неравенство для Y:

$$\left|\left(1+\sum_{i=1}^{m} K_i\right)\left(Y-\frac{\sum_{i=0}^{r} L_i}{1+\sum_{i=1}^{m} K_i}X\right)\right| \leqslant \frac{E_0}{2}. \quad (4.22)$$

Заметим, что «точное» значение Y будет равно

$$Y_c=\frac{\sum_{i=0}^{r} L_i}{1+\sum_{i=1}^{m} K_i}X, \quad (4.23)$$

так что отклонение реальной величины от «точной» удовлетворяет неравенству

$$|Y-Y_c| \leqslant \frac{E_0}{2\left|1+\sum_{i=1}^{m} K_i\right|}. \quad (4.24)$$

Выражение (4.24) говорит о том, что необходимым условием для постоянной ошибки в установившемся режиме,

когда на входе — постоянный сигнал, является требование, чтобы ошибка удовлетворяла этому неравенству. Общее число ступеней квантования в мертвой зоне примерно равно усилению по постоянному току фильтра, имеющего только полюсы. Необходимое условие будет и достаточным, если последние m отсчетов выходного сигнала для фильтра m-го порядка равны и лежат в пределах мертвой зоны. Если вместо округления выполнялось усечение, ширина мертвой зоны будет такой же, но она не будет симметричной относительно Y_c.

Отсюда можно сделать вывод, что для фильтра первого порядка с нулевым входным сигналом выходной сигнал не упадет до нуля, а «повиснет», как только будет достигнута граница мертвой зоны. У фильтров более высокого порядка возможны более сложные эффекты; у них выходной сигнал может пройти через мертвую зону и достигнуть другого ее края, или могут возникнуть стационарные колебания. Имеется также явление, подобное мертвой зоне, связанное с частотой дискретизации. Рассмотрим фильтр, определяемый уравнением

$$y(nT) = Ky(nT-T) + Ly(nT-2T) + x(nT),$$
$$K=1{,}1,\ L=0{,}9, \qquad (4.25)$$

при начальных условиях $y(-T)=2$, $y(-2T)=-2$. Если проводить квантование до ближайшего целого числа, то при $x(nT)=0$ сигнал ведет себя следующим образом:

До округления	После округления	Предыдущий выходной сигнал
$y(0)$ $-1{,}6$	-2	$+2$
$y(T)$ $+1{,}6$	$+2$	-2
$y(2T)$ $-1{,}6$	-2	$+2$
. . . . .	. . .	. . .

Как видим, происходит колебание на частоте π/T. Смысл его заключается в том, что каждый раз при выполнении итерации появляется шумовой отсчет и фильтр усиливает частотную составляющую на частоте π/T до тех пор, пока он не зафиксирует уровень квантования.

Иногда можно избежать эффекта мертвой зоны путем добавления небольшого шума на входе фильтра [3]. Этот метод (*dithering*) в некоторых случаях бывает очень эффективным.

4.9. ФОРМУЛЫ ДЛЯ ШУМА ОКРУГЛЕНИЯ ПРИ РАЗЛИЧНЫХ РЕАЛИЗАЦИЯХ ЦИФРОВЫХ ЦЕПЕЙ

Если предположить, что отсчеты шума некоррелированы, то общая теория шума из-за аналого-цифрового преобразования, разработанная в § 4.3 может быть непосредственно применена для шумов округления. Действительно, единственное различие между шумом округления и шумом аналого-цифрового преобразования является топологическим; шум аналого-цифрового преобразования поступает на вход фильтра, в то время как шум округления может поступать в другие точки системы. Основные формулы (4.9) и (4.11) можно непосредственно применять при условии, что используется передаточная функция, которая дает правильную связь между источниками шума и результирующим шумом на выходе, вызываемым этими источниками. Например, для рис. 4.3 запишем эту функцию в виде

$$H(z) = R(z)/P(z). \qquad (4.26)$$

Ясно, что $R(z)$ определяет нули $H(z)$, вызываемые четырьмя задержками в прямой цепи, а $P(z)$ определяет полюсы $H(z)$, вызываемые четырьмя задержками в цепи обратной связи. Анализ рис. 4.3 и 4.4 показывает, что на шум не может влиять член $R(z)$. Таким образом, передаточная функция относительно источника шума $e(nT)$ на рис. 4.4 и последующий выходной шум в установившемся режиме определяются выражением

$$\sigma_1^2 = \frac{mE_0^2}{12(2\pi j)} \oint \frac{z^{-1}}{P(z)\cdot P(1/z)}\, dz, \qquad (4.27)$$

где предполагается, что дисперсия источника шума, вызванная каждым шумовым генератором, равна $E_0^2/12$, и что имеется m таких генераторов шума.

На рис. 4.6 шум $e_A(nT)$ проходит через полюсы и нули, т. е. через весь фильтр, так что дисперсия выходного шума, обусловленная $e_A(nT)$, становится равной

$$\sigma_2^2 = \frac{mE_0^2}{12(2\pi j)} \oint H(z)\, H(1/z)\, z^{-1} dz. \qquad (4.28)$$

В этом случае шум округления проходит через тот же самый фильтр, что и шум, вызываемый аналого-цифровым преобразованием, и является таким образом *аддитивным* по отношению к входному сигналу. Общий шум получается путем сложения дисперсии $e_B(nT)$ и σ_2^2.

Для каскадной формы, показанной на рис. 4.7, запишем $H(z)$ в виде

$$H(z)=\frac{R_1(z)R_2(z)}{P_1(z)P_2(z)}, \tag{4.29}$$

где $R_1(z)$ и $P_1(z)$ относятся к нулям и полюсам первого резонатора, а $R_2(z)$ и $P_2(z)$ — к нулям и полюсам второго резонатора. Если каждый шум имеет дисперсию $E_0^2/12$, то результирующая дисперсия на выходе равна

$$\sigma_3^2=\frac{5E_0^2}{12(2\pi j)}\oint\left[\frac{R_2(z)R_2(1/z)}{P_1(z)P_1(1/z)P_2(z)P_2(1/z)}+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{P_2(z)P_2(1/z)}\right]z^{-1}dz. \tag{4.30}$$

Для формы, показанной на рис. 4.8, результат равен

$$\sigma_4^2=\frac{E_0^2}{12(2\pi j)}\left\{\oint\left[\frac{2R_1(z)R_1(1/z)R_2(z)R_2(1/z)}{P_1(z)P_1(1/z)P_2(z)P_2(1/z)}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{5R_2(z)R_2(1/z)+2}{P_2(z)P_2(1/z)}\right]z^{-1}dz\right\}. \tag{4.31}$$

4.10. ПРИМЕР. РАЗЛИЧНЫЕ СТРУКТУРЫ ЦЕПИ С ДВУМЯ ПОЛЮСАМИ И ОДНИМ НУЛЕМ

Уравнения (4.28)—(4.31) по меньшей мере означают, что влияние шума округления меняется в зависимости от выбранной структуры, хотя все структуры имеют одну и ту же общую передаточную функцию. Попытаемся теперь несколько разобраться в проблеме выбора структуры, которая минимизирует вредное влияние этого шума. Для этого, имея заданную передаточную функцию $H(z)$, требуется произвести вычисления по формулам вида (4.28)—(4.31), что оказывается обычно трудоёмким процессом. Однако некоторый опыт работы с цифровыми цепями позволяет прийти к вполне приемлемому решению о наиболее подходящей структуре цепи. Рассмотрим довольно простой пример, который иллюстрирует некоторые из основных положений.

Передаточная функция

$$H(z)=\frac{A_1z}{z-\beta}+\frac{A_2z}{z-\gamma} \tag{4.32}$$

(β и γ — действительные полюсы системы, расположенные внутри единичной окружности) может быть реализована различными путями, часть из которых представлена на рис. 4.9.

Мы видим, что рис. 4.9,*а* и 4.9,*б* отличаются лишь тем, что коэффициенты умножения A_1 и A_2 используют-

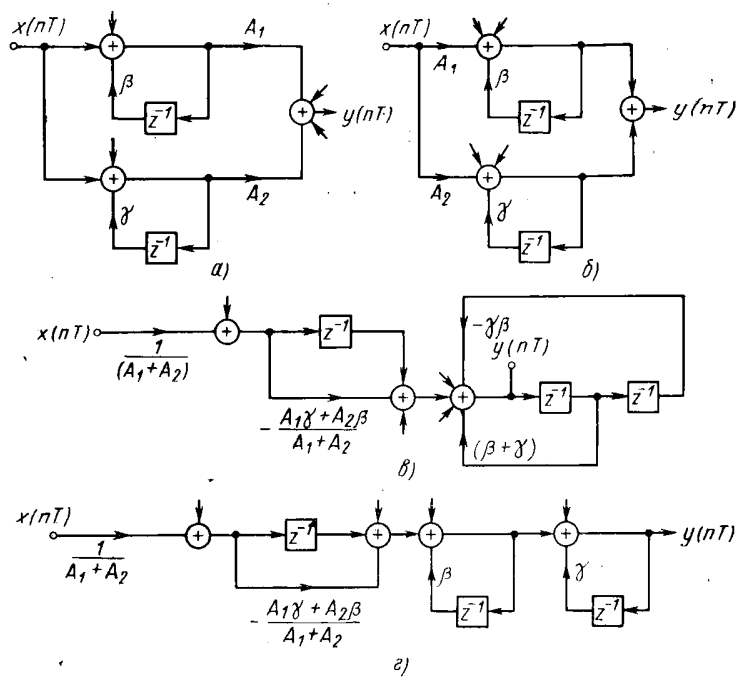


Рис. 4.9. Шумовые модели для различных форм одной и той же цепи.

ся либо позже, либо раньше выполнения двух параллельных итераций первого порядка. На этих рисунках каждая стрелка без надписи обозначает ввод источника шума с дисперсией $E_0^2/12$. Выходной шум в установившемся режиме легко вычисляется с помощью (4.13). Для рис. 4.9,*а*

$$\sigma_1^2=\frac{E_0^2}{12}\left(\frac{A_1^2}{1-\beta^2}+\frac{A_2^2}{1-\gamma^2}+2\right), \tag{4.33}$$

для рис. 4.9,*б*

$$\sigma_2^2 = \frac{E_0^2}{6}\left(\frac{1}{1-\beta^2}+\frac{1}{1-\gamma^2}\right). \qquad (4.34)$$

Таким образом, желание провести операции умножения на A_1 и A_2 раньше или позже выполнения итерации зависит всецело от значений A_1 и A_2. Если они намного больше единицы, то цепь рис. 4.9,*б* создает меньший шум, если же значения A_1 и A_2 намного меньше единицы, то меньший шум создает цепь рис. 4.9,*а*. Отметим, что шум аналого-цифрового преобразования не зависит от местоположения A_1 и A_2; таким образом, (4.33) и (4.34) дают нам все, что нужно знать об относительных шумах.

Структуры цепей, изображенных на рис. 4.9,*в* и *г*, несколько сложнее для анализа. Рассматривая вначале рис. 4.9,*в*, видим, что шумы трех источников проходят через цепь с передаточной функцией

$$F(z) = \frac{z^2}{(z-\gamma)(z-\beta)}. \qquad (4.35)$$

Таким образом,

$$\sigma_3^2 = \frac{E_0^2}{12(2\pi j)}\oint F(z)F(1/z)z^{-1}dz \qquad (4.36)$$

или после вычисления интеграла

$$\sigma_3^2 = \frac{E_0^2}{12}\left[\frac{1+\beta\gamma}{1-\beta\gamma}\frac{1}{(1-\beta^2)(1-\gamma^2)}\right], \qquad (4.37)$$

где σ_3^2 является дисперсией выходного шума, вызываемого тремя из четырех источников шума, показанных на рис. 4.9,*в*, и поэтому меньше общего шума этой цепи.

Полезно сравнить (4.34) и (4.37). Отношение дисперсий равно

$$\frac{\sigma_2^2}{\sigma_3^2} = 2\,\frac{(2-\gamma^2-\beta^2)(1-\beta\gamma)}{1+\beta\gamma}. \qquad (4.38)$$

Если полюсы β и γ расположены близко к единичной окружности (что справедливо во многих практических случаях), то, как это видно из (4.38), σ_2^2 меньше σ_3^2. Таким образом, параллельная структура цепи (рис. 4.9,*б*) предпочтительней прямой (рис. 4.9,*в*). Сохраняется ли эта ситуация, если множитель $1/(A_1+A_2)$ и нуль на рис. 4.9,*в* передвинуть к правой части итерации второго порядка, зависит от численных значений A_1, A_2, γ и β.

4.11. ИЗМЕРЕНИЕ ШУМОВ

Основное внимание в этой главе уделялось до сих пор физическим явлениям, и поэтому ограничивалось использование математической терминологии. Однако проблемы квантования включают много важных вопросов, большинство из которых до сих пор еще не получило решения. В частности, важно разработать экспериментальные методы исследования шума, вызванного

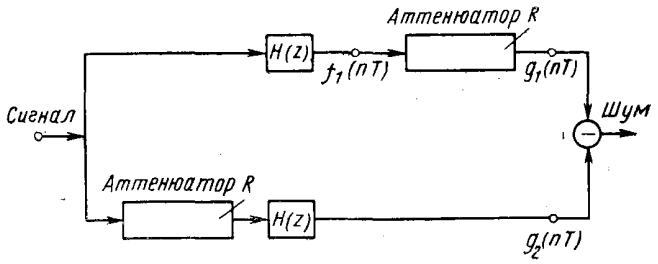


Рис. 4.10. Схема эксперимента для измерения шума.

цифровой обработкой, а для этого требуется знание некоторых основ математики, сводящихся в основном к теории спектральной оценки для дискретного случая, содержащейся во многих работах [2, 4, 7, 8]. Данный параграф написан на основе этих работ.

Один из способов измерения шума в цифровом фильтре, вызванного квантованием, приведен на рис. 4.10. Используются два одинаковых фильтра $H(z)$, но верхний фильтр возбуждается достаточно большим сигналом, и, следовательно, на его выходе [точка $f_1(nT)$] имеется большое отношение сигнал/шум, такое, что после прохождения сигнала через аттенюатор R можно предположить, что величина шума, входящего в сигнал $g_1(nT)$, является очень малой. Таким образом, если шум, создаваемый фильтром $H(z)$, значительный, то его почти полностью можно выявить в $g_2(nT)$, и поэтому измерение разности представляет собой прямое измере-

ние шума, вызываемого фильтром $H(z)$. В общем случае желательно измерить статистические характеристики этого шума, например распределение вероятности, среднее значение, среднеквадратическое значение, корреляционную функцию и спектр; поскольку все это — статистические измерения, необходимо понять функциональную зависимость ошибок от специфики проводимых измерений.

4.12. ОЦЕНКА СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ ШУМА

Понятия распределения вероятности, стационарного случайного процесса, эргодической гипотезы, центральной предельной теоремы и гауссовых процессов в основном одни и те же, когда они применяются к непрерывным или дискретным процессам, и мы полагаем, что читатель достаточно знаком с этими вопросами. Тем не менее для развития наших представлений необходимо вникнуть в сущность некоторых простых статистических задач.

Рассмотрим вначале задачу оценки среднего значения по ансамблю конечного набора шумовых данных, содержащего $N+1$ отсчетов. Естественным способом определения этой оценки является

$$A[x(nT)]=\frac{1}{N+1}\sum_{n=0}^{N}x(nT). \qquad (4.39)$$

Случайная переменная A является хорошей оценкой, если ее среднее значение по ансамблю равно среднему значению по ансамблю исходного шума $x(nT)$ и если ее дисперсия становится равной нулю при достаточно больших N. Первое условие, очевидно, удовлетворяется, если $x(nT)$ является стационарным, например если его среднее по ансамблю инвариантно во времени. Чтобы изучить второе условие, запишем дисперсию в виде $\sigma^2[A]=E[A^2]-E^2[A]$, где E — среднее значение по ансамблю. Тогда

$$\sigma^2[A]=\frac{1}{(N+1)^2}\sum_{n=0}^{N}\sum_{m=0}^{N}\{E[x(nT)\,x(mT)]-E^2[x(nT)]\}. \qquad (4.40)$$

Если по-прежнему $x(nT)$ стационарно, то член под знаком двойной суммы представляет собой функцию только разности времен $nT-mT$ и может быть записан как $Q(nT-mT)=Q(mT-nT)$. В результате (4.40) примет вид

$$\sigma^2[A]=\frac{1}{N+1}\sum_{n=-N}^{N}\left(1-\frac{|n|}{N+1}\right)Q(nT). \qquad (4.41)$$

Соотношение (4.41) устанавливает ограничение на *автоковариацию* $Q(nT)$ исходного процесса, и если $\lim\limits_{N\to\infty}\sigma^2[A]=0$, то можно сказать, что A является хорошей оценкой.

В качестве примера положим $Q(nT)=K^{|n|}$, где $K<1$, так что $Q(nT)$ уменьшается с ростом n. Тогда вычисление по формуле (4.41) дает

$$\sigma^2[A]=\frac{1}{N+1}\left\{\frac{1+K-2K^{N+1}}{1-K}-\frac{1}{N+1}\left[\frac{2K(1-K^N)}{(1-K)^2}-\frac{2NK^{N+1}}{1-K}\right]\right\}. \qquad (4.42)$$

Для больших N членами вида K^N можно пренебречь. В результате (4.42) упростится:

$$\sigma^2[A]\approx\frac{1+K}{(N+1)(1-K)}. \qquad (4.43)$$

Из (4.43) легко оценить требуемое значение N для фиксированного K, при котором $\sigma^2[A]$ было бы достаточно мало.

Статистические параметры часто можно измерить с помощью линейной фильтрации. Так, например, чтобы оценить среднее значение сигнала, вместо определения по формуле (4.39) можно пропустить шум $x(nT)$ через фильтр, соответствующий разностному уравнению первого порядка

$$y(nT)=y(nT-T)+K[x(nT)-y(nT-T)].$$

Если шум, имеющий фиксированное среднее значение m_0, внезапно, начиная с момента $n=0$, возбуждает систему первого порядка, то легко видеть, что среднее значение выходного сигнала $y(nT)$ можно выразить в виде

$$E[y(nT)]=m_0\sum_{k=0}^{n}h(kT)=m_0[1-(1-K)^{n+1}].$$

Таким образом, среднее значение выходного сигнала фильтра асимптотически приближается к среднему значению входного сигнала. Теперь нужно доказать, что дисперсия выходного сигнала асимптотически стремится к нулю. Это действительно справедливо, если используется та же ковариационная функция $Q(nT)$, что и в (4.42), а именно $Q(nT)=K^{|n|}$. Доказать это предлагается читателю.

С помощью фильтров можно оценить не только среднее значение по ансамблю, но и спектральную плотность случайной функции. Это показывается ниже.

4.13. АВТОКОВАРИАЦИЯ И СПЕКТРАЛЬНАЯ ПЛОТНОСТЬ

Автоковариация $Q(nT)$ является двусторонней последовательностью, имеющей значения как для положительных, так и для отрицательных n и, кроме того, обладающей особым свойством четности относительно nT. Таким образом, спектральную плотность можно определить как двустороннее z-преобразование:

$$S(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} Q(nT)\, z^{-n}. \qquad (4.44)$$

Трансформанты $Q(nT)$ и $S(z)$ удобны для анализа шума и соответствуют в случае детерминированных колебаний колебанию $x(nT)$ и его преобразованию $X(z)$. Чтобы лучше оценить их сущность, было бы полезно исследовать вопрос воздействия линейного фильтра на шум. Используя (4.44), можно выразить автоковариацию выходного сигнала $y(nT)$ линейного фильтра через составляющие его входного сигнала $x(nT)$ следующим образом:

$$E[y(nT)\,y(mT)]=\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m} Q_x(nT-mT-kT+$$

$$+lT)\,h(kT)\,h(lT), \qquad (4.45)$$

где

$$Q_x(kT-lT)=E[x(kT)\,x(lT)].$$

В (4.45) предполагается, что процесс внезапно воздействует на фильтр в момент $n=0$; таким образом, $y(nT)$ не станет стационарным процессом до тех пор, пока не

затухнут естественные колебания фильтра. Когда будет достигнуто это установившееся состояние, можно записать

$$Q_y(nT-mT)=E[y(nT)\,y(mT)]=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} Q_x(nT-mT-kT+lT)\,h(kT)\,h(lT). \qquad (4.46)$$

Равенство (4.46) можно представить как сумму спектральных членов путем умножения обеих частей на z^{-n+m} и суммирования в дважды бесконечных пределах. Тройная сумма теперь становится разделяемой, и в результате получаем хорошо известную формулу

$$S_y(z)=S_x(z)\,H(z)\,H(1/z), \qquad (4.47)$$

аналогичную формуле (2.41). Заметим, однако, что (4.47) включает двусторонние z-преобразования, т. е. представляет собой соотношение мощностей, и что *передаточная функция по эффективной мощности* $H(z)H(1/z)$ имеет полюсы внутри и вне единичного круга.

Из определения $Q(nT)$ следует, что $Q(0)$ есть среднеквадратическое значение случайного процесса, а именно:

$$Q(0)=E[x^2(nT)]. \qquad (4.48)$$

Однако с помощью теоремы обращения получаем

$$Q(kT)=\frac{1}{2\pi j}\oint S(z)\,z^{k-1}\,dz. \qquad (4.49)$$

Если теперь положить $z=e^{j\omega T}$ и $\omega=2\pi f$, то выражение (4.49) для $k=0$ примет вид

$$Q(0)=T\int_0^{2\pi} S(e^{j2\pi fT})\,df. \qquad (4.50)$$

Мы представили среднеквадратическое значение случайного процесса в виде интеграла от спектральной плотности при однократном обходе вдоль единичной окружности; этим разъясняется использование термина «спектральная» плотность для $S(z)$.

4.14. ОЦЕНКА ФУНКЦИИ КОВАРИАЦИИ И СПЕКТРАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ

Функцию ковариации $Q(kT)$ можно оценить с помощью той же общей процедуры, что и для оценки среднего значения, а именно путем измерения среднего по времени. Так, если имеются $(N+1)$ отсчетных данных исходного процесса $x(nT)$ и требуется оценить $Q(kT)$, рассмотрим произведение $x(nT)x(nT+kT)$ и найдем среднее по времени этого произведения. Если положить, что $x(nT)$ равно нулю вне интервала измерения, результат измерения будет равен

$$R_N(kT)=\frac{1}{N+1-|k|}\sum_{n=0}^{N-|k|}x(nT)\,x(nT+|k|T). \quad (4.51)$$

Как и ранее, можно показать, что среднее значение результата измерений $R_N(kT)$ точно совпадает с ковариацией, и найти условия, при которых дисперсия $R_N(kT)$ становится равной нулю при $N\longrightarrow\infty$. Из (4.51) можно получить, что это условие зависит от четвертого момента исходного случайного процесса.

До сих пор оценка статистических параметров не вызывала сомнений, и, действительно, непротиворечивость среднего значения и ковариации можно подтвердить, обратившись к эргодической гипотезе. Однако оценка спектральной плотности может привести к ошибке, если не принять специальных мер. Посмотрим, например, что представляет собой обычная оценка функции $S(z)$. Пусть

$$X_N(z)=\sum_{n=0}^{N}x(nT)\,z^{-n},\qquad X_N\left(\frac{1}{z}\right)=\sum_{n=0}^{N}x(nT)\,z^{n}. \quad (4.52)$$

Определим спектральную оценку

$$S_N(z)=\frac{1}{N+1}X_N(z)\,X_N\left(\frac{1}{z}\right). \quad (4.53)$$

$S_N(z)$ обычно известно как *периодограмма*.

Вначале, преобразуя (4.52) и (4.53) и пользуясь определением (4.51), можно показать, что

$$S_N(z)=\sum_{m=-N}^{N}\left(1-\frac{|m|}{N+1}\right)R_N(mT)\,z^{-m}. \quad (4.54)$$

Происходит странная вещь. Если в (4.54) взять предел при $N\longrightarrow\infty$, то правая часть (4.54) превратится в правую часть (4.44) (при условии сохранения эргодичности). Следовательно, $S_N(z)\longrightarrow S(z)$. Однако если, использовав (4.53), сначала вычислить дисперсию от $S_N(z)$, а затем положить $N\longrightarrow\infty$, то в этом случае дисперсия не стремится к нулю. Простого примера будет достаточно, чтобы это продемонстрировать. Рассмотрим спектральную оценку (4.53) для $z=1$, т. е. на нулевой частоте. Тогда

$$E[S_{N^2}(1)]=\frac{1}{(N+1)^2}\sum\sum\sum\sum E[x(nT)\,x(mT)x(lT)x(kT)]. \quad (4.55)$$

Если рассматривается гауссов процесс, то четвертый момент определяется из вторых моментов с помощью выражения

$$E[x_1x_2x_3x_4]=E[x_1x_2]E[x_3x_4]+$$
$$+E[x_1x_3]E[x_2x_4]+E[x_1x_4]E[x_2x_3]. \quad (4.56)$$

Из (4.55) и (4.56) видно, что дисперсии от $S_N(1)$ в $\sqrt{2}$ раз больше среднего значения от $S_N(1)$ для всех N; следовательно, дисперсия не стремится к нулю и оценка является несовместимой.

Дадим физическую интерпретацию приведенным выше фактам. При выполнении *прямого* измерения спектра в соответствии с (4.53) дисперсия в измерении может быть уменьшена благодаря выполнению одного и того же измерения на различных порциях данных и последующему усреднению. В качестве примера разделим, скажем, N отсчетов на M равных частей, каждая из которых содержит N/M отсчетов. Если отношение N/M сохраняется постоянным при увеличении N и M, то из эргодической гипотезы становится ясным, что сходимость в среднем обеспечивается. Такой метод измерения может быть сформулирован следующим образом. Пусть

$$X_{N^k}(z)=\sum_{kN}^{(k+1)N-1}x(nT)\,z^{-n}, \quad (4.57)$$

$$S_{N^k}(z)=\frac{X_{N^k}(z)\,X_{N^k}(1/z)}{N}, \quad (4.58)$$

$$F_{N,K}(z)=\frac{1}{K}\sum_{k=0}^{K-1}S_{N^k}(z). \qquad (4.59)$$

С помощью эргодической гипотезы напишем

$$\lim_{N\to\infty}\lim_{K\to\infty}F_{N,K}(z)\to S(z). \qquad (4.60)$$

Вместо использования прямого спектрального измерения можно обратиться к (4.54), определив вначале корреляционную функцию $R_N(mT)$ с помощью выражения (4.51). Так как (4.54) и (4.53) описывают эквивалентные измерения, ясно, что непосредственное использование (4.54) для всех отсчетов приведет к большой ошибке измерения. Из (4.51) непосредственно вытекает, что при $k\longrightarrow N$ оценка $R_N(kT)$ становится несостоятельной, так как для нее используется небольшое число членов. Действительно, $R_N(NT)$ основывается на одиночном произведении $x(0)x(NT)$, и дисперсия этого измерения может быть в N раз больше дисперсии $R_N(0)$ (это будет в том случае, если исходные случайные процессы состоят из некоррелированных переменных). Отсюда следует, что измерения спектра на основе выражения (4.54) можно производить сначала с помощью значений $R_N(mT)$ для m, малых по сравнению с N; в общем случае это можно сделать путем введения в (4.54) *функции окна* $W(mT)$:

$$T_N(z)=\sum_{m=-N}^{N}\left(1-\frac{|m|}{N+1}\right)W(mT)\,R_N(mT)\,z^{-m}. \qquad (4.61)$$

В общем случае требуется, чтобы $W(mT)$ была четной функцией m и уменьшалась с увеличением $|m|$ так, чтобы к моменту времени $m\approx N$ величина $W(mT)$ была пренебрежимо мала. Частным случаем функции окна является функция, которая удовлетворяет условиям $W(mT)=0$ для $|m|\geqslant M$ и $W(mT)=1$ для $|m|<M$. По физическим соображениям следует, что с уменьшением M спектральное разрешение измерений должно уменьшиться, а точность самого измерения — возрасти.

С помощью теоремы о комплексной свертке (2.15) можно ассоциировать взвешивание спектрального изме-

рения с функцией окна $W(mT)$. Так, если $U(z)$ является двусторонним z-преобразованием от $W(mT)$, то

$$T_N(z)=\frac{1}{2\pi j}\oint S_N(v)\,U\left(\frac{z}{v}\right)v^{-1}dv, \qquad (4.62)$$

где $T_N(z)$ — среднее взвешенное (по частоте) значение спектральной плотности $S_N(v)$. Если окно $W(mT)$ является «широким» (т. е. охватывает много отсчетов), то $U(z)$ является «узким», так что интеграл (4.62) представляет собой приближенно спектральную плотность

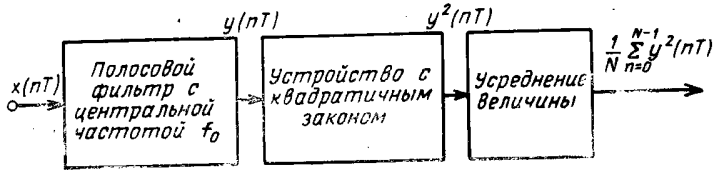


Рис. 4.11. Измерение средней мощности в полосе частот.

$S_N(z)$. Он обеспечивает хорошее спектральное разрешение, но зато дает большие статистические флюктуации.

В дополнение к прямому и косвенному (через корреляционную функцию) методам оценки спектра имеется третий метод, использующий набор фильтров, как показано на рис. 4.11.

Если используется набор из n таких каналов, то можно оценить n точек кривой спектральной плотности. Можно получить простую интуитивную картину действия структуры, показанной на рис. 4.11, если предположить, что входной сигнал является белым шумом, полосовой фильтр — узкополосным фильтром с идеальной прямоугольной характеристикой и шириной полосы B и спектр остается постоянным во всей полосе пропускания этого фильтра. Тогда из (4.50) получаем

$$Q_y(0)=E[y^2(nT)]=BTS(e^{j\omega_0 T}). \qquad (4.63)$$

Но с помощью эргодической гипотезы

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}y^2(nT)=E[y^2(nT)],$$

и, следовательно, измерение представляет собой состоятельную оценку спектра на частоте $\omega_0=2\pi f_0$.

Таким образом, определены три способа выполнения спектрального анализа, но не рассмотрены соотношения между значениями измеряемых параметров и получаемыми дисперсиями измерений, не рассмотрено также распределение вероятности спектральных измерений. Читателю, интересующемуся дальнейшим развитием этих вопросов для дискретных переменных, следует обратиться к довольно сложным трудам Гренандера и Розенблатта [7] и Хеннана [8].

4.15. ПРИМЕР. ИЗМЕРЕНИЕ ШУМА ПРИ КАСКАДНОМ СОЕДИНЕНИИ РЕЗОНАТОРОВ

Простая модель шума квантования, которая была введена в § 4.3 и привела к общему результату (4.9), основывается на предположении, что формируемые шумовые отсчеты не коррелированы. Эта гипотеза нуждается в экспериментальной проверке. С этой целью изучалась конкретная структура, показанная на рис. 4.12 [6], пред-

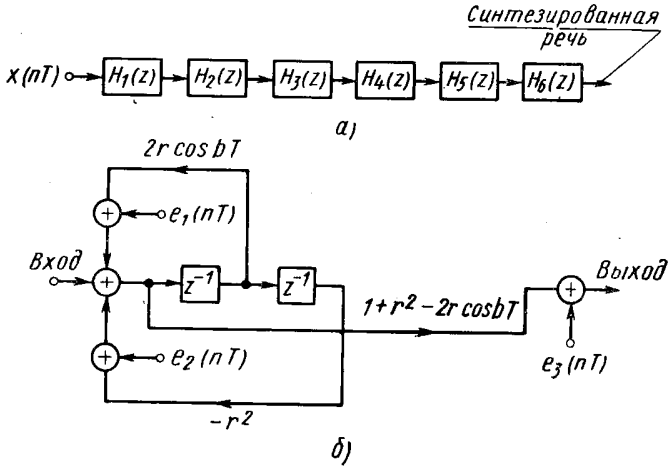


Рис. 4.12. Цифровая цепь синтеза формант:
а) последовательное соединение шести резонаторов $H(z)$; *б*) структура каждого $H(z)$.

ставляющая собой блок-схему генератора гласных звуков, обычно используемого при исследованиях речи. Если резонансная частота $H_1(z)$ устанавливается равной 200 *гц*, резонансная частота $H_5(z)$ — равной 3500 *гц* и $H_6(z)$ — равной 4 500 *гц*, то для формирования 10 гласных звуков американской речи резонансные частоты для H_2, H_3 и H_4 устанавливаются в соответствии с табл. 4.1, причем гласный звук вырабатывается путем подачи на вход цепи периодической импульсной последовательности. Период импульсной последовательности лежит в диапазоне ожидаемого интервала между последовательными возбуждениями голосовых связок при формировании человеческой речи; в данном измерении использовался период в 8 *мсек*.

Таблица 4.1

Установка резонаторов для 10 гласных звуков

Фонетическое обозначение звука	Типовое слово	H_2	H_3	H_4
i	(beet)	270	2290	3010
I	(bit)	390	1990	2550
e	(bet)	530	1840	2480
ae	(bat)	660	1720	2410
λ	(but)	520	1190	2390
a	(hot)	730	1090	2440
ɔ	(bought)	570	840	2410
U	(foot)	440	1020	2240
μ	(boot)	300	870	2240
ζ	(bird)	490	1350	1690

С помощью способа, показанного на рис. 4.10, для каждого из 10 гласных звуков измерялось вызываемое системой среднеквадратическое значение шума. Так как входная импульсная последовательность получалась не из аналогового сигнала, а генерировалась внутри системы, то шум от аналого-цифрового преобразования отсутствует, а имеется только шум округления, вырабатываемый системой. В соответствии с нашей гипотезой разрешается моделировать шум, допуская независимость источников шума, как показано на рис. 4.6,*б*, и складывая мощности шума, вносимые каждым из этих источников. Так, например, если цепь рис. 4.12,*б* соответствует $H_2(z)$, то $e_1(nT)$ проходит через $H_2H_3H_4H_5H_6=H_{26}(z)$; шум, вызываемый таким путем, согласно (4.9) определяется как

$$\sigma_2^2=\frac{E_0^2}{12}\sum_{m=0}^{\infty} h_{26}^2(mT), \tag{4.64}$$

где $h_{26}(mT)$ является обратным преобразованием от $H_{26}(z)$. Аналогично, σ_3^2 можно найти из импульсной характеристики $h_{36}(mT)$; выражение для общего шума, вызываемого одиночными источниками шума в каждом $H(z)$, можно записать в таком компактном виде:

$$\sigma_0^2=\sum_{i=2}^{6}\sigma_i^2=\frac{E_0^2}{12}\sum_{i=2}^{6}\sum_{m=0}^{\infty} h_{i6}^2(mT). \tag{4.65}$$

Поскольку, как следует из рис. 4.12,*б*, имеются три источника шума в каждом $H(z)$, то теоретическая мощность шума будет $3\sigma_0^2$. В табл. 4.2 сравниваются теоретически предсказанные значения $3\sigma_0^2$, полученные из (4.65), и измеренные с помощью схемы рис. 4.10; каж-

дое измерение основывалось на 3 500 отсчетах с установкой резонаторов в соответствии с табл. 4.1 (E_0 принималось равным единице). Из таблицы видно, что соответствие неплохое, и это, несомненно, оправдывает использование нашей модели шума квантования при определении критерия для выбора длины регистра.

Таблица 4.2

Сравнение измеренных и предсказанных значений шума для 10 гласных звуков

Фонетическое обозначение звука	Типовое слово	Измеренное значение шума	Теоретически предсказанное значение
i	(beet)	702664	735547
I	(bit)	125574	114717
e	(bet)	101110	104036
ae	(bat)	57674	52241
λ	(but)	51414	52241
a	(hot)	51050	53346
ɔ	(bought)	50700	52763
U	(foot)	53460	52242
μ	(boot)	41044	42123
ζ	(bird)	27574	27465

4.16. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе рассматривались три источника ошибок, когда рекурсивный цифровой фильтр рассчитывается с абсолютной точностью, а реализуется арифметическим устройством с конечной точностью. Одним из источников ошибок является квантование входного сигнала. Эти ошибки рассматриваются как аддитивный случайный шум. Было выведено выражение для выходного сигнала цифрового фильтра, на вход которого поступает шум. Второй источник ошибок — округление или усечение произведений или сумм произведений, которые в дальнейшем опять используются в вычислениях. Такие ошибки фильтруются дальнейшими вычислениями, и выполнение фильтрации может усилить ошибку округления, что в значительной степени зависит от формы реализации фильтра. Рассматривались простые ситуации: во-первых, когда ошибки полностью не коррелированы от отсчета к отсчету; в этом случае анализ фильтра с шумом на входе позволяет предсказать среднеквадратическое значение выходного шума или спектр мощности этого шума, и, во-вторых, когда ошибки полностью коррелированы от отсчета к отсчету; в этом случае наблюдается мертвая зона, или ошибка установившегося режима, которая во много раз больше ступени квантования. И, наконец, третий источник ошибок — изменение положения полюсов из-за квантования коэффициентов в разностных уравнениях. По-прежнему форма реализации фильтра является весьма важным обстоятельством. Как правило, прямая и каноническая формы обладают высокой чувствительностью к ошибкам, в то время как последовательная и параллельная формы менее чувствительны.

Было также установлено, что при оценке спектра мощности шума необходимо проявлять особую осторожность, так как по край-

ней мере один из методов оценки, казавшийся достаточно чувствительным, приводит к дисперсии, которая не уменьшается с улучшением качества измерения. При выполнении таких спектральных измерений всегда желательно измерять мощность шума в полосе частот, а не на одиночной частоте; более широкая полоса является той ценой, которую приходится платить за уменьшение дисперсии оценки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bennet W. R., «Spectra of Quantized Signals», Bell System Tech. J., 1948, July, v. 27, pp. 446—472.
2. Blackman R. B., Tukey J. W., «The Measurement of Power Spectra», sec. B. 5, 1958, pp. 95—100, Power Publications, Inc., N. Y.
3. Blackman R. B., «Linear Data-smoothing and Prediction in Theory and Practice», Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1965.
4. Cooley J. W., Lewis P., Welch P., «The Fast Fourier Transform and Its Applications», IBM Res. Paper RC-1743, Feb. 9, 1967.
5. Gold B., Rader C. M., «Effects of Quantization Noise in Digital Filters», presented at 1966 Spring Joint Computer Conference, AFIPS Proc., 1966, v. 28, pp. 213—219.
6. Gold B., Rabiner L. R., «Analysis of Digital and Analog Formant Synthesizers», presented at the 1967 Conference on Speech Communications, IEEE Trans. Audio, 1968, March, AV16(1).
7. Grenander U., Rosenblatt M., «Statistical Analysis of Stationary Time Series», John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967.
8. Hannan E. J., «Time Series Analysis», John Wiley and Sons, Inc., New York, 1967.
9. Kaiser J. F., «Some Practical Considerations in the Realization of Linear Digital Filters», Proc. 3rd Allerton Conf., Oct., 1965, pp. 20—22.
10. Kaiser J. F., «Digital Filters», in Kuo F. F. and Kaiser J. F. (eds), «System Analysis by Digital Computer», chap. 7, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1966.
11. Knowles J. B., Edwards R., «Effects of a Finite Word Lenght Computer in a Sampled-data Feedback System», Proc. Inst. Elec. Engrs (London), 1965, June, v. 111(6).
12. Knowles J. B., Edwards R., «Complex Cascade Programming and Associated Computational Errors», Electronics Letters, 1965, August, v. 1(6), pp. 160—161.
13. Knowles J. B., Olcayto E. M., «Coefficient Accuracy and Digital Filter Response», IEEE Trans. Circuit Theory, 1968, March, v. 15(1), pp. 31—41.
14. Рэйдер Ч., Голд Б., «Влияние квантования параметров на полюсы цифрового фильтра», ТИИЭР, 1967, № 5, стр. 698—699.
15. Sandberg I. W., «Floating-point-roundoff Accumulation in Digital Filter Realizations», Bell System Tech. J., 1967, October, v. 46, pp. 1775—1791.

Глава пятая

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ ПРОГРАММ В ВИДЕ БЛОК-СХЕМЫ

5.1. ВВЕДЕНИЕ

В трех предыдущих главах подробно рассматривались и анализировались программы решения линейных разностных уравнений. Было показано, что эти программы ведут себя подобно линейным фильтрам. Входные и выходные сигналы понимались как отсчеты временного колебательного процесса, которые берутся каждый раз в тот момент времени, когда завершается решение разностных уравнений. Такие разностные уравнения в основном используются при моделировании на ЦВМ систем аналоговой или цифровой обработки сигналов. Естественно, что цифровое моделирование систем представляет собой область, слишком обширную для того, чтобы ее можно было охватить достаточно полно в одной главе.

Сосредоточим наше внимание только на небольшом и легко локализуемом вопросе моделирования систем вычислением значений колебаний в наиболее интересных точках системы через равные интервалы времени, используя для этого только отсчеты колебаний и дополнительные величины, известные из предыдущего отсчетного интервала. Можно сказать, что эти значения колебаний и дополнительные величины характеризуют состояние системы, и поэтому метод моделирования можно назвать моделированием *последующего состояния*. Между программой вычислительной машины, моделирующей данную систему по методу последующего состояния, и самой системой существует простое соотношение, хотя оно и не обязательно является соотношением эквивалентности. Связь между ними становится более наглядной при представлении программы в виде блок-схемы, которая почти идентична блок-схеме, привычной инженеру, работающему с системами. Эта блок-схема представляет собой самый легкий и наиболее эффективный способ описания программы моделирования последующего состояния и для такой программы она заменяет схему последовательности операций, более знакомую программистам вычислительных машин.

Рассмотрим моделирование систем обработки сигналов. Прежде чем определять термины или делать обобщения, рассмотрим конкретный случай. На рис. 5.1 приведено описание детектора событий [1], который может применяться для сигнализации о начале сейсмического «явления», например землетрясения. Предлагаемый алгоритм заключается в наблюдении изменяющейся во времени энергии ограниченного по полосе сейсмического сигнала, измеряемой возведением сигнала в квадрат с последующей фильтрацией низкочастотным фильтром, и в фиксации момента, когда эта энергия возрастает в C раз по сравнению с энергией, имевшей место на τ *сек* ранее. Так как всегда имеется некоторый сейсмический шум и так как фиксируемые события относительно редки, то устройство, блок-схема которого показана на рис. 5.1, представляет значительный интерес для сейсмологов. Целью моделирования является проверка возможности использования идеи в целом, в оптимизации параметров τ и C и в определении параметров низкочастотного и полосового фильтров.

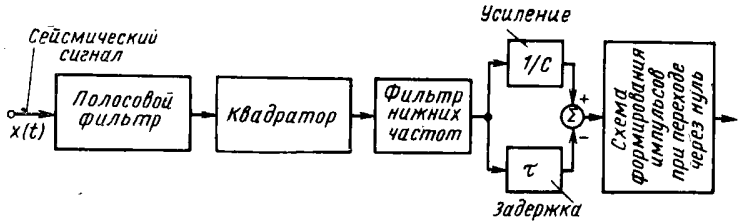


Рис. 5.1. Детектор сейсмических событий.

Первый этап процесса моделирования заключается в выборе соответствующей частоты отсчетов $1/T$ входного сигнала и в подаче некоторого количества этих отсчетов на вычислительную машину. Эти отсчеты могут затем поочередно использоваться в программе моделирования. Программа моделирования берет отсчет входного сигнала $x(nT)$, вычисляет выходной сигнал $y(nT)$ полосового фильтра, вычисляет $y^2(nT)$ и подает эту величину на вход цифрового низкочастотного фильтра. Выходной сигнал низкочастотного фильтра исполь-

зуется как входной сигнал модели элемента задержки и модели схемы усиления. Затем выходной сигнал линии задержки вычитается из выходного сигнала схемы усиления. Если разность становится положительной, а ранее была отрицательной, то образуется импульс, который указывает на предполагаемое обнаружение события. Если после n-го отсчета не будет получен такой удачный ответ, то берется следующий отсчет $x(nT+T)$ и весь процесс повторяется, затем снова повторяется для $x(nT+2T)$ и т. д. Если все вычисления, необходимые для одного выходного отсчета, могут быть закончены за период времени, меньший T, то программа будет в состоянии обрабатывать данные непрерывно; в противном случае в памяти должно будет запоминаться и обрабатываться достаточно большое количество данных.

Следовательно, необходимо отличать систему, которую инженер собирается моделировать, от приближенной копии этой системы, которая фактически реализуется моделированием на вычислительной машине. Систему, которую имеет в виду инженер, назовем *исходной системой* (*source system*), а систему фактически программируемую — *конечной системой* (*object system*). Хотя конечная и исходная системы обычно не эквивалентны, например, исходная система может быть не дискретной, тогда как конечная должна быть дискретной,— они должны хорошо соответствовать одна другой, чтобы возможно было моделирование. Например, в том случае, если исходная система имеет аналоговый фильтр, конечная система будет иметь цифровой фильтр. Термины «исходная» и «конечная» системы выбраны по аналогии с терминами *исходная программа* и *конечная программа**), применяющимися для описания компилирующих программ. Позже в этой главе будут рассмотрены компилирующие программы, которые в качестве исходной программы воспринимают описание исходной системы и образуют конечную программу, эквивалентную конечной системе, соответствующей этой исходной системе. Здесь мы делаем строгое различие между конечной системой, соответствующей исходной системе, и конечной программой, эквивалентной конечной системе.

---

*) Конечная программа — программа составленная в коде команд вычислительной машины. — *Прим. ред.*

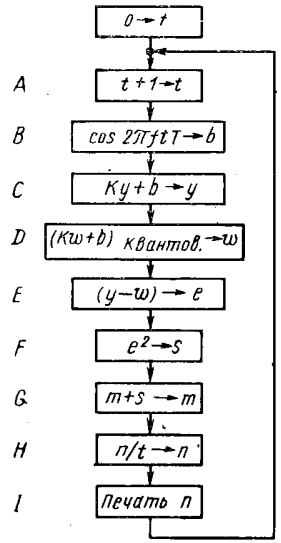
В качестве примера из области цифровых фильтров и разностных уравнений можно указать на то, что программа решения разностных уравнений *эквивалентна* цифровому фильтру, который можно реализовать с помощью элементов. Однако цифровой фильтр может только *соответствовать* некоторому аналоговому фильтру, имеющему почти такие же свойства. Решение вопроса о том, как велико должно быть соответствие между исходной и конечной системами в данном проекте моделирования, — задача, требующая специального рассмотрения, и ее решение не может проводиться без участия инженера.

5.2. КОНЕЧНАЯ СИСТЕМА

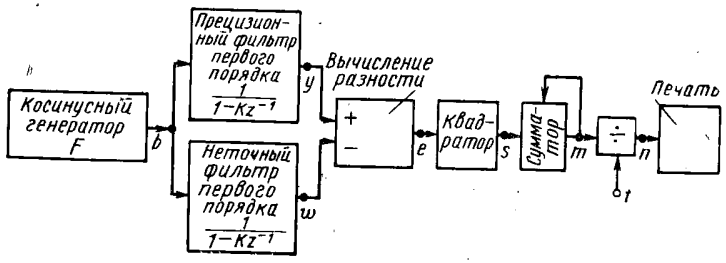
В этом параграфе рассматриваются особенности программ вычислительной машины, осуществляющих моделирование последующего состояния. Вопросы обоснования, т. е. вопросы соответствия между конечной и исходной системами, затрагиваться не будут, а вместо этого будет рассмотрена связь между конечной системой, программой для вычислительной машины и представлением в виде блок-схемы.

Рассмотрим программу, которая может быть составлена для измерения шумов округления, генерируемых цифровым фильтром первого порядка, изобразив ее в виде блок-схем. Программа измеряет среднеквадратическую разность между выходными сигналами двух цифровых фильтров, идентичных во всем, кроме округления. Один фильтр использует арифметику, намного более точную, чем другой, и является опорным, так как его можно считать свободным от шумов. Блок-схема такой программы приведена на рис. 5.2,*а*. В блоке B берется отсчет общего входного сигнала двух фильтров, в блоке C производится итерация разностного уравнения, описывающего опорный фильтр, и в блоке D производится итерация разностного уравнения, воспроизводящего фильтр с шумами. Оба фильтра имеют полюсы в точке $z=K$. Блок E выдает текущий отсчет шума, генерируемого фильтром блока D, путем вычитания из его выходного сигнала выходного сигнала блока C (в предположении, что последний свободен от шумов), в блоках F, G и H вычисляется мгновенное среднеквадратическое значение шума.

Оставляя в стороне любые вопросы, связанные с обоснованием приведенной программы, можно отметить, что она характеризуется двумя основными свойствами: поочередным переходом управления от блока к блоку и относительной простотой взаимодействия различных программ. Первое свойство означает, что порядок выполнения подпрограмм, предусмотренный основным контуром на рис. 5.2,*а*, всегда остается одним и тем же, и что кроме подпрограммы запуска регистра t, все остальные подпрограммы выполняются только один раз за цикл, совершаемый при прохождении основного контура. Эта ситуация значительно отличается от организации управления во многих других видах программ, когда для описания



а)



б)

Рис. 5.2. Описание программы измерения шумов округления цифрового фильтра:

а) в виде схемы последовательности операций; *б*) в виде блок-схемы.

большого количества вариантов порядка выполнения различных подпрограмм требуется составлять специальную блок-схему. Поочередный переход управления по основному контуру программы является правилом для программ моделирования последующего

состояния. Так как в этом случае топологию блок-схемы программы можно предсказать заранее, то блок-схема дает небольшую, если вообще дает, информацию и, таким образом, теряет бо́льшую часть своего значения как способа описания программы.

Второе свойство программы, представленной на рис. 5.2,*а*, и других программ последующего состояния касается характера взаимодействия подпрограмм. Каждая подпрограмма изменяет содержимое только нескольких регистров (в рассматриваемом случае не более одного регистра), которые не связаны ни с одной другой подпрограммой. Так как любая подпрограмма выполняется один раз за цикл управления по основному контуру программы, то каждый из этих регистров изменяется только один раз за цикл, и можно считать, что регистр запоминает последовательные отсчеты временно́го колебания.

Каждый раз, когда управление переходит от блока *I* к блоку *A*, на блок-схеме все эти регистры корректируются, и, таким образом, все они содержат отсчеты определенных колебаний, взятые в один и тот же t-й момент дискретизации. Это значит, что если рассматривать подпрограммы как основные элементы в системе, то *регистры*, ими изменяемые, можно рассматривать как *выходные точки* этих элементов. Регистры, которые данная подпрограмма считывает, но не изменяет, можно рассматривать как ее входные точки, если они изменяются другими подпрограммами, или как параметры элемента, если они неизменны. С этих позиций можно изобразить программу последующего состояния в виде блок-схемы, показанной на рис. 5.2,*б*. Преимуществом такого альтернативного представления программы является то, что в нем ясно показывается прохождение сигнала в программе, однако это представление абсолютно недостаточно для описания последовательности управления подпрограммами, если эта последовательность является запутанной. Из представления в виде блок-схемы также ясно видно, какие регистры на какие подпрограммы влияют и, наоборот, какие подпрограммы на какие регистры влияют. Основная предпосылка этой главы заключается в том, что для задач с использованием методов последующего состояния прохождение сигнала представляет значительно больший интерес, чем последовательность операций управления.

После того как представлена блок-схема программы, становится понятным, что под конечной системой подразумевается система, которая описывается этой же блок-схемой. Целесообразно также рассматривать набор регистров, которые могут изменяться различными подпрограммами, как набор, определяющий состояние конечной системы. Некоторые из этих регистров соответствуют *точкам* на блок-схеме, другие могут находиться внутри блоков. На рис. 5.2,*б* ни один из регистров состояния не является внутренним для какого-либо из блоков. Если бы, например, цифровой фильтр второго порядка был частью системы, то ему понадобилось бы несколько регистров памяти для его предшествующих входных и выходных сигналов, которые корректировались бы каждый раз при вычислении выходного сигнала; это регистры внутреннего состояния. Редко возникает необходимость в точном учете всех регистров состояния, однако при отладке программы полезно помнить, какие регистры должны изменяться и какие подпрограммы предназначены для их изменения.

В описанной нами программе моделирования последующего состояния не содержится никаких данных о том, как заканчивается эта программа. В существующей практике программирования, в отличие от случаев моделирования реальных событий, программа обычно должна быть способна сама определять свое собственное окончание и выдавать сигнал управления для другой программы. Некоторые такие программы определения окончания могут изображаться на диаграмме последовательности операций, однако, как правило, они не изображаются на блок-схеме, разве что только в виде специального примечания. При таком подходе для того, чтобы программа последующего состояния выполнялась для большего или меньшего числа зарегистрированных данных, обычно необходимо лишь внести изменения в программу определения окончания. Фактически программа может выполняться до тех пор, пока в нее поступают входные данные или пока от нее могут приниматься выходные данные. Поэтому, если программа может выполняться в реальном масштабе времени, то она фактически может явиться реализацией конечной системы. Такие программы были осуществлены при моделировании некоторых относительно простых систем.

5.3. СРАВНЕНИЕ ИСХОДНОЙ И КОНЕЧНОЙ СИСТЕМ

Программа последующего состояния эквивалентна конечной системе. Если программа не имеет «ошибок», то конечная система хорошо определена и понятна. Некоторые условия программирования будут указаны ниже, а в этом параграфе рассматривается только вопрос о том, хорошо или плохо конечная система отображает требуемую исходную систему.

Блок-схему конечной системы можно сравнить с блок-схемой исходной системы. Обычно генезисом конечной системы является блок-схема исходной системы, и, таким образом, две блок-схемы удобно сравнивать по топологии и функциям блоков. Если, например, исходная система представляет собой генератор шумов, питающий аналоговый фильтр нижних частот, то, естественно, что в качестве конечной системы будет выбран генератор дискретных случайных чисел, питающий цифровой фильтр нижних частот.

Так как почти всегда можно быть уверенным в большом сходстве исходной и конечной систем, то обычно остается рассмотреть только вопросы дискретизации и квантования. Из этих двух вопросов дискретизация, по-видимому, более важна. Это не удивительно, так как вычислительные машины обычно имеют основной регистр такой длины, которая позволяет производить основные арифметические действия с точностью более 0,01% *). Это примерно соответствует уровню лучших аналоговых элементов, однако находится ближе к нижнему пределу точности вычислительной машины, так как обычно применяются 24- и 32-разрядные машины. Помимо этого, даже небольшую машину можно так запрограммировать, чтобы получить любую требуемую арифметическую точность. Тем не менее вопросы точности иногда все же следует рассматривать, как это видно из гл. 4 применительно к фильтрам. Там было установлено, что требуемые параметры часто представляют собой очень чувствительные функции запоминаемой величины — это могут быть, например, полюсы фильтра как функции коэффициентов разностного уравнения. Точность может отрицательно влиять на поведение системы: система иногда не работает, если она является слишком точной.

*) Этому требованию точности удовлетворяет регистр длиной в 14 разрядов.

Например, на рис. 5.2,*а* один из элементов генерирует косинусоидальную волну с угловой частотой $2\pi f$ *рад* при частоте дискретизации $1/T$. Если fT представляет собой какое-либо рациональное число, то генерируемое косинусоидальное колебание будет уже не приблизительно, а точно периодическим. В том случае, когда это соблюдается, цифровые фильтры могут вполне достигнуть установившегося режима, так что измерения шумов квантования будут давать снова и снова одни и те же результаты. Очень возможно, что это будет не совсем то, что имелось в виду, поскольку косинусоидальное колебание, по-видимому, выбрано как случайный вид входного сигнала, типичный для входных сигналов, обрабатываемых такими фильтрами. Трудность другого рода возникает в том случае, когда считают, что определенное входное значение имеет нулевую вероятность и поэтому не является важным; на практике оно может иметь конечную вероятность из-за квантования. Самым известным подтверждением этого являются меры, принимаемые, чтобы избежать деления на нуль.

Если источник аналоговый, а не дискретный, то неточности, обусловленные дискретизацией, являются более обычными и неизбежными и часто с ними труднее бороться. Дискретная конечная система может быть только приближением к аналоговой системе, а приближение может даже не иметь смысла, если дискретизация колебаний *во всех частях системы* не будет адекватной. Значение слова «адекватная» может быть, конечно, предметом некоторого обсуждения с технической точки зрения, так как всегда существует противоречие между требованием высокой частоты дискретизации для повышения точности вычислений и низкой частоты дискретизации для ускорения вычислений. Для колебаний, ограниченных по полосе частот, адекватной является частота Найквиста, однако большинство колебаний нерезко ограничено по полосе частот.

Для иллюстрации сказанного допустим, что исходная система, изображенная на рис. 5.3, это полосовой ограничитель — обычная подсистема в системах связи. Ограничитель представляет собой схему, выходной сигнал которой имеет постоянную величину и такой же знак, что и входной сигнал. Для определенности предположим, что оба полосовых фильтра имеют полосу частот 200 *гц* с центром на частоте 2500 *гц* и что на входе будет синусоидальное колебание частотой 2500 *гц*. Тогда сигнал на выходе ограничителя будет иметь вид прямоугольного колебания частотой 2500 *гц*, а сигнал на выходе второго полосового фильтра — синусоидального колебания той же частоты. Ясно, что амплитуда выходного колебания благодаря ограничителю не зависит от амплитуды входного колебания. В полосе частот 200 *гц* со средней частотой 2500 *гц* амплитуда выходного колебания не зависит также от частоты входного сигнала.

Рис. 5.3. Полосовой ограничитель.

Рассмотрим теперь конечную систему, соответствующую полосовому фильтру. Допустим, что частота дискретизации для конечной системы составляет 10 *кгц* — величина, вполне достаточная для описания колебаний на выходе любого из полосовых фильтров. Однако колебание на выходе ограничителя не имеет ограниченного по полосе частот спектра, а имеет спектр с составляющими на частотах $2500(2n-1)$ *гц*, где n изменяется от единицы до бесконечности. Поэтому в конечной системе дискретизованное колебание на выходе ограничителя пострадает от наложения спектров *).

Выходной сигнал аналогового ограничителя имеет спектр, показанный на рис. 5.4, и так как наложение спектра в результате дискретизации заключается в сложении всех возможных спектров, полученных от смещения начального спектра на частоты, кратные 10 *кгц*, то видно, что ограничитель в конечной системе будет иметь спектр, где все линии на 7500, 12500, 17500 *гц* и т. д. будут преобразовываться в область основной линии на частоте 2500 *гц*, что в результате даст спектр, показанный на рис. 5.5. Для входного синусоидального колебания, частота которого точно равна одной четверти частоты дискретизации, эти преобразованные линии фактически совпадают и дают одну единственную спектральную ли-

*) О наложении спектров (*aliasing*) из-за недостаточной частоты дискретизации см. § 2.1. — *Прим. ред.*

нию на частоте 2500 *гц* с амплитудой в $\pi/4$ раз меньше той, которая имеется в аналоговом случае. Это означает искажение на 21,5%. Если частота входного синусоидального колебания не равна 2500 *гц*, то преобразованные спектральные линии не совпадают точно, так что вблизи частоты 2500 *гц* выход ограничителя в конечной системе будет иметь большое количество дополнительных

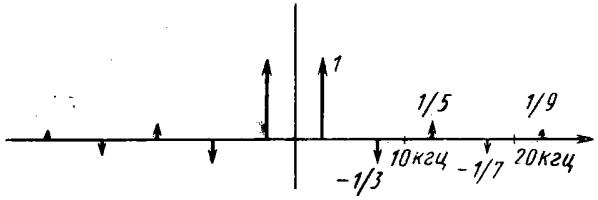


Рис. 5.4. Спектр на выходе полосового ограничителя при входном синусоидальном сигнале с частотой 2500 *гц*.

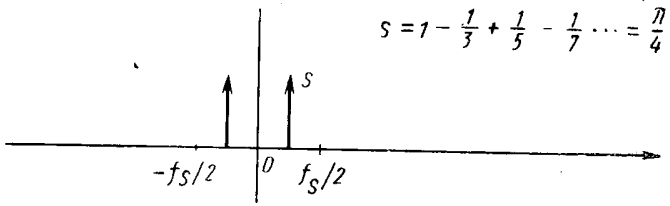


Рис. 5.5. Спектр выходного сигнала конечной системы, соответствующей исходной системе, показанной на рис. 5.3.

линий с амплитудами, составляющими 1/3, 1/5, 1/7 и т. д. от требуемой спектральной линии. Если только первая из этих дополнительных линий проходит через выходной полосовой фильтр, то искажение на его выходе составит 33%. Легко видеть, что искажение является очень чувствительной функцией входной частоты, частоты дискретизации и полосы пропускания фильтра.

Ситуация, очень сходная с этой, имеет место при моделировании систем, содержащих другие нелинейности, т. е. двухполупериодные или однополупериодные выпрямители, логарифмические усилители, четные квадраторы. В последнем случае можно показать, что самая высокая частотная составляющая на выходе квадратора вдвое больше максимальной частотной составляющей на входе, так что общая для них частота дискретизации, вдвое

превышающая частоту Найквиста для входа квадратора, позволит осуществить хорошее моделирование системы. Это особенно правильно, если после квадратора включается фильтр нижних частот, благодаря которому искажения, создающие только частоты, удаленные от нулевой частоты, не будут иметь значения.

В общем случае решением проблемы искажений является взятие отсчетов на более высокой частоте, однако иногда может помочь взятие отсчетов и на более низкой частоте. В приведенном выше описании полосового ограничителя снижение частоты дискретизации только до 9 *кгц* могло бы вызвать смещение частоты самых интенсивных искажающих компонент спектра по крайней мере на 1 *кгц* в сторону от 2500 *гц*, и при этом их можно было бы легко устранить с помощью выходного полосового фильтра. В спектр ограничителя входят частоты $2500(2n-1)$ *гц* для всех возможных целых чисел n, а желательными являются только две линии на частотах ± 2500 *гц*. При частоте дискретизации 9 *кгц* появляются линии на частотах $[2500(2n-1)+9000m]$ *гц* при всех n и m. Выясним вначале вопрос, какие линии совпадают с 2500 *гц*. Для этих линий m и n должны удовлетворять уравнению

$$2500 = 2500(2n-1) + 9000m, \qquad (5.1)$$

которое сводится к

$$n = 1 + \frac{9}{5}m.$$

Очевидным является решение $m=0$, $n=1$, соответствующее требуемой линии на частоте 2500 *гц*. Однако все m, кратные 5, также дают решения. Случай $m=5$ дает искажающую спектральную линию, вызванную исходной гармоникой на частоте 19×2500 *гц*; эта линия имеет спектральный коэффициент $-1/19$. $m=-5$ дает искажающую линию, вызванную исходной гармоникой на частоте -17×2500 *гц*; эта линия вносит искажение 1/17. $m=10$ дает искажающую линию, вызванную гармоникой на частоте 37×2500 *гц*; эта линия вносит искажение 1/37. $m=-10$ вызывает искажение $-1/35$ и т. д. По условиям симметрии требуемая линия на частоте -2500 *гц* имеет такие же искажающие компоненты. Так как все линии в выходном спектре ограничителя являются по отдельности кратными 1 *кгц* и смещаются при наложении спектров на частоты, кратные 9 *кгц*, то все искажающие чле-

ны, не являющиеся решениями для (5.1), должны отстоять более чем на 1 *кгц* от требуемых линий. Это благоприятное обстоятельство вызвано тем, что наибольший общий множитель частоты дискретизации (9 *кгц*) и расстояние между линиями (1 *кгц*) взяты достаточно большими. В общем случае может понадобиться рассмотреть значительно большее число искажающих спектральных линий.

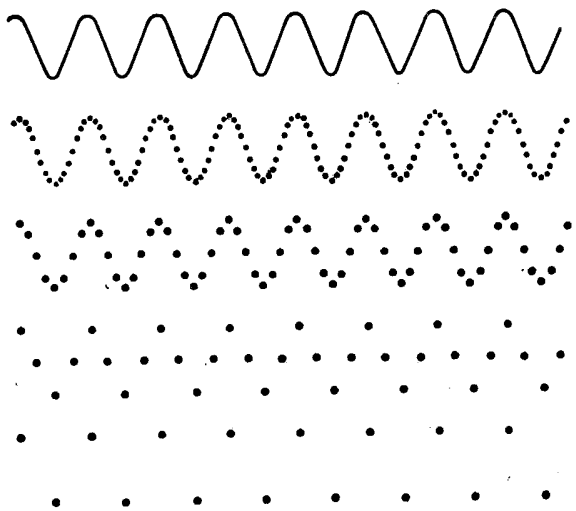


Рис. 5.6. Синусоидальное колебание и его отсчеты, взятые с частотой Найквиста, а также с частотой, превышающей ее в два, четыре и восемь раз.

Один из важных аспектов сопоставления исходной и конечной систем заключается в наблюдении колебаний, генерируемых конечной системой. Для этой цели частота дискретизации, лишь вдвое превышающая максимальную частоту колебания, не подходит, так как, несмотря на то, что математически возможно восстановить сигнал по отсчетам Найквиста, это очень трудно сделать визуально. Этот эффект иллюстрируется рис. 5.6, где показано синусоидальное колебание и его отсчеты, взятые с частотой, примерно в один, два, четыре и восемь раз превышающей частоту Найквиста. На рис. 5.7 показан тот же эффект для несколько более сложного колебания.

При низкой частоте отсчетов интерпретацию формы сигналов можно существенно облегчить, если растянуть временну́ю шкалу или сжать амплитудную шкалу так, чтобы точки, которые должны быть «соединены», располагались ближе, чем точки, которые не должны соединяться.

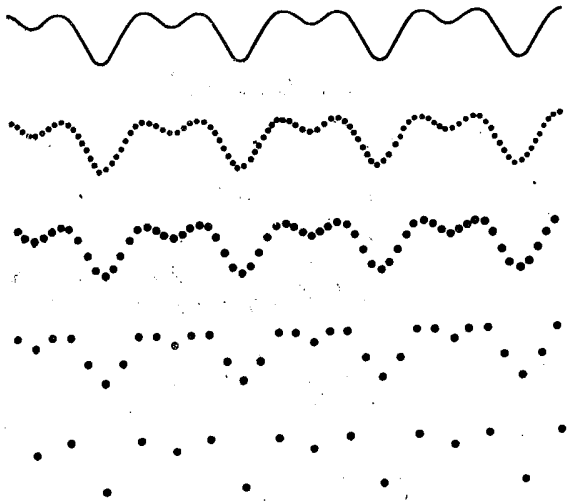


Рис. 5.7. Сумма двух синусоидальных колебаний и отсчеты, взятые с частотой Найквиста, а также с частотой, превышающей ее в два, четыре и восемь раз.

С другой стороны, могут быть эффективно воспроизведены некоторые колебания, не ограниченные по полосе частот, например, колебания, выпрямленные однополупериодным детектором. В то же время для некоторых видов колебаний, например, таких, как белый шум, распыление точек из-за дискретизации не сильно искажает картину, так как исходное колебание во всех случаях не мыслится иначе чем неопределенный сигнал.

5.4. ЭЛЕМЕНТЫ КОНЕЧНЫХ СИСТЕМ

Естественно и разумно составлять программу моделирования из ряда гибких и эффективных подпрограмм, каждая из которых воспроизводит элемент, подобный встречающимся во многих конечных системах и (или)

встречающийся много раз в одной и той же конечной системе. Например, линейные фильтры моделируются как каскады простых передаточных функций:

$$\frac{1}{1-K_1z^{-1}}, \quad \frac{1-K_1z^{-1}}{1-K_2z^{-1}}, \quad \frac{1-K_1z^{-1}}{1-K_2z^{-1}+K_3z^{-2}},$$

где K_1, K_2, K_3 — параметры. Такие простые передаточные функции реализуются в хорошо составленных универсальных подпрограммах. Естественно попытаться каталогизировать и классифицировать пары элемент — подпрограмма. В основу классификации можно положить такие признаки, как наличие у элемента памяти (при ее отсутствии выходной сигнал зависит только от входных сигналов), наличие и число входных и выходных сигналов, а также наличие числовых параметров.

Цифровой фильтр является основным примером очень общего и важного линейного элемента с памятью и параметрами, с одним входным и одним выходным сигналами. В отличие от него, имеются линейные элементы без памяти, например сумматоры и аттенюаторы, усилители и преобразователи. Сумматор представляет собой линейное устройство с несколькими входными сигналами. Это элементарные устройства, и нет необходимости описывать способы их моделирования на цифровой вычислительной машине. Тем не менее удобно иметь подпрограммы для такого моделирования с тем, чтобы использовать сами устройства в качестве компонентов блок-схемы, а подпрограммы — в качестве компонентов машинного моделирования.

Примерами простых нелинейных элементов без памяти являются дву- и однополупериодные выпрямители, ограничители, ключевые схемы, переключатели, порого-

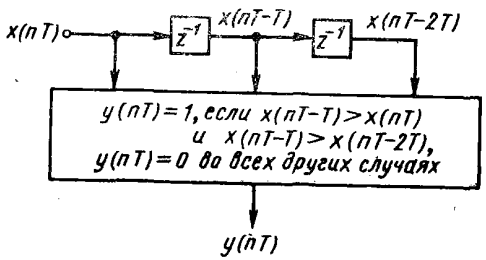


Рис. 5.8. Представление пикового детектирования в конечной системе.

вый элемент, умножители и делители, логарифмические усилители и устройства для извлечения квадратного корня. Для многих из этих устройств требуется только одна или две машинные команды на каждую отсчетную точку, а другие могут быть эффективно запрограммированы, если использовать сведения из литературы по аппроксимации функций [3].

Простым элементом, требующим памяти, является пиковый детектор. Если пиковое значение дискретизируемого колебания определяется как отсчет, превышающий предыдущий и последующий отсчеты, то ясно, что необходимы и память, и алгоритм получения решения. На рис. 5.8 показан удобный способ представления пикового детектирования.

Генераторы

Часто бывает необходимо, чтобы в систему помимо линейных и нелинейных устройств входили генераторы различных типов, например, импульсные генераторы, синусные и косинусные генераторы, генераторы случайного шума, генераторы прямоугольных импульсов и т. д. *). Действительно, лабораторные испытания новых электрических устройств традиционно проводятся путем подключения генератора сигналов на вход устройства и индикатора или измерительного прибора к различным точкам, представляющим интерес. Подобным же образом для испытания моделированного «устройства» может потребоваться, чтобы выход моделированного «генератора» был «подсоединен» ко входу «устройства» и чтобы управляемые вычислительной машиной индикатор или печатающее устройство контролировали точки, представляющие интерес в моделированной системе.

Генераторы линейного, пилообразного, треугольного и прямоугольного колебаний

Генератор линейно нарастающего колебания представляет собой элемент, выходной сигнал которого имеет следующий вид:

$$y(nT)=An+B, \tag{5.2}$$

*) Заметим, что записанный в память машины дискретизированный входной сигнал, подаваемый для моделирования последующего состояния, логически эквивалентен наличию генератора, который можно называть ВХОД.

где A и B — постоянные. Его можно промоделировать, взяв $y(0)=B$ и выполнив итерацию

$$y(nT+T)=A+y(nT) \qquad (5.3)$$

по одному разу в каждом отсчетном интервале.

Генератор пилообразных сигналов представляет собой элемент, выходной сигнал которого имеет форму, показанную на рис. 5.9. Если итерация (5.3) выполняется

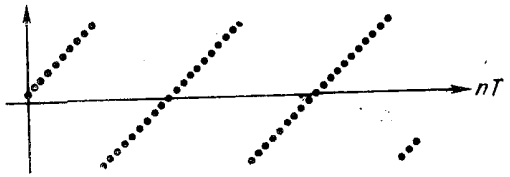


Рис. 5.9. Выходной сигнал генератора дискретных пилообразных колебаний.

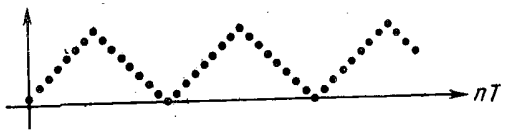


Рис. 5.10. Выходной сигнал генератора дискретных треугольных колебаний.

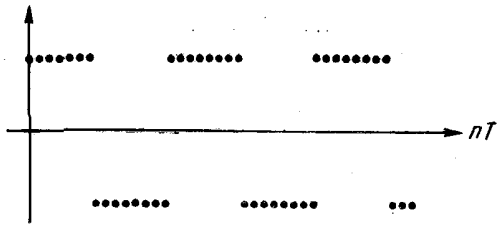


Рис. 5.11. Выходной сигнал генератора дискретных прямоугольных колебаний.

довольно продолжительное время при достаточно большом A, то произойдет переполнение, вследствие чего $y(nT)$ будет претерпевать большие отрицательные скачки, как показано на рис. 5.9. Эти скачки появляются один раз через каждые M/A отсчетов, где M — разность между наибольшим положительным и наибольшим отрицательным числами, которые могут запоминаться в регистре. Таким образом, (5.3) может обеспечить моделирование генератора пилообразных сигналов с частотой пилообразных импульсов A/M. Двухполупериодное выпрямление выходного сигнала генератора пилообразных импульсов дает треугольный сигнал, показанный на рис. 5.10, а предельное ограничение (клиппирование) выходного сигнала генератора пилообразных импульсов дает прямоугольное колебание, приведенное на рис. 5.11.

Генератор случайных чисел

Генерирование случайных чисел как способ представления случайных шумов осуществляется обычно с помощью конгруентной схемы [5]

$$x_n=(Ax_{n-1}) \bmod P, \qquad (5.4)$$

где P — большое и простое число. При правильном выборе A эта итерация может дать все целые числа 1, 2, ..., $P-1$ в случайном на вид порядке, прежде чем они начнут повторяться. Недостатком (5.4) является необходимость умножения и, возможно, деления. Другая полезная схема, которая использует только сложение, имеет вид

$$x_n=(x_{n-1}+x_{n-k}) \bmod 1 \qquad (5.5)$$

или ее эквивалент [2], где k — умеренно большое целое число, например 50, а начальные k чисел равномерно распределяются между 0 и $+1$. Очень полезный вариант (5.5), показанный в виде блок-схемы на рис. 5.12, дает случайные числа, распределенные равномерно между $-1/2$ и $+1/2$. В нем операция сложения по модулю осуществляется весьма простым способом; для этого доста-

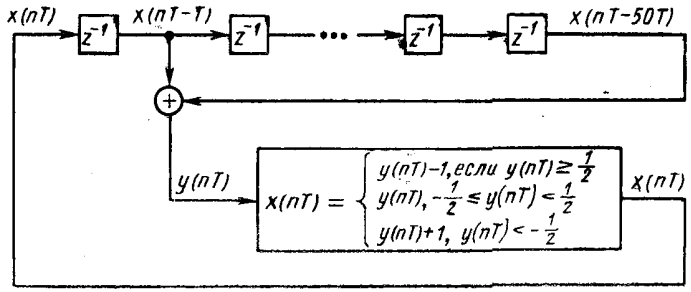


Рис. 5.12. Дискретный генератор случайных чисел.

точно *не обращать внимание на переполнение* при сложении с фиксированной запятой.

По уравнениям (5.4) и (5.5) генерируются равномерно распределенные шумовые отсчеты, в то время как при многих экспериментах по моделированию требуются гауссовы шумы. Если x_n равномерно распределено от 0 до 1, то процесс получения гауссовых шумов осуществляется в два этапа:

1. Вычисляют случайную переменную y_n с релеевским распределением (плотность)

$$P(y)=\frac{y}{\sigma^2}\,e^{-(y^2/2\sigma^2)}, \tag{5.6}$$

используя

$$y_n=\sqrt{2\sigma^2\ln\frac{1}{x_n}}. \tag{5.7}$$

2. Получают пару гауссовых случайных чисел w_n и w_{n+1} с плотностью

$$P(w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\,e^{-(w^2/2\sigma^2)}, \tag{5.8}$$

используя

$$\begin{aligned} w_n&=y_n\cos 2\pi x_{n+1},\\ w_{n+1}&=y_n\sin 2\pi x_{n+1}. \end{aligned} \tag{5.9}$$

Два «независимых» случайных числа генерируются сразу. Если необходим релеевский шум, то второй шаг (5.9) опускается.

Синусно-косинусный генератор

Очень важным блоком многих программ моделирования является программированный синусно-косинусный генератор, выходной сигнал которого может служить основным испытательным сигналом почти для любой моделируемой системы. Так как этот генератор имеет большое значение и его цифровая реализация представляет теоретический интерес, изучим этот генератор более подробно.

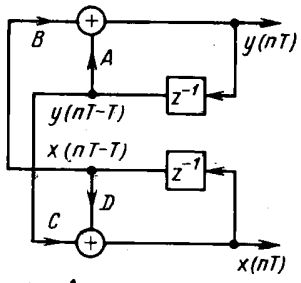


Рис. 5.13. Дискретный синусно-косинусный генератор.

Вначале рассмотрим систему разностных уравнений:

$$\begin{aligned} y(nT+T)&=Ay(nT)+Bx(nT),\\ x(nT+T)&=Cy(nT)+Dx(nT). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Соответствующая цепь показана на рис. 5.13.

Если заданы начальные условия $x(0)$ и $y(0)$, то можно найти z-преобразования $X(z)$ от $x(nT)$ и $Y(z)$ от $y(nT)$. В результате получим

$$\begin{aligned} Y(z)&=\frac{z^2y(0)-Dzy(0)+Bzx(0)}{z^2-z(A+D)+AD-BC},\\ X(z)&=\frac{z^2x(0)-Azx(0)+Czy(0)}{z^2-z(A+D)+AD-BC}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Если два условия, $AD-BC=1$ и $A+D<2$, реализуются одновременно, то из (5.11) видно, что полюсы z-преобразований будут находиться на единичной окружности. Это означает, что выходные сигналы $x(nT)$ и $y(nT)$ могут представлять собой незатухающие колебания. Действительно, можно показать, что дополнительные специфические условия $y(0)=0$, $x(0)=1$, $A=D=\cos bT$, $B=-C=\sin bT$ дают следующие решения:

$$y(nT)=\sin nbT,\qquad x(nT)=\cos nbT. \tag{5.12}$$

Шум синусно-косинусного генератора

Из уравнений (5.12) видно, что цепь рис. 5.13 может быть превращена в синусно-косинусный генератор путем соответствующего выбора параметров. В связи с этим следует вспомнить, что из полученных в гл. 4 результатов, касающихся шумов квантования, особенно (4.20) и (4.17), следует, что среднеквадратическое значение выходного шума стремится к бесконечности, когда расстояние полюсов от единичной окружности достигает нуля. Отсюда следует, что на выходе рассматриваемого синусно-косинусного генератора при некоторых обстоятельствах появится большой шум и тогда генератор станет непригодным. Однако из выражения (4.9) видно, что среднеквадратический шум возрастает *постепенно*. Если скорость его возрастания достаточно мала и до появле-

ния заметного шума проходит много выходных циклов, то становится возможным время от времени возвращать переменные в исходное состояние с тем, чтобы шум эффективно подавлялся.

Формулу шумов можно получить, вводя независимые отсчеты шумов округления $e_1(nT)$ и $e_2(nT)$ в два сумматора в цепи рис. 5.13. Тогда z-преобразование от $x(nT)$ (принимая $y(0)=0$, $x(0)=1$, $A=D=\cos bT$, $B=-C=\sin bT$), будет иметь вид

$$X(z)=\frac{z^2-z\cos bT+zE_2(z)-\cos bTE_2(z)-\sin bTE_1(z)}{z^2-2z\cos bT+1}, \quad (5.13)$$

где $E_1(z)$ и $E_2(z)$ есть z-преобразования от $e_1(nT)$ и $e_2(nT)$.

Отсюда видно, что первые два члена в числителе соответствуют сигналу, а остальные члены — шуму. Введем определение:

$$h_2(nT)=Z^{-1}\left[\frac{z-\cos bT}{z^2-2z\cos bT+1}\right],$$
$$h_1(nT)=Z^{-1}\left[\frac{\sin bT}{z^2-2z\cos bT+1}\right], \quad (5.14)$$

где Z^{-1} — обратное z-преобразование. Теперь можно использовать основное уравнение (4.9), чтобы получить формулу для всего выходного шума в предположении, что $e_1(nT)$ и $e_2(nT)$ независимы:

$$\sigma^2=\frac{E_0^2}{12}\left[\sum_{m=0}^{n}h_1^2(mT)+\sum_{m=0}^{n}h_2^2(mT)\right]. \quad (5.15)$$

Анализ выражения (5.14) показывает, что $h_1(nT)$ фактически представляет собой $\sin nbT$, а $h_2(nT)$ есть $\cos nbT$. Подстановка в (5.15) непосредственно приводит к результату

$$\sigma^2=\frac{E_0^2}{12}n. \quad (5.16)$$

Из уравнения (5.16) следует, что «мощность» шума увеличивается линейно с числом итераций разностных уравнений. Например, после 10^6 итераций стандартное отклонение шума будет соответствовать примерно 9 разрядам. Если одна итерация выполняется за 100 *мксек*,

то при применении 18-разрядной машины может пройти несколько минут, прежде чем генерируемые синусоидальные и косинусоидальные сигналы станут шумовыми.

Возврат синусно-косинусного генератора в исходное состояние с целью уменьшения шумов

Вернемся к (5.11). Если принять $A=D=\cos bT$, $B=-C=\sin bT$, а $x(0)$ и $y(0)$ считать произвольными, то получим

$$y(nT)=x(0)\sin nbT+y(0)\cos nbT,$$
$$x(nT)=y(0)\sin nbT+x(0)\cos nbT. \quad (5.17)$$

Уравнения (5.17) показывают, что $y(nT)$ и $x(nT)$ будут синусоидальными колебаниями, всегда точно сдвинутыми по фазе на 90°. Кроме того, если пренебречь эффектами квантования, то для любого момента времени nT справедливо равенство

$$x^2(nT)+y^2(nT)=x^2(0)+y^2(0). \quad (5.18)$$

Однако из-за шумов равенство (5.18) с увеличением n постепенно теряет силу.

Для возвращения системы в исходное состояние можно после каждых k итераций переменные $x(nT)$ и $y(nT)$ изменять так, чтобы оставалось справедливым равенство (5.18). Для этого необходимо умножить $x(nT)$ и $y(nT)$ на коэффициент

$$f(nT)=\sqrt{\frac{x^2(0)+y^2(0)}{x^2(nT)+y^2(nT)}}. \quad (5.19)$$

Таким образом, после каждых k итераций (5.10) выполняется один раз нелинейная итерация:

$$y(nT+T)=f(nT)[Ay(nT)+Bx(nT)],$$
$$x(nT+T)=f(nT)[Cy(nT)+Dx(nC)]. \quad (5.20)$$

Выполнение (5.20) означает такую коррекцию значений $x(nT+T)$ и $y(nT+T)$, при которой удовлетворяется равенство (5.18) *).

*) Кайзер в частной беседе предположил, что предельные циклы, которые могут иметь место при решении (5.10) с округлением, могут также сохранять требуемую постоянную амплитуду синусоидального сигнала.

Таким образом, если $x(nT)$ и $y(nT)$ сдвинуты на одинаковую относительную величину в сторону меньшего значения, то они увеличатся за один цикл итерации до значения, которое должны были бы иметь при отсутствии шума. Если же $y(nT)$ сдвинуто вверх, а $x(nT)$ вниз и при этом сумма квадратов удовлетворяет (5.18), то коррекция (5.20) не будет оказывать никакого влияния. Следовательно, сдвиги по фазе не компенсируются выполнением (5.20).

Из выражения (5.16), взяв $n=k$, можно определить, какая величина шума предполагается после k итераций, и использовать это для решения вопроса о том, как часто уравнения (5.10) следует заменять уравнениями (5.20).

Задержка

В § 5.5 будет показано, что моделирование систем, содержащих элементы задержки, требует специального рассмотрения.

Элемент задержки сам по себе легко моделировать, если задержка является кратной интервалу дискретизации. При задержке на k отсчетов следует пропустить k регистров, пронумерованных числами $0, 1, \ldots, k-1$. Чтобы выполнить условие

$$y_n = x_{n-k}, \tag{5.21}$$

следует переместить содержимое регистра $n \bmod k$ в выходной регистр Y и поместить x_n в регистр $n \bmod k$. Эта процедура требует времени, которое не зависит от величины k. Для очень малых k более быстрой может быть иная процедура, чем в том случае, когда задержка является частью цифрового фильтра.

5.5. ПОРЯДОК ВЫПОЛНЕНИЯ ПОДПРОГРАММ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПОСЛЕДУЮЩЕГО СОСТОЯНИЯ

При типичном моделировании последующего состояния, рассматривавшемся в § 5.2, команды, моделирующие какой-либо элемент блок-схемы, выполняются один раз при каждом прохождении по основному контуру программы. С помощью этих команд обследуются все текущие входные сигналы и вычисляется текущий выходной сигнал элемента. Очевидно, что для обеспечения необходимой последовательности операций все текущие входные сигналы для данного элемента должны быть вычислены прежде, чем может быть выполнена программа, моделирующая этот элемент; и ни одна программа, использующая текущий выходной сигнал, не может быть выполнена до тех пор, пока не вычислен этот выходной сигнал. Это означает, что в пределах основного контура программы не все возможные порядки выполнения подпрограмм, соответствующих элементам блок-схемы, являются закономерными. Рассмотрим, например, рис. 5.14, на котором не раскрыт детальный характер элементов в конечной системе.

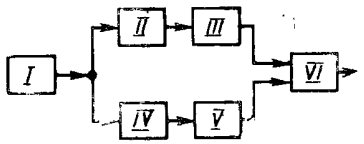


Рис. 5.14. Система, для которой недопустимы произвольные порядки выполнения подпрограмм.

Ясно, что вначале следует вычислить выходной сигнал элемента I при $t=0$. Затем можно вычислить выходной сигнал элемента II или элемента IV, но не элементов III, V или VI. Ниже перечислены возможные порядки выполнения подпрограмм, соответствующих элементам рис. 5.14, при первом прохождении по основному контуру программы:

I, II, III, IV, V, VI;	I, IV, V, II, III, VI;
I, II, IV, III, V, VI;	I, IV, II, V, III, VI;
I, II, IV, V, III, VI;	I, IV, II, III, V, VI.

Любой из указанных выше порядков выполнения подпрограмм удовлетворяет требованию, чтобы все входные сигналы блока при $t=0$ были вычислены до того, как будет выполнена его подпрограмма при прохождении по основному контуру программы, соответствующем моменту $t=0$. Такая же ситуация будет иметь место в этом случае и для всех последующих прохождений по основному контуру программы, соответствующих $t=nT$.

Поучительно также рассмотреть эффект нарушения этого требования при выполнении подпрограмм, скажем, в порядке I, III, II, IV, V, VI. Вначале по основному контуру программы, при $t=0$, вычисляется выходной сигнал блока I, затем выполняется подпрограмма III. Однако подпрограмма III надеется найти текущий выходной сигнал блока II в некотором регистре, скажем R_{II}. Вместо этого она находит некоторое начальное условие, и, таким образом, выходной сигнал блока III вычисляется неправильно. Затем выполняется подпрограмма II, ее верный выходной сигнал подается в регистр R_{II}; подпрограммы

IV и V выполняются правильно. Далее выполняется подпрограмма VI, но поскольку один из ее входных сигналов — сигнал с блока III, был вычислен неверно, то выходной сигнал блока VI оказывается также неверным.

При втором прохождении основного контура, при $t=T$, выполняется подпрограмма I и затем подпрограмма III. На этот раз предполагаемый выходной сигнал

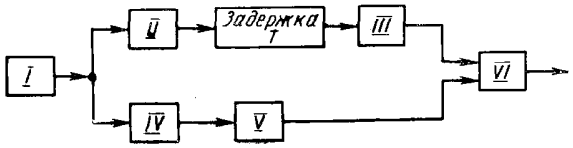


Рис. 5.15. Система, которая фактически реализуется при неправильном порядке выполнения подпрограмм в системе рис. 5.14.

в регистре R_{II} является точно вычисленным значением сигнала блока II для предыдущего момента дискретизации. В данном случае при всех последующих прохождениях программы, скажем при n-м проходе, выходной сигнал элемента III будет базироваться на входном сигнале от элемента II, вычисленном при $(n-1)$-м проходе программы, так что выходной сигнал элемента III будет точным, за исключением задержки T. Подобные рассуждения показывают, что выходные сигналы элементов I, II, IV и V будут правильными, а элемента VI — неправильным вследствие того, что один из его входных сигналов будет запаздывать относительно другого. Сказанное можно проиллюстрировать рис. 5.15, на котором изображена фактически реализуемая блок-схема, эквивалентная только что описанной программе. Заметим, что задержка вносится между элементами II и III. Неправильная последовательность выполнения подпрограмм в конечной программе всегда ведет к внесению в конечную систему неявных элементов задержки.

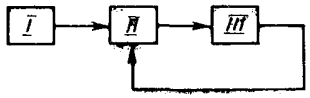


Рис. 5.16. Конечная система с цепью обратной связи; в общем случае к ней неприменим метод моделирования последующего состояния.

Система рис. 5.16, имеющая простую цепь обратной связи, по-видимому, не может быть моделирована предлагаемым методом, так как подпрограмма II не может быть выполнена правильно до тех пор, пока неизвестен

выходной сигнал элемента III, а подпрограмма III не может быть правильно выполнена до тех пор, пока не известен выходной сигнал элемента II. При этом вполне может оказаться, что конечная система рис. 5.16 будет неопределенной. Если, например, элемент II представляет собой сумматор с выходным сигналом $y(nT)$, а элемент III — усилитель с коэффициентом усиления G и выходным сигналом $x(nT)$, то, обозначив выходной сигнал элемента I при $t=nT$ через $w(nT)$, найдем уравнения, определяющие $x(nT)$ и $y(nT)$:

$$x(nT)-y(nT)=w(nT), \quad x(nT)-Gy(nT)=0.$$

Если $G=1$, то это система несовместимых уравнений (ее решение невозможно). При других значениях G имеются единственные решения для $x(nT)$ и $y(nT)$, но эти решения не могут быть получены с помощью отдельных подпрограмм суммирования и усиления. Единственно возможный путь правильного вычисления выходного сигнала элемента III с помощью независимой подпрограммы, до того как известен выходной сигнал элемента II, был бы возможен лишь в том случае, если бы текущий выходной сигнал элемента III не зависел от его текущего входного сигнала. Элемент задержки отличается этим свойством; другие элементы, используемые при моделировании, этим свойством не обладают (за исключением генераторов), и в этом узком смысле можно сказать, что элементом задержки является лишь тот элемент, текущий выходной сигнал которого не зависит от его текущего входного сигнала. Таким образом, если элемент III на рис. 5.16 представляет собой задержку NT, то конечная программа может быть записана с помощью следующего порядка следования подпрограммы: I, II, III_A, где III_A — подпрограмма, моделирующая задержку $(N-1)T$, которая точно компенсирует задержку T, внесенную при выполнении подпрограммы II до выполнения подпрограммы III_A.

Сформулируем теперь правила для компоновки программ в некоторую конечную программу.

1. Исследовать блок-схему для элемента, подпрограмма которого еще не включена в конечную программу. Если этим элементом является генератор (или ВХОД) или если все его входные сигналы поступают от элементов, подпрограммы которых уже вошли в конечную программу, то подпрограмма для этого элемента в дальн

шем может быть включена в программу. Если имеются другие элементы, удовлетворяющие этому требованию, то следует повторить указание I в отношении этих элементов. В противном случае необходимо выполнить указание II.

II. Если все элементы охвачены конечной программой, то она будет полной и будет являться точным представлением конечной системы. Если имеются элементы, не входящие в конечную программу, и ни один из них не является элементом задержки, то моделирование последующего состояния не может точно представить конечную систему. Если по крайней мере один из оставшихся элементов является элементом задержки, то следует воспользоваться указанием III.

III. Взять элемент задержки, подпрограмма которого не охватывается конечной программой. Если предполагается, что время задержки равно NT, ввести в дальнейшем в конечную программу подпрограмму, моделирующую задержку $(N-1)T$, и считать, что тем самым элемент задержки охвачен программой (следует тщательно рассмотреть особый случай нулевой задержки). Если в системе обнаруживаются еще не охваченные программой элементы без задержки, то воспользоваться указанием I.

Неудача с применением метода последующего состояния, отмеченная в п. II, означает, что в конечной системе имеется замкнутая петля (обратной связи), которая не имеет задержек; в этом случае следует отступить от приведенных выше указаний. Лучше всего модифицировать конечную систему, введя задержку T, и продолжать процесс компоновки программы. Пользуясь инженерной интуицией, следует определить степень различия между исходной и конечной системами, вызванного этой задержкой. Конечно, физические системы должны иметь некоторую задержку, хотя, вероятно, она должна быть намного меньше T.

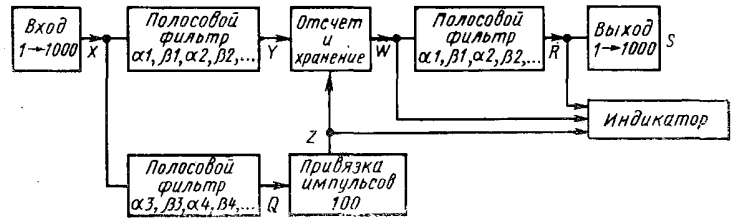
5.6. КОМПИЛИРУЮЩАЯ ПРОГРАММА *PATSI*

Поскольку было решено, что конечная система, имеющая такую же блок-схему, что и исходная, является точным представлением последней, программирование системы моделирования состоит почти полностью в использовании подпрограмм, описанных в предыдущих параграфах, и в объединении их вместе способом, описанным в § 5.5. Бо́льшая часть этой работы трудоемкая, однако в случае четкого формального описания моделируемой системы можно выполнить про-

217—2

граммирование с помощью компилирующей программы (программы, которая может составлять другие программы).

Компилирующая программа может выполнять работу по выбору подпрограмм, которые должны использоваться, и размещению их в памяти, распределению различных запоминающих регистров для выходных сигналов нескольких схем в системе, вычислению коэффициентов различных разностных уравнений, установке начальных условий и т. д. Несколько таких компилирующих программ были составлены и используются до настоящего времени [4, 6]. Ниже описывается одна из них, называемая *PATSI* (сокращенно от Programming Aid To System Investigation — средства программирования для исследования системы). Она достаточно проста, поэтому ее можно составить в течение короткого времени. Если имеется компонующая программа, которая может принимать макроопределения с параметрами, то *PATSI* может быть составлена за несколько человекодней.



X→Вход | 1→1000
Y→Полосовой фильтр | X, α1, β1, α2, β2, ...
Q→Полосовой фильтр | X, α3, β3, α4, β4, ...
Z→Привязка импульсов | Q, 100
W→Отсчет и хранение | Y, Z
R→Полосовой фильтр | W, α1, β1, α2, β2, ...
S→Выход | R, 1→1000
$SC1$→Индикатор | Z, 377720
$SC2$→Индикатор | W, 377721
$SC3$→Индикатор | R, 377732
Сделано

Рис. 5.17. Исходная система и ее полное описание на языке *PATSI*.

Описание компилирующей программы означает, во-первых, объяснение языка, которым описывается задача и, во-вторых, описание выполнения программы, которая преобразует описание задачи в программу. Начнем с описания языка *PATSI*, используя в качестве примера систему рис. 5.17 (на рисунке показана система и ее полная программа *PATSI*). Система не предназначается для какого-либо практического использования и служит только для иллюстрации. Текст, помещенный под блок-схемой, представляет собой полную исходную программу (исходная программа — это описание пользователем его задачи).

На блок-схеме видим буквы X, Y, W, Q и т. д. Эти буквы имеют несколько значений. Например, W относится к схеме для получения отсчетов и хранения их в паузах, к ее выходному колебанию, к ее выходной точке и к строке исходной программы, описывающей три предыдущих понятия. Как видно, и четырехкратное применение одного и того же обозначения не вызывает никакой неясности. Рассмотрим более подробно строку W. Обозначение W отделено от следующей записи стрелкой. За стрелкой следует название, присвоен-

ное схеме в виде ряда букв или терминов. ОТСЧЕТ и ХРАНЕНИЕ — это функциональное описание схемы, один из примерно 50 функционально различных типов, модели которых заложены в *PATSI*. Вертикальная черточка отделяет функциональное описание от следующих за ним символов, значение которых зависит от типа элемента. Для ОТСЧЕТА и ХРАНЕНИЯ два следующих символа, разделенные запятой, означают входные сигналы. Первый из них — обозначение входного сигнала *Y*, отсчеты которого должны быть взяты, а второй — обозначение импульсного сигнала *Z*, по которому начинается дискретизация. Порядок записи символов *Y*, *Z* устанавливает соответствие между ними. Чтобы использовать блок ОТСЧЕТА и ХРАНЕНИЯ в системе, нужно знать смысл и правила записи этих условных символов *). Для этой цели издан словарь символов *PATSI*, которого придерживаются до настоящего времени.

Рассмотрим теперь строку *Z*, описывающую блок привязки импульсов — блок, выходной сигнал которого не равен нулю только в момент времени, когда входной сигнал изменяет знак. За вертикальной черточкой следуют: *Q* — входной сигнал и 100 — параметр блока, означающий высоту образуемого импульса. Смысл и порядок записи этих двух величин также можно найти в словаре.

Строка *X* описывает блок ВХОД. Функционально ВХОД представляет собой генератор — элемент с одним выходом и без входов. Последовательные отсчеты колебания в точке *X* берутся из последовательных регистров в устройстве памяти, начиная (в рассматриваемом случае) с регистра 1 и кончая регистром 1 000. ВХОД дает возможность выполнять программу моделирования с реальными данными. Различные режимы работы позволяют блоку ВХОД получать данные из внешней памяти, а не из памяти на магнитных сердечниках, что практически означает возможность ввода бесконечно большого объема данных.

Подобным же образом блок ВЫХОД описывает элемент *S*, не имеющий выходов, но имеющий один вход, в данном случае *R*. Последовательные отсчеты колебаний *R* запоминаются в последовательно занумерованных регистрах в устройстве памяти.

Три строки *SC1*, *SC2* и *SC3* описывают очень полезный элемент — ИНДИКАТОР, который подобно блоку ВЫХОД имеет вход и не имеет выходов. Каждый раз при выполнении основного контура программы моделирования программа ИНДИКАТОР показывает отсчеты своих входных колебаний на цифровом осциллографе, выбирая их положение по горизонтали так, чтобы обеспечивалась «развертка». Второй вход представляет собой адрес регистра, используемого для управления усилением, вертикальным положением и интенсивностью. Используемые здесь адреса такие же, как и в регистрах, набираемых тумблерами на вычислительной машине ТХ-2, которые можно устанавливать вручную и изменять в процессе выполнения программы.

Отметим, что изображение на ИНДИКАТОРЕ появляется в процессе выполнения программы. Таким образом, поскольку конечная программа является медленно текущим вариантом конечной системы, то эффект будет точно такой же, как если бы в лаборатории имелась конечная система, которая исследуется с помощью осциллографа. Можно одновременно наблюдать столько колебаний, сколько потре-

*) Точно так же, как следует знать условные обозначения в реальной схеме блока отсчета и хранения.

буется, так как ИНДИКАТОР без труда можно подключать к нескольким точкам в системе. Используется также *XY* ИНДИКАТОР, с помощью которого возможна индикация фигур Лиссажу таким же путем (и даже в то же время), как происходит индикация колебаний.

ИНДИКАТОР является также очень мощным средством отладки не только программы моделирования, но и системы в целом в процессе ее изучения. Таким же путем в программу моделирования могут вводиться и другие способы индикации с различными графическими особенностями.

Строка СДЕЛАНО просто означает, что исходная программа (описание исходной системы) завершена.

Теперь можем описать действие компилирующей программы при образовании конечной программы. При использовании только макрокомпонующей программы и при условии, что установление надлежащего порядка следования подпрограмм выполняется путем изменения порядка строк исходной программы, каждая строка исходной программы распознается как результат предварительно установленного макроутверждения с параметрами.

Компилирующая программа вначале переписывает в память программу пуска. Это крайне простая подпрограмма, функция которой состоит в переходе к первой подпрограмме после установки индексного регистра, например *L*, в положение, соответствующее первой выходной точке. Эта точка всегда имеет фиксированный адрес, называемый началом вызывающей последовательности. Адрес первой подпрограммы, которую нужно вводить, всегда находится во втором регистре в вызывающей последовательности.

Затем компилирующая программа просматривает первую строку исходной программы. Эта строка

$$X \longrightarrow \text{ВХОД} \mid 1 \longrightarrow 1\,000.$$

Обозначение X связано с адресом первого регистра вызывающей последовательности. Этот первый регистр представляет выходную точку блока. В следующий регистр закладывается адрес начала входной подпрограммы. Отметим, что это удовлетворяет условиям, требуемым пусковой программой. В следующие два регистра вызывающей последовательности закладываются адреса первого и последнего входных отсчетов 1 и 1 000. Во время выполнения программы моделирования, подпрограмма позволяет найти эти параметры по адресам 2_L и 3_L *). В следующий регистр снова закладывается адрес первого входа. Это регистр состояния, который должен быть скорректирован добавлением 1 после каждого выполнения входной подпрограммы с тем, чтобы он указывал на регистр, содержащий следующий отсчет. Таким образом, часть вызывающей последовательности, формируемая в соответствии со строкой *X* исходной программы, содержит выходную точку, адрес соответствующей подпрограммы, необходимые параметры для использования в подпрограмме и необходимый регистр состояния блока; все эти данные могут быть определены с помощью соответствующей подпрограммы при использовании индексного регистра *L*.

Входная подпрограмма после выполнения своей основной задачи увеличивает содержимое индексного регистра *L* на 5 — число регистров в вызывающей последовательности, относящееся к *X*. Затем, как

*) Обозначение a_L следует читать: «*a* с индексом, определяемым содержимым *L*».

мы увидим, эта подпрограмма просматривает адрес 1_L, чтобы найти адрес начала подпрограммы для моделирования блока Y.

По окончании манипуляций по первой строке исходной программы компилирующая программа просматривает следующую строку

$$Y \longrightarrow \text{ПОЛОСОВОЙ ФИЛЬТР}|X,\ \alpha 1,\ \beta 1,\ \alpha 2,\ \beta 2,\ \ldots$$

и связывает обозначение Y со следующим адресом в вызывающей последовательности. В следующий регистр закладывается адрес подпрограммы моделирования полосового фильтра. Отметим, что это удовлетворяет условиям входной подпрограммы, которая просматривает регистр 1_L, чтобы найти адрес подпрограммы, к которой следует перейти.

Адрес X закладывается в следующий регистр в вызывающей последовательности. Полосовой фильтр может найти адрес своего входного сигнала, просматривая регистр 2_L. В несколько следующих регистров заложены параметры фильтра $\alpha 1$, $\beta 1$, $\alpha 2$, $\beta 2$, ... Многоточие здесь не является частью программы и представляет собой стенографический знак, указывающий, что обычно используется намного больше параметров. Регистры, следующие за указанными выше, являются регистрами состояния, содержащими предыдущие значения входного и выходного сигналов, необходимые для разностного уравнения, моделируемого фильтром. Вычисление коэффициентов разностного уравнения будет рассмотрено позже. Во время моделирования подпрограмма полосового фильтра может найти все параметры и регистры состояния, необходимые при использовании индексного регистра L; по окончании вычисления она увеличивает содержимое индексного регистра L на длину своей части вызывающей последовательности и находит адрес следующей подпрограммы для перевода ее в 1_L.

Все элементы с выходами имеют выходную точку в первом регистре, соответствующем этому элементу в вызывающей последовательности, и все элементы, независимо от того, имеют ли они выходы или нет, имеют адрес подпрограммы моделирования во втором регистре, соответствующем этому элементу. Все подпрограммы моделирования составлены в предположении, что после их выполнения индексный регистр L будет указывать на первый регистр в соответствующей части вызывающей последовательности, и все подпрограммы моделирования заканчиваются при добавлении длины этой части вызывающей последовательности к содержимому индексного регистра L. Благодаря этим простым условиям подпрограммы могут выполняться вместе без взаимных помех. Это те части вызывающей последовательности, которые транслируются при помощи макроопределений; остальная часть программы моделирования, а именно, подпрограммы, может быть записана раз и навсегда на обычном языке ассемблера.

Таким же образом компилирующая программа формирует большое число регистров вызывающей последовательности для каждой из других строк программы. Строка СДЕЛАНО транслируется в пару регистров в вызывающей последовательности. Первый регистр вспомогательный, а следующий представляет собой адрес пусковой программы, который всегда является фиксированным.

Коэффициенты разностных уравнений и любые другие параметры, которые должны быть преобразованы в более подходящие формы для использования в подпрограммах моделирования, вычисляются не компилирующей программой, а самими подпрограммами при первом выполнении этих программ, запрошенных определенной частью

вызывающей последовательности. Допустим, что требуется программа моделирования передаточной функции $a/(s+a)$ (по Лапласу) с использованием критерия инвариантности импульсной характеристики. Программа *PATSI* имеет блок, называемый *RC* ПОЛЮС. Вызывающая последовательность, образуемая для него, содержит четыре регистра:

выходной регистр,
ввод подпрограммы,
входной адрес,
$-aT$,

хотя при решении разностного уравнения подпрограмма использует величину e^{-aT}. Для преобразования параметра в более удобную форму при пуске подпрограмма *RC* ПОЛЮС извлекает $-aT$ из регистра 3_L и вычисляет e^{-aT}, которое запоминается в регистре 3_L. Затем она модифицирует регистр вызывающей последовательности 1_L (ввод подпрограммы) так, чтобы при дальнейших прохождениях программы первая часть подпрограммы не выполнялась, а выполнялась только та часть, которая используется все время.

Две полезные макрокоманды ОСТАНОВ и ВОЗВРАТ, пожалуй, являются частью языка компилирующей программы *PATSI*. Это не определения элементов моделирования; их значение состоит в том, что они позволяют вводить программы на машинном языке в промежутках между моделированием элементов в конечной программе. Команда ОСТАНОВ передается в два регистра в вызывающей последовательности, причем первый регистр вспомогательный, а второй содержит адрес регистра, следующего непосредственно за ним. Таким образом, после завершения предыдущей подпрограммы будет просмотрен регистр 1_L и будет найдено, что его следует переписать в регистр 2_L, где будет обнаружена программа на машинном языке. ВОЗВРАТ создает программу, очень сходную с пусковой программой, и после ее выдачи вызывающая последовательность возобновляется. Обеспечивая возможность выбора в программе, эти условные вставки в программу полезны при наборе статистики во время моделирования, а также для моделирования элементов, относительно которых можно предположить, что они больше не будут использоваться. Другой полезной макрокомандой является команда УМНОЖЕНИЕ T НА n, которая подобна СДЕЛАНО, за исключением того, что она выполняется только $n-1$ раз для каждых n прохождений по основному контуру программы. Таким образом, элементы, описываемые после команды УМНОЖЕНИЕ T НА n, имеют эффективную частоту отсчетов в n раз ниже частоты системы, благодаря чему создается впечатление, что программа моделирования выполняется намного быстрее.

5.7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Моделирование последующего состояния представляет собой метод моделирования исходных систем. Выбирается конечная система, которая хорошо соответствует требуемой исходной системе, но обязательно является дискретной. Затем конечная система моделируется конечной программой, состоящей из подпрограмм, каждая из которых после запуска вычисляет «последующий» выходной сигнал одного элемента в системе. Конечная программа может быть описана блок-схемой, идентичной блок-схеме конечной системы, которая,

в свою очередь, очень сходна с блок-схемой исходной системы. Порядок выполнения подпрограмм в конечной программе определяется топологией блок-схемы. Сходство блок-схемы исходной системы с блок-схемой конечной программы можно использовать при программировании модели, применяя язык более высокого уровня, чем при описании блок-схемы. Это позволяет осуществлять моделирование сложных систем за минимальное время и, таким образом, облегчает исследование поведения систем, рассмотрение которых в противном случае было бы слишком громоздким.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Briscoe H. W., Fleck P. L., A Real Time Computing System for LASA, presented at Spring Joint Computer Conference, AFIPS Proc., 1966, v. 28, p. 221—228.
2. Green B. F., Smith J. E. K., Klem L., Empirical Tests of an Additive Random Number Generator, J. Assoc. Computer Machinery, 1959, October, v. 6(4), p. 527—537.
3. Hastings C., Jr. «Approximations for Digital Computers», Princeton University Press, Princeton, N. Y., 1955.
4. Kelly J. L., Jr., Lachbaum C. L., Vyssotsky V. A., A Block Diagram Compiler, Bell System Tech. J., 1961, May, v. 40, p. 669—676.
5. MacLaren M. D., Marsaglia G., Uniform Random Number Generators, J. Assoc. Computer Machinery, 1965, v. 12, p. 83—89.
6. Rader C. M., Speech Compression Simulation Compiler, presented at Spring Meeting of Acoustical Society of America, 1965, J. Acoust. Soc. Am. (A), 1965, June.

Глава шестая

ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

6.1. ТЕОРИЯ НЕПРЕРЫВНОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Преобразование Фурье является одним из самых важных математических средств для обработки сигналов и имеет большое значение как для теории, так и для практики. Оно широко и успешно применяется и вне области обработки сигналов.

Преобразование Фурье, или спектр сигнала $f(t)$, определяется следующим образом:

$$F(\omega)=\mathcal{F}\{f(t)\}=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,e^{-j\omega t}\,dt. \qquad (6.1)$$

Как $f(t)$, так и $F(\omega)$ могут быть комплексными функциями действительной переменной. Основным свойством преобразования Фурье является его способность различать колебания различных частот в аддитивных комбинациях. Так, если $\delta(x)$ есть единичная импульсная «функция» *), то

$$\mathcal{F}\left\{\sum_i a_i\,e^{j\omega_i t}\right\}=2\pi\sum a_i\delta(\omega-\omega_i), \qquad (6.2)$$

т. е. сумма синусоидальных колебаний, перекрывающихся во времени, преобразуется в сумму импульсов (по частоте), которые, по определению, не перекрываются. В терминах, применяемых при обработке сигналов, преобразование Фурье вводится для того, чтобы представить сигнал в частотной области, а ω — аргумент преобразования Фурье — понимается как частота.

На основании (6.1) можно показать, что преобразование Фурье *линейно,* поскольку

$$\mathcal{F}\{x(t)+y(t)\}=\mathcal{F}\{x(t)\}+\mathcal{F}\{y(t)\}, \qquad (6.3)$$

и если c — постоянная величина, то

$$\mathcal{F}\{cx(t)\}=c\mathcal{F}\{x(t)\}. \qquad (6.4)$$

---

*) Она определяется выражением $\delta(x-x_i)=\begin{cases}1, & x=x_i,\\ 0, & x\neq x_i.\end{cases}$ *Прим. ред.*

Наконец, существует обратное преобразование, задаваемое выражением

$$f(t)=\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)\,e^{jt\omega}d\omega. \qquad (6.5)$$

Обратное преобразование Фурье (6.5) удивительно похоже по форме на (6.1). По этой причине, все «пары» пре-

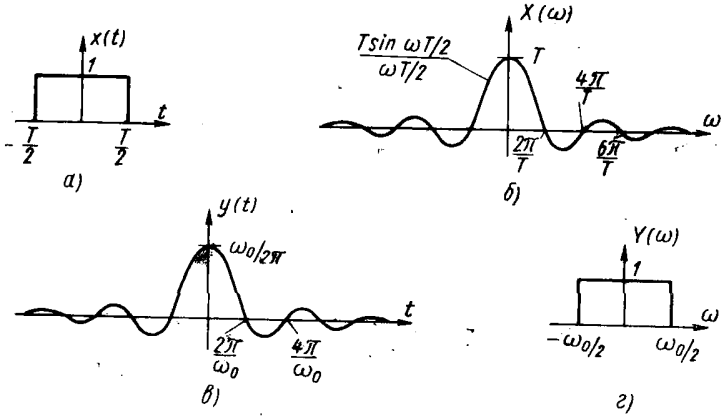


Рис. 6.1. Пары преобразований Фурье, иллюстрирующие симметрию прямого и обратного преобразований Фурье.

образований имеют близкие зеркальные образы. Так, временная функция *)

$$x(t)=\begin{cases}1 & \text{для } |t|<T/2,\\ 0 & \text{для } |t|>T/2,\end{cases}$$

показанная на рис. 6.1,*а*, имеет преобразование Фурье

$$X(\omega)=T\frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2},$$

показанное на рис. 6.1,*б*, а временная функция

$$y(t)=\frac{\omega_0}{2\pi}\frac{\sin(\omega_0 t/2)}{\omega_0 t/2},$$

*) Поскольку преобразование Фурье определяется с помощью интеграла, неопределенность в определении $x(t)$ при $t=\pm T/2$ не влияет на преобразование.

показанная на рис. 6.1,*в*, имеет преобразование

$$Y(\omega)=\begin{cases}1 & \text{для } |\omega|<\omega_0/2,\\ 0 & \text{для } |\omega|>\omega_0/2,\end{cases}$$

показанное на рис. 6.1,*г*.

Исторически преобразование Фурье было развито из понятия ряда Фурье, и можно показать, что интеграл Фурье является частным случаем ряда. Если $f(t)$ — периодичесая функция, то преобразование Фурье $F(\omega)$ состоит из взвешенной суммы «импульсов» на частотах, которые являются целыми кратными основной частоты функции $f(t)$, а веса, относящиеся к этим «импульсам», являются коэффициентами ряда Фурье для одного периода функции $f(t)$.

Преобразование Фурье очень тесно связано с преобразованием Лапласа. Для временных функций, которые существуют только при $t\geqslant 0$, преобразование Лапласа определяется как функция s:

$$\mathcal{L}\{f(t)\}=\int_{0}^{\infty}f(t)\,e^{-st}\,dt. \qquad (6.6)$$

При $s=j\omega$ преобразование Лапласа совпадает с преобразованием Фурье. Наоборот, вычисление преобразования Фурье от $f(t)\,e^{-\alpha t}$ дает преобразование Лапласа от $f(t)$ для значений $s=\alpha+j\omega$, и, таким образом, преобразование Фурье может быть использовано для вычисления преобразования Лапласа.

Бессмысленно говорить о преобразовании Фурье от последовательности отсчетов. Тем не менее, можно связать дискретную последовательность чисел $f(nT)$ с временной функцией:

$$f^*(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\,\delta(t-nT), \qquad (6.7)$$

которая имеет преобразование Фурье

$$F^*(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}f(nT)\,e^{-j\omega nT}. \qquad (6.8)$$

Если последовательность есть нуль при $n<0$, она имеет z-преобразование

$$F(z)=\sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, z^{-n},$$

откуда видно, что

$$F^*(\omega)=F(e^{j\omega T}). \qquad (6.9)$$

Нетрудно также заметить, что любая временная функция вида (6.7), т. е. последовательность равноотстоящих импульсов, имеет спектр, который периодичен по частоте с периодом $2\pi/T$.

Наконец, преобразование Фурье имеет одно важное свойство — свойство свертки, а именно: для любых функций $x(t)$ и $y(t)$ с преобразованием Фурье $X(\omega)$ и $Y(\omega)$, функция

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, y(t-\tau)\, d\tau$$

имеет преобразование Фурье $X(\omega)Y(\omega)$.

6.2. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

По многим причинам желательно вычислять преобразование Фурье на цифровых машинах. Это означает, что необходимо рассматривать только дискретные отсчеты как временной функции, так и спектра и только конечное число отсчетов каждой из них. Предположим, что вре-

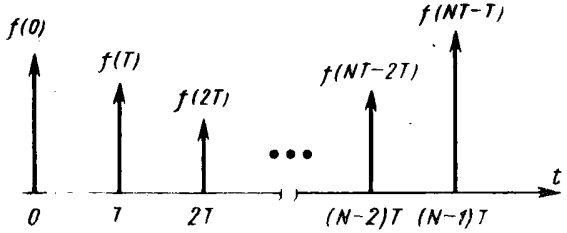


Рис. 6.2. Функция времени, которая может ассоциироваться с последовательностью отсчетов.

менная функция $f(t)$ представлена последовательностью из N отсчетов $f(nT)$, $0\leqslant n\leqslant N-1$, где T — интервал дискретизации во временной области. Затем допустим также, что спектр $F(\omega)$ представлен как $F(k\Omega)$, $0\leqslant k\leqslant N-1$, где Ω — выбранное расстояние между отсчетами в частотной области. Если из последовательности $f(nT)$ сформирована функция $f^*(t)$ в виде (6.7) с конечным числом импульсов, как показано на рис. 6.2, то можно написать выражение для $F^*(k\Omega)$:

$$F^*(k\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\, e^{j\Omega Tnk}, \qquad (6.10)$$

которое полностью дискретно как по времени, так и по частоте и поэтому подходит для вычислений.

Учитывая приведенную выше мотивировку, определяем дискретное преобразование Фурье (сокращенно ДПФ) от последовательности $f(nT)$ из N отсчетов, $0\leqslant n\leqslant N-1$, как другую последовательность *)

$$F(k\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\, e^{-j\Omega Tnk}, \qquad (6.11)$$

где

$$\Omega=\frac{2\pi}{NT}. \qquad (6.12)$$

При таком определении Ω существует только N различных значений, которые возможно вычислить по (6.11), а именно при $k=0, 1, \ldots, N-1$. Для того чтобы это доказать, рассмотрим (6.11) для произвольного целого числа k, выраженного как

$$k=rN+k_0,$$

где $k_0=k$ по модулю N, а $r=(k-k_0)/N$. Тогда

$$F(k\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\, e^{-j\Omega Tn(rN+k_0)}, \qquad (6.13)$$

но поскольку $\Omega TN=2\pi$, то последнее выражение можно упростить до вида:

$$F(k\Omega)=F(k_0\Omega). \qquad (6.14)$$

Мы можем считать (6.11) формулой, дающей последовательность только из N чисел, или формулой, дающей периодическую последовательность чисел с периодом N. Другими словами, *дискретное преобразование Фурье мо-*

*) Если это не оговорено особо, то подразумевается, что как $f(nT)$, так и $F(k\Omega)$ являются комплексными функциями.

жет пониматься как оценка z-преобразования конечной последовательности $f(nT)$ в N точках на z-плоскости, равномерно расположенных вдоль единичной окружности под углами $k\Omega$ радиан. В некоторых случаях рассмотрение последовательности спектральных отсчетов, расположенных вдоль окружности, подобно тому как это изобра-

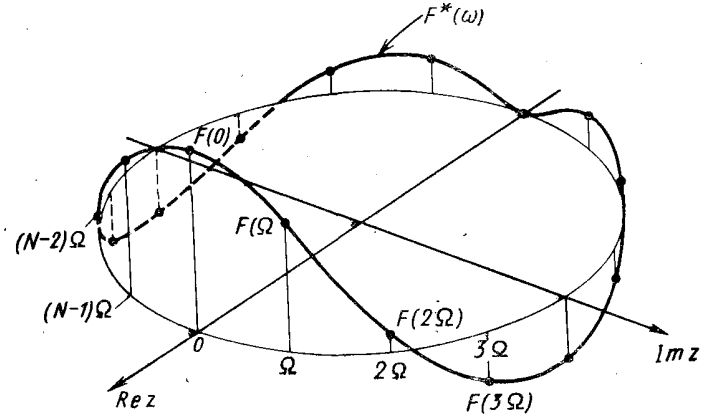


Рис. 6.3. Изображение периодического спектра в z-плоскости вдоль единичной окружности.

жено на рис. 6.3, вместо отсчетов, расположенных вдоль линии, очень полезно. Спектр аналоговой функции, состоящей из равноотстоящих импульсов, может быть подобным же образом изображен вдоль окружности, поскольку он периодичен по частоте.

В оставшейся части этого параграфа свойства дискретного преобразования Фурье будут рассмотрены более подробно. Эти свойства похожи на свойства непрерывного преобразования Фурье. Для практического использования важно, что хотя ДПФ от последовательности может только аппроксимировать преобразование Фурье от функции, свойства ДПФ являются *точными*, а не приближенными свойствами, основанными на аналогии преобразований Фурье [5, 8]. В дальнейшем часто будет встречаться в сложных формулах выражение «x по модулю N». Поэтому, введем краткое обозначение

$$((x)) = x \bmod N = x + rN, \quad 0 \leqslant x + rN < N. \tag{6.15}$$

Часто будет использоваться также тот факт, что

$$e^{-j\Omega T((x))} = e^{-j\Omega T x}.$$

Дискретное преобразование Фурье от комплексной синусоиды частоты $q\Omega$

$$f(nT) = e^{jq\Omega nT}, \tag{6.16}$$

может быть выведено из определения (6.11) и будет равно

$$F(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} \nu^n = \frac{1-\nu^N}{1-\nu}, \tag{6.17}$$

где $\nu = e^{j\Omega T(q-k)}$. Это сохраняет силу при любом q — целом или нецелом. В первом случае (6.17) может быть еще более упрощено. Если q целое число, то $F(k\Omega) = 0$ для $k \neq ((q))$, так как $\nu^N = 1$. Для $k = ((q))$ правая часть (6.17) принимает вид 0/0, поскольку $\nu = 1$, но, как легко видеть, сумма равна N. Поэтому комплексная синусоида, частота которой — целое кратное Ω, имеет дискретное преобразование Фурье

$$F(k\Omega) = \begin{cases} N & \text{для } k = ((q)), \\ 0 & \text{для всех других } k, \end{cases} \tag{6.18}$$

из которого вытекает свойство частотной селективности дискретного преобразования Фурье

$$\text{ДПФ}\left\{\sum_q a_q e^{jq\Omega nT}\right\} = N a_k, \tag{6.19}$$

тесно связанное с таким же свойством непрерывного преобразования Фурье (6.2). Однако, поскольку в ДПФ существует только N различных чисел, то только N различных частот могут быть полностью разделены. Для частот, которые не являются целыми кратными Ω, как видно из (6.17), все точки ДПФ будут ненулевыми.

Свойства линейности ДПФ:

$$\text{ДПФ}\{f(nT) + q(nT)\} = \text{ДПФ}\{f(nT)\} + \\ + \text{ДПФ}\{q(nT)\} \tag{6.20}$$

и

$$\text{ДПФ}\{c(f(nT))\} = c[\text{ДПФ}\{f(nT)\}], \tag{6.21}$$

соответствуют (6.3) и (6.4); они также непосредственно вытекают из определения (6.11).

Существует обратное ДПФ — преобразование, которое переводит дискретное преобразование Фурье в последовательность, из которой оно было вычислено. Оно задается как выражение

$$f(lT)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F(k\Omega)\,e^{jTkl\Omega}, \qquad (6.22)$$

которое отличается от (6.11) только масштабным множителем и знаком экспоненты, подобно тому как это было в случае аналогового обратного преобразования Фурье (6.5). Для того чтобы доказать, что (6.22) есть действительно обратное преобразование, подставим (6.11) в сумму (6.22). Это даст

$$\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}f(nT)\,e^{-j\Omega Tnk}\,e^{+j\Omega Tlk}.$$

Изменив очередность суммирований, можно вынести множитель $f(nT)$ за знак суммы по k. Это даст

$$\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f(nT)\left(\sum_{k=0}^{N-1}e^{j\Omega T(l-n)\,k}\right),$$

где сумма по k такая же и имеет такую же форму, что и сумма (6.17). Внутренняя сумма равна N для $((l))=n$ и нулю во всех остальных случаях. Таким образом, только одно слагаемое внешней суммы отлично от нуля, и (6.22) доказано.

Обратное ДПФ подобно ДПФ может давать отсчеты $f(lT)$ для l вне интервала $0\leqslant l\leqslant N-1$, но эти отсчеты есть просто повторение значений $f(lT)$ для l, взятых внутри этого интервала. Поэтому можно представить значения $f(lT)$ расположенными вдоль окружности или же периодически продолженными.

Рассмотрим теперь обратное дискретное преобразование Фурье от произведения дискретных преобразований Фурье, для которого соответствующим аналоговым результатом является свертка. Таким образом, рассмотрим

$$v(lT)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k\Omega)\,Y(k\Omega)\,e^{jlTk\Omega}, \qquad (6.23)$$

где $X(k\Omega)$ и $Y(k\Omega)$ являются ДПФ последовательностей $x(nT)$ и $y(nT)$ соответственно. Предполагается, конечно, что и $x(nT)$ и $y(nT)$ имеют равное число точек N. Для того чтобы оценить (6.23), подставим определения $X(k\Omega)$ и $Y(k\Omega)$:

$$v(lT)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\left[\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)\,e^{-j\Omega Tnk}\right]\times$$
$$\times\left[\sum_{m=0}^{N-1}y(mT)\,e^{-j\Omega Tmk}\right]e^{j\Omega Tlk}. \qquad (6.24)$$

Это выражение можно записать как тройную сумму по k, m и n. Если изменить порядок суммирования таким образом, чтобы сумма по k стала самой внутренней, то можно $x(nT)\,y(mT)$ вынести из под знака этой суммы и получить

$$v(lT)=\frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1}\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)\,y(mT)\left[\sum_{k=0}^{N-1}e^{j\Omega T(l-m-n)k}\right]. \qquad (6.25)$$

Сумма в скобках теперь имеет тот же вид, что и в двух предыдущих доказательствах, и равна нулю для всех m и n, за исключением комбинации m и n, удовлетворяющей условию

$$m=((l-n)), \qquad (6.26)$$

для которой сумма в скобках равна N. Таким образом, (6.25) сводится к выражению

$$v_l=\sum_{n=0}^{N-1}x_n y_{((l-n))}=\sum_{n=0}^{N-1}y_n x_{((l-n))}, \qquad (6.27)$$

в котором для простоты применены обозначения переменных с помощью индексов. Таким образом показано, что произведение дискретных преобразований Фурье есть дискретное преобразование Фурье от *круговой* свертки [13]. Смысл выражения (6.27) иллюстрируется рис. 6.4, где последовательность $x(nT)$ с пятью точками, обозначенная через x_n, циклически свертывается с последовательностью y_m также с пятью точками. Можно рассматривать одну или обе последовательности как периодически продолжающиеся (светлые точки) или же можно

рассматривать их расположенными вдоль окружности. На линии *1*, рис. 6.4, показана последовательность x_n, а на линии *2* — периодически продолженная последовательность y_n. На линии *3*, представляющей сверточную сумму v_0, последовательность y перевернута по времени и умножается на соответствующий член последовательности x. На линиях с *4* по *7* показано, как сдвигается перевернутая по времени последовательность y для вычис-

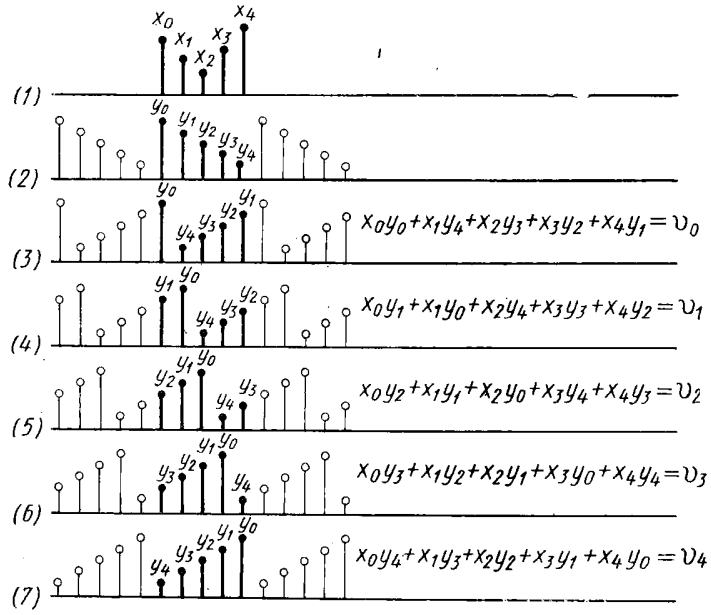


Рис. 6.4. Периодическая или круговая свертка.

ления v_1, v_2, v_3 и v_4. Когда отсчет y_m выдвигается из интервала вправо, тот же отсчет вдвигается в диапазон с левой стороны.

Рис. 6.4 иллюстрирует, почему круговая свертка иногда называется *периодической*. В противоположность этому соответствующее свойство непрерывного преобразования Фурье может быть названо *апериодической* сверткой. В большинстве задач, где используется свертка, имеется в виду апериодическая свертка.

Естественным следствием из теоремы о круговой свертке является теорема кругового смещения:

$$\text{ДПФ}\{f(((n-l))T)\} = F(k\Omega)\,e^{-j\Omega Tlk}, \qquad (6.28)$$

которая устанавливает, что перемещение l отсчетов из конца последовательности в ее начало эквивалентно умножению дискретного преобразования Фурье на линейно-фазовую функцию. Это аналогично непрерывному преобразованию Фурье от функции, сдвинутой по времени.

Некоторые свойства дискретного преобразования Фурье связаны с нечетными и четными последовательностями. Нечетная последовательность из N отсчетов, $x(nT)$, определяется как

$$x(nT) = -x(((-n))T), \qquad (6.29)$$

а четная последовательность из N отсчетов, $y(nT)$, — как

$$y(nT) = y(((-n))T). \qquad (6.30)$$

Если последовательности изображены вдоль окружности или периодически продолжены, то эти определения весьма похожи на аналогичные определения нечетных или четных функций. Это иллюстрируется рис. 6.5,*а*, на котором изображена четная последовательность из шести отсчетов, и рис. 6.5,*б*, на котором изображено периодическое продолжение рис. 6.5,*а*.

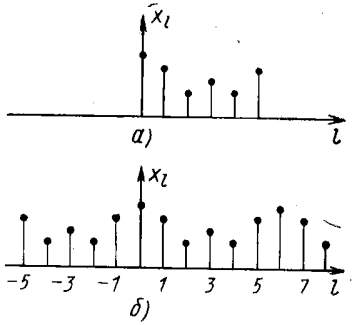


Рис. 6.5. Четная последовательность (*а*), ее периодическое продолжение (*б*).

Четная последовательность с действительными отсчетами имеет дискретное преобразование Фурье, которое также является действительным и четным. Нечетная последовательность с действительными отсчетами имеет дискретное преобразование Фурье, которое является нечетным и чисто мнимым. Любая действительная последовательность имеет преобразование, действительная часть которого является четной, а мнимая часть—нечетной. Преобразование четной, но не чисто действительной

последовательности будет также четным, но не чисто действительным, а преобразование последовательности, которая является нечетной, но не чисто мнимой будет нечетным и не чисто действительным. Эти и другие подобные свойства сведены в табл. 6.1. Благодаря симметрии определений прямого и обратного преобразований таблица останется в силе, если заголовки столбцов $f(nT)$ и $F(k\Omega)$ поменять местами.

Таблица 6.1

$f(nT)$	$\longleftrightarrow$	$F(k\Omega)$
Четная	$\longleftrightarrow$	Четная
Нечетная	$\longleftrightarrow$	Нечетная
Четная и действительная	$\longleftrightarrow$	Четная и действительная
Нечетная и действительная	$\longleftrightarrow$	Нечетная и мнимая
Действительная	$\longleftrightarrow$	Действительная часть четная Мнимая часть нечетная
Мнимая	$\longleftrightarrow$	Действительная часть нечетная Мнимая часть четная
Четная и мнимая	$\longleftrightarrow$	Четная и мнимая
Нечетная и мнимая	$\longleftrightarrow$	Нечетная и действительная

Теперь рассмотрим свойства дискретных преобразований Фурье, от искусственно удлиненных последовательностей. Так, допустим, что имеются отсчеты $f(nT)$, $0 \leqslant n \leqslant N-1$, и создается более длинная последовательность $g(nT)$, $0 \leqslant n \leqslant rN-1$, где r — любое целое число и где

$$g(nT) = \begin{cases} f(nT), & 0 \leqslant n \leqslant N-1, \\ 0 & \text{для всех других } n. \end{cases} \tag{6.31}$$

В определении ДПФ от $g(nT)$ необходимо употреблять Ω/r вместо Ω:

$$G\left(k\left[\frac{\Omega}{r}\right]\right) = \sum_{n=0}^{rN-1} g(nT)\, e^{-j\Omega Tnk/r} = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\, e^{-j\Omega Tnk/r}. \tag{6.32}$$

Если k делится на r, то

$$G\left(k\left[\frac{\Omega}{r}\right]\right) = F\left(\left[\frac{k}{r}\right]\Omega\right). \tag{6.33}$$

Если k не делится на r или если r не является целым числом, то значения G отличаются от значений F, но между ними может быть установлена связь, если учесть, что обе последовательности значений являются отсчетами одной и той же непрерывной функции $F^*(\omega)$, определенной по (6.9), только расположение отсчетов по частоте у них разное.

Другим способом искусственного удлинения последовательности является ее повторение. Предположим, что имеется последовательность $h(nT)$ с rN точками, заданная как

$$h(nT) = f((n))T) \text{ для } 0 \leqslant n \leqslant rN-1. \tag{6.34}$$

Для $h(nT)$ ДПФ определяется следующим образом:

$$H\left(k\left[\frac{\Omega}{r}\right]\right) = \sum_{n=0}^{rN-1} h(nT)\, e^{-j\Omega Tnk/r} =$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} f(nT) \sum_{l=0}^{r-1} e^{-j\Omega T(n+lN)k/r}, \tag{6.35}$$

которое можно записать так:

$$H\left(k\left[\frac{\Omega}{r}\right]\right) = \sum_{n=0}^{N-1} f(nT)\, e^{-j\Omega Tn[k/r]} \left(\sum_{l=0}^{r-1} \nu^l\right), \tag{6.36}$$

где $\nu = e^{-j(\Omega/r)TNk}$. Сумма по l есть уже знакомая сумма (6.17), так что

$$H\left(k\left[\frac{\Omega}{r}\right]\right) = \begin{cases} rF\left(\left[\frac{k}{r}\right]\Omega\right) & \text{для } k, \text{ делимого на } r, \\ 0 & \text{для всех других } k. \end{cases} \tag{6.37}$$

Несколько интересных и важных теорем связывают ДПФ последовательности $f(nT)$ с ДПФ последовательности, состоящей из тех же членов, что и $f(nT)$, но переставленных местами. Выше уже рассматривалось влияние одного вида перестановки, а именно вращения,

в (6.28). Рассмотрим теперь ДПФ переставленной последовательности *):

$$g(nT)=f(((pn))T), \quad 0\leqslant n\leqslant N-1, \tag{6.38}$$

где p — целое число, не имеющее общих делителей с N. ДПФ от $g(nT)$ имеет вид:

$$G(k\Omega)=\sum_{n=0}^{N-1} f(((pn))T)\,e^{-j\Omega Tnk}. \tag{6.39}$$

Предположим теперь, что найдено единственно целое q (в пределах $0<q<N-1$), причем такое, что

$$((pq))=1\ ^{**)}. \tag{6.40}$$

Произведем замену индекса

$$n=((qm)), \quad 0\leqslant m\leqslant N-1 \tag{6.41}$$

в (6.39), тогда получим

$$G(k\Omega)=\sum_{m=0}^{N-1} f(((pqm))T)\,e^{-j\Omega Tqmk}=F(((qk))\Omega). \tag{6.42}$$

Уравнение (6.42) устанавливает, что перестановка членов последовательности согласно

$$n\longrightarrow((pn))$$

до вычисления ДПФ эквивалентна перестановке членов ДПФ согласно

$$k\longrightarrow((qk))\ ^{***)}.$$

*) Для того чтобы показать, что (6.38) есть действительно перестановка, необходимо доказать однозначное соответствие целых чисел от 0 до $N-1$ и последовательности $((pn))$, $0\leqslant n\leqslant N-1$. Поскольку $0\leqslant((pn))\leqslant N-1$, достаточно показать, что $((pn_1))\neq((pn_2))$ во всех случаях, за исключением $n_1=n_2$. Если предположить обратное для некоторых n_1 и n_2, тогда $p(n_1-n_2)$ должно быть сравнимо с нулем по модулю N и поэтому имеет множитель N. Поскольку p не имеет множителем N, то n_1-n_2 должно быть кратным N. Но $|n_2-n_1|<N$, и поэтому $n_2=n_1$, что противоречит предположению. Следовательно, существует однозначное соответствие, и (6.38) действительно есть перестановка.

**) Решение (6.40) должно существовать, поскольку доказано в предыдущей сноске, что $((pn))$ принимает все значения от 0 до $N-1$. Поэтому некоторые n дают $((pn))=1$.

***) Не всегда ясно, как решить сравнение (6.40) для q. Бреннером была предложена следующая модификация алгоритма Евклида. Образуем две последовательности r_i и s_i, приняв $r_0=N$, $r_1=p$, $s_0=0$, $s_1=1$; $r_i=(r_{i-2})\bmod r_{i-1}$ и $s_i=s_{i-2}+s_{i-1}(r_i-r_{i-2})-r_{i-1}$. Будем повторять это до тех пор, пока r_i не станет равно нулю и s_{i-1} не станет равно q.

Частным случаем (6.42) будет случай, когда $p=q=N-1$, для которого

$$F(((-k))\Omega)=\text{ДПФ}\{f(((-n))T)\}. \tag{6.43}$$

6.3. АЛГОРИТМ ГЕРЦЕЛЯ

Существует много методов вычисления ДПФ для отдельной частоты $k\Omega$. Самым простым из всех является непосредственное применение (6.11). Это требует проведения N комплексных умножений и N комплексных сложений с использованием N коэффициентов $e^{-j\Omega Tnk}$. Обычно эти коэффициенты могут быть восстановлены из запомненной таблицы отсчетов одной четверти периода синусоидального колебания. Комплексное умножение требует проведения четырех действительных умножений и двух действительных сложений, а комплексное сложение — двух действительных сложений, так что общий объем вычислений, заключенный в выражении (6.11), составляет

$$T_{(6.11)}=4N(k_m+k_a+k_e)M, \tag{6.44}$$

где k_m—время, требуемое для действительного умножения; k_a — время, требуемое для действительного сложения; k_e — время, требуемое для других операций при обработке, и M — число различных вычисляемых частотных коэффициентов.

Другим алгоритмом для вычисления коэффициента на отдельной частоте является алгоритм Герцеля, основанный на подходе с позиций цифровой фильтрации. Рассмотрим сначала фильтр с единственным комплексным полюсом при $z=e^{j\Omega Tk}$:

$$H(z)=\frac{1}{1-e^{j\Omega Tk}z^{-1}}. \tag{6.45}$$

Здесь впервые вводится фильтр с комплексными коэффициентами, но с ним не связаны какие-либо принципиальные трудности, особенно в том случае, когда фильтруются комплексные данные. Подадим на вход фильтра последовательность $x(nT)$, для которой желательно вычислить $X(k\Omega)$. Так как z-преобразование от $x(nT)$ есть $X(z)$, то выходной сигнал фильтра будет равен

$$y(mT)=\frac{1}{2\pi j}\oint\frac{z^m\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)z^{-n}}{z-e^{j\Omega Tk}}dz, \tag{6.46}$$

и в частности, когда $m=N$, выходной сигнал определяется как вычет в полюсе $e^{j\Omega Tk}$:

$$y(NT)=\left[z^N\sum_{n=0}^{N-1}x(nT)z^{-n}\right]\Bigg|_{z=e^{j\Omega Tk}}. \qquad (6.47)$$

Но поскольку

$$z^N\Big|_{z=e^{j\Omega Tk}}=1,$$

то можно видеть, что

$$y(NT)=X(k\Omega). \qquad (6.48)$$

Применение такого фильтра для вычисления преобразований Фурье не дает экономии в вычислительных операциях, хотя оно уменьшает требуемую память для коэффициентов. Однако, если переписать (6.45) как

$$H(z)=\frac{1-e^{-j\Omega Tk}z^{-1}}{1-2(\cos\Omega Tk)z^{-1}+z^{-2}}, \qquad (6.49)$$

можно прийти к реализации цифрового фильтра, показанной на рис. 6.6. Поскольку значение выходного сигнала фильтра необходимо иметь только при $n=N$, то нет нужды выполнять действия той части цепи, что находится справа от пунктирной линии при любом n, за исключением случая $n=N$. Таким образом, требуемые операции состоят из N умножений действительных коэффициентов на комплексные данные и $2N$ комплексных сложений. По сравнению с ними объемом заключительных операций можно пренебречь, если число отсчетов велико.

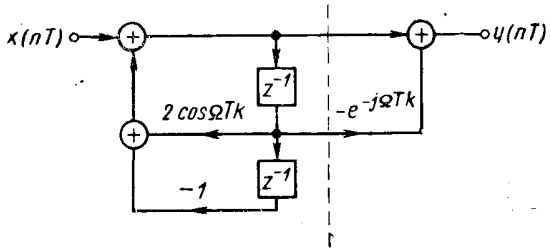


Рис. 6.6. Цифровой фильтр для вычисления одной точки ДПФ с помощью алгоритма Герцеля.

Если пересчитать все к операциям над действительными числами, то получим

$$T_{\text{Герцель}}=(2Nk_m+4Nk_a+Nk'_e)M, \qquad (6.50)$$

где k'_e есть время, требуемое для особых операций в алгоритме Герцеля. Если, однако, частоты, при которых вычисляются $X(k\Omega)$, могут быть сгруппированы парами как k и $N-k$, то можно получить дополнительную экономию, поскольку только нуль фильтра на рис. 6.6 различен для этих двух частот. Поэтому, если частоты могут быть таким путем сгруппированы в пары, то

$$T_{\text{Герцель}}=N(k_m+2k_a+k'_e)M, \qquad (6.51)$$

откуда видно, что алгоритм Герцеля дает экономию примерно в 4 раза по сравнению с прямым способом вычисления по (6.11).

Для действительных чисел как прямой метод, так и метод Герцеля дают дополнительную экономию.

6.4. БЫСТРОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

Прямое вычисление для всех N частот по (6.11) требует N^2 комплексных умножений и сложений, и для умеренно большого N, скажем для N, большего, чем 1000, это прямое вычисление связано с большими затратами машинного времени. Методы, экономящие машинное время, так же, как только что рассмотренный метод Герцеля, используют некоторые искусственные приемы, в большинстве случаев основанные на том, что сумма произведений может быть иногда упрощена, если сделать сложение до умножения, или на том, что комплексные операции могут быть заменены действительными операциями.

Общим для этих методов является то, что полное преобразование rN точек занимает в r^2 больше времени, чем преобразование N точек. Поэтому, даже если метод вычисления по выражению (6.11) требует только $^1/_4N^2$ операций, последовательности больше чем, скажем, из 10 000 точек потребуют невыполнимого количества вычислений. Однако все такие методы совсем недавно были вытеснены несколькими сходными алгоритмами, которые все вместе можно назвать *быстрыми преобразованиями Фурье* [3, 7, 8, 9, 11, 12]. Эти алгоритмы не применяются в тех случаях, когда число точек в последовательности

является простым, но зато при N сложносоставном (имеющем много множителей) экономия может быть чрезвычайно большой *). Когда N есть степень числа 2 (состоит из максимального числа множителей), то алгоритмы быстрых преобразований Фурье требуют проведения числа вычислений, пропорционального не N^2, а $N \log_2 N$, что, например, при $N = 1\,024$ составляет 99%-ную экономию в вычислениях. Для эффективного использования этих алгоритмов требуется, чтобы N разлагалось на возможно большее число множителей. В большинстве задач на преобразуемые данные можно наложить это ограничение с тем, чтобы алгоритмы быстрого преобразования Фурье могли быть использованы.

При дальнейшем изложении будем пользоваться обозначениями в виде индексов, принятых в (6.27) и на рис. 6.4. Будем также обозначать величину $e^{-j\Omega\tau}$ как W. Тогда (6.11) и (6.12), определяющие ДПФ, примут вид

$$F_k = \sum_{n=0}^{N-1} f_n W^{nk} \tag{6.52}$$

и

$$W = e^{-j(2\pi/N)}. \tag{6.53}$$

Из уравнения (6.52) не следует делать вывод, что W не зависит от N. Для последовательности с $N/2$ точками в (6.52) не только верхний предел суммы должен стать $N/2-1$, но и W должно быть заменено на W^2.

Существуют два класса алгоритмов быстрого преобразования Фурье, и каждый класс имеет множество модификаций. Рассмотрим сначала метод, называемый *прореживанием (decimation) по времени.*

Прореживание по времени

Предположим, что число отсчетов N делится на два. Тогда полезно рассмотреть дискретные преобразования Фурье двух более коротких последовательностей: q_l, состоящей только из четно пронумерованных отсчетов, и h_l, состоящей только из нечетно пронумерованных отсчетов.

*) В гл. 7 будет показано, как может быть вычислено быстрое преобразование Фурье, когда число точек в последовательности является простым.

Эти последовательности иллюстрируются рис. 6.7 и формально задаются как

$$\begin{aligned} q_l &= f_{2l}, \\ h_l &= f_{2l+1}, \end{aligned} \qquad l = 0, 1, \ldots, N/2-1. \tag{6.54}$$

Дискретные преобразования Фурье для этих последовательностей являются также последовательностями, состоящими из $N/2$ точек, или, как было показано, могут

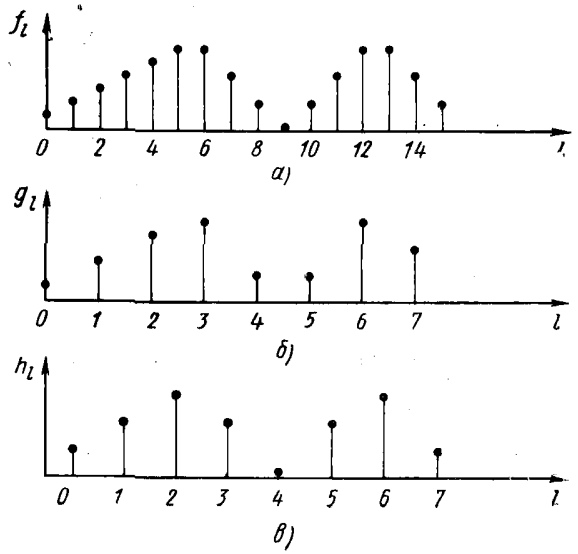


Рис. 6.7. Последовательность из шестнадцати точек (*а*); последовательность из восьми точек, образованная из четно пронумерованных отсчетов (*б*); последовательность из восьми точек, образованная из нечетно пронумерованных отсчетов (*в*).

считаться периодическими последовательностями с периодом $N/2$. Они могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} G_k &= \sum_{l=0}^{N/2-1} g_l (W^2)^{lk}, \\ H_k &= \sum_{l=0}^{N/2-1} h_l (W^2)^{lk}. \end{aligned} \tag{6.55}$$

Для нас представляет интерес ДПФ от полной последовательности, которое может быть выражено через g_l и h_l из (6.54):

$$F_k = \sum_{l=0}^{N/2-1} (g_l W^{2lk} + h_l W^{(2l+1)k}). \qquad (6.56)$$

Простая манипуляция с выражением (6.56) дает

$$F_k = \sum_{l=0}^{N/2-1} g_l (W^2)^{lk} + W^k \sum_{l=0}^{N/2-1} h_l (W^2)^{lk} = G_k + W^k H_k. \qquad (6.57)$$

Соотношение (6.57) между F_k, G_k и H_k имеет важное значение для вычислений. В самом деле, G_k и H_k могут быть вычислены при прямом методе с помощью $(N/2)^2$ операций каждая, а соединение их, дающее F_k, требует дополнительно проведения только N операций, что в сумме составляет $N+N^2/2$ операций (под операцией здесь подразумевается комплексное умножение и сложение). Но прямое вычисление F_k требует N^2 операций, и поэтому (6.57) экономит вычисления почти в два раза для больших N.

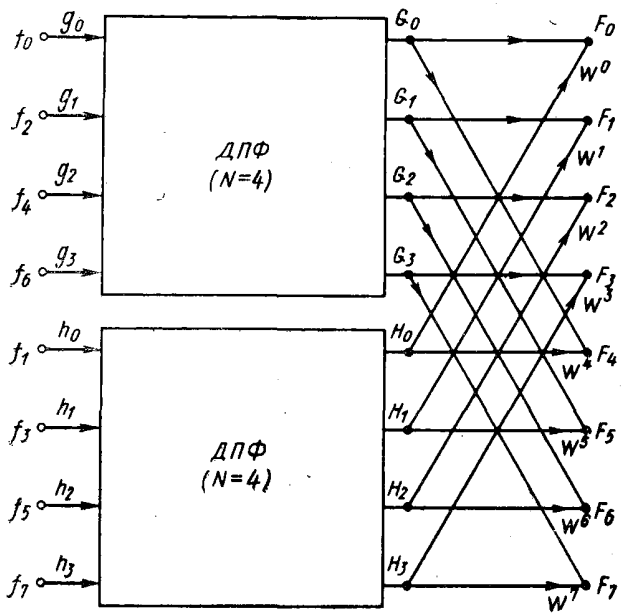


Рис. 6.8. Восьмиточечное ДПФ, приведенное к двум четырехточечным ДПФ с помощью прореживания по времени.

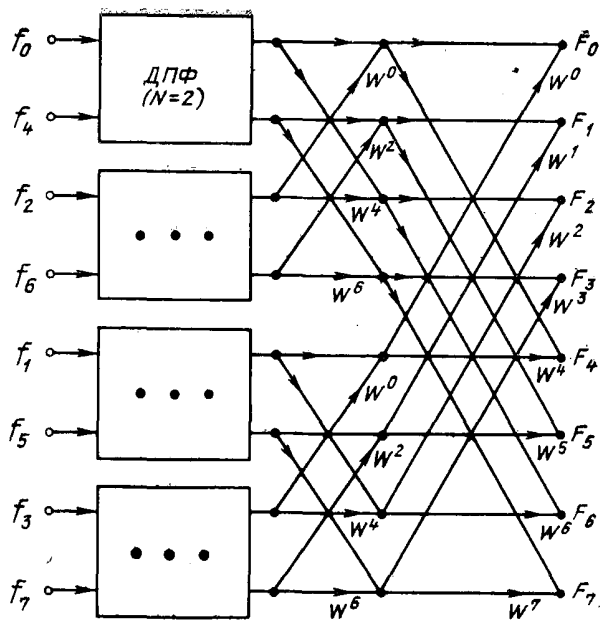


Рис. 6.9. Восьмиточечное ДПФ, приведенное к четырем двухточечным.

В (6.57) индекс k изменяется от 0 до $N-1$. Однако G_k и H_k имеют период $N/2$ и вычисляются только в диапазоне от 0 до $N/2-1$. Поэтому необходимы особые «рецепты» для вычисления F_k при $0 \leqslant k \leqslant N/2-1$ и при $N/2 \leqslant k \leqslant N-1$, а именно:

$$F_k = \begin{cases} G_k + W^k H_k, & 0 \leqslant k \leqslant N/2-1, \\ G_{k-N/2} + W^k H_{k-N/2}, & N/2 \leqslant k \leqslant N-1. \end{cases} \qquad (6.58)$$

Это соотношение между F_k, G_k и H_k изображено на рис. 6.8, который показывает восьмиточечное ДПФ, сведенное к двум четырехточечным *).

*) Направленный сигнальный граф может быть незнаком некоторым читателям. Основой его построения являются точки (или узлы) и стрелки (линии передачи). Каждый узел представляет переменную, а стрелки, указывающие на этот узел, берут начало в узлах, чьи переменные участвуют в формировании переменной данного узла. Это участие является аддитивным, и вес каждого слагаемого, если он отличается от единицы, обозначается постоянной, написанной рядом на линии передачи. Так, на рис. 6.8 величина F_7 у нижнего правого узла равна $G_3+W^7H_3$. Операции, отличные от сложения и умножения на постоянную величину, должны быть ясно обозначены символами, отличными от точки или стрелки.

Может случиться, что $N/2$ также делится на 2. В этом случае, поскольку G_k и H_k являются дискретными преобразованиями Фурье, их вычисление может быть уменьшено тем же способом, каким было уменьшено вычисление F_k. Следуя этим путем, объем вычислений F_k можно успешно уменьшать, если все более и более увеличивать число ДПФ от все меньшего и меньшего числа точек со

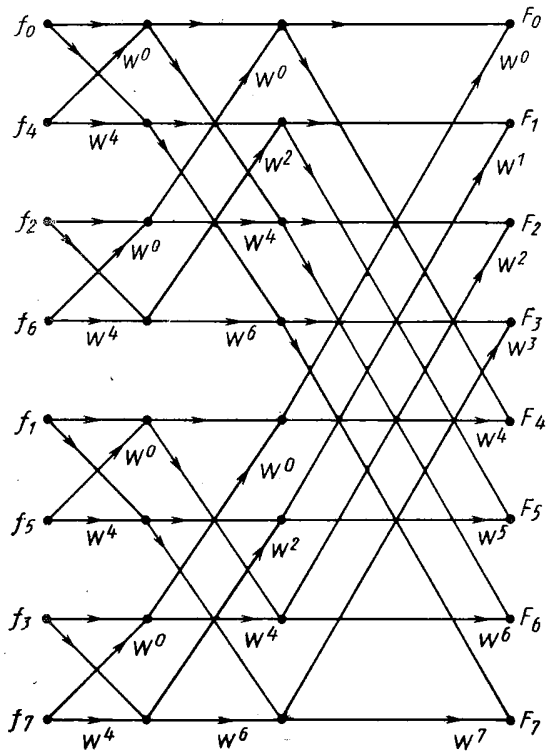


Рис. 6.10. Восьмиточечное ДПФ, полностью сведенное к комплексным умножениям и сложениям повторением прореживания по времени (здесь требуется двоично-инверсная перестановка входных отсчетов).

все большей и большей экономией вычислительных операций. В этом и заключается сущность метода быстрого преобразования Фурье. На рис. 6.9 два четырехточечных ДПФ из рис. 6.8 приведены каждое к двум двухточечным, а на рис. 6.10 каждое двухточечное ДПФ приведено к двум одноточечным (которые являются нулевыми опе-

рациями, и поэтому полное вычисление F_k сводится к комплексным умножениям и сложениям).

До сих пор рассматривался только случай, когда N является степенью числа 2 или по крайней мере делится на 2. Прежде чем перейти к случаю общего N, обсудим более детально случай, когда N есть степень 2. Рассмотрение рис. 6.10 дает значительную информацию о практических аспектах вычисления дискретного преобразования Фурье. Из рисунка легко видеть, что там имеется 8×3 узлов и $2\times8\times3$ стрелок, соответствующих $N\log_2 N$ сложениям и $2N\log_2 N$ умножениям. Половина умножений может быть опущена, поскольку линии передачи, обозначенные стрелкой без надписи, имеют коэффициент умножения, равный единице. Очевидно, половину оставшихся умножений также легко исключить, если учесть, что $W^{(N/2)}=-1$. Поэтому, если N есть степень 2, то для вычисления ДПФ последовательности из N точек требуется $N\log_2 N$ сложений и самое большее $^1/_2 N\log_2 N$ умножений.

Допустим, кроме того, что входные данные могут запоминаться в памяти машины в порядке

$$f_0,\ f_4,\ f_2,\ f_6,\ f_1,\ f_5,\ f_3,\ f_7,$$

как на рис. 6.10. Тогда вычисление дискретного преобразования Фурье может быть сделано «с замещением» (*in place*), т. е. путем записи всех промежуточных результатов на место исходной последовательности данных, а окончательного ответа — на место промежуточных результатов.

Чтобы показать это, предположим, что каждый узел соответствует двум регистрам памяти (двум, потому что величины являются в общем случае комплексными). Самые крайние слева восемь узлов представляют регистры, содержащие входные данные в переставленном порядке. Первая ступень вычислений заключается в вычислении содержимого регистров, представленных следующими восемью узлами вправо от входных узлов. Но каждая пара входных узлов воздействует только на соответствующую пару узлов, находящихся непосредственно за ними справа, и, если вычисления проводятся с двумя узлами одновременно, новые вычисленные значения могут быть записаны в те регистры, из которых взяты входные значения, поскольку входные значения больше не будут нужны для дальнейших вычислений.

На второй ступени производится вычисление величин для следующего вправо вертикального ряда узлов, также включающего пары узлов, хотя узлы в этих парах разделены теперь двумя позициями вместо одной. Этот факт не изменяет свойства вычисления с замещением, поскольку каждая такая пара узлов воздействует только на пару узлов, следующую непосредственно за ней справа. Поэтому после того, как новая пара значений будет вычислена, она может быть сохранена в регистрах, где хранились старые, больше не нужные результаты. В вычислениях для последнего вертикального ряда узлов, соответствующих значениям дискретного преобразования Фурье, участвуют пары узлов, разделенные уже четырьмя позициями, но свойство замещения по-прежнему сохраняется.

Первоначальная перестановка данных в последовательности f_l необходима для вычисления с применением метода замещения. Если ее не производить, то по мере развития алгоритма нечетно пронумерованные члены переместятся к концу последовательности. Изменение порядка следования отсчетов во входной последовательности получило наименование двоичной инверсии (*bit reversal*), поскольку отсчет, временной индекс которого дается двоичным числом l_2, l_1, l_0, должен быть сдвинут на место l_0, l_1, l_2, а отсчет, временной индекс которого l_0, l_1, l_2, должен быть сдвинут на место l_2, l_1, l_0. Заметим, что перестановка в исходной последовательности может быть также произведена с замещением.

Из рис. 6.10 можно видеть, что два показателя степени у W, требуемые для вычисления любой пары узлов, отличаются на 4 или, в общем случае, на $N/2$. Так как $W^{N/2}$ равно —1, то вычисления для пары узлов можно сделать с помощью всего лишь одного комплексного умножения, одного комплексного сложения и одного комплексного вычитания. Поэтому, если вычитание эквивалентно по сложности сложению, то наш предыдущий подсчет операций оправдывается.

Структура рис. 6.10 поясняет основную идею замены вычисления дискретного преобразования Фурье вычислением двух меньших дискретных преобразований Фурье, а каждого из этих — вычислением двух еще меньших преобразований и т. д.

На рис. 6.10 предполагается определенное распределение запоминаемых данных в памяти вычислительной машины до, во время и после вычисления. Подобные вычисления с различным распределением данных изображаются разного рода направленными графами, и они могут зачастую оказаться вариантами алгоритмов, использующих прореживание по времени.

Например, если представить, что на рис. 6.10 все узлы на горизонтали F_1 переставлены местами со всеми узлами на горизонтали F_4, а все узлы на уровне F_3 переставлены местами с узлами на уровне F_6, причем стрелки

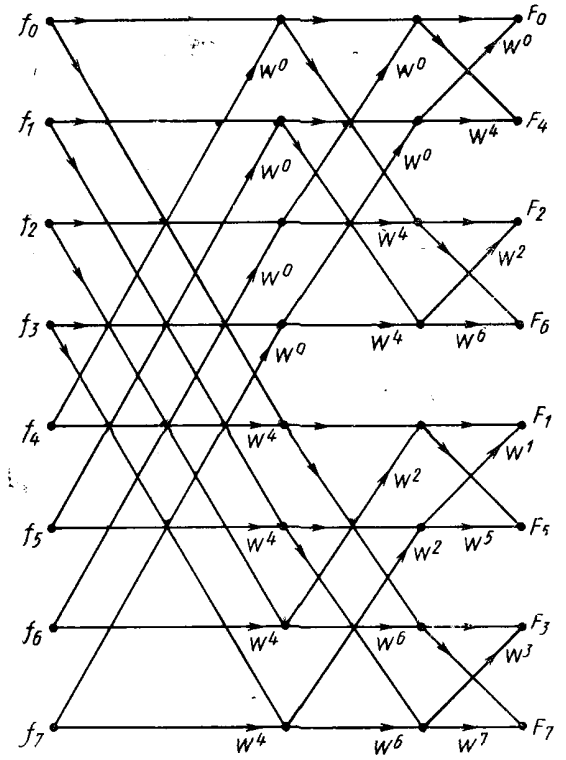


Рис. 6.11. Видоизменение рис. 6.10, дающее алгоритм с нормальной нумерацией входной последовательности, но с двоично-инверсной перестановкой номеров выходной последовательности и коэффициентов.

перенесены вместе с узлами, то направленный граф становится таким, как на рис. 6.11. Для такого варианта графа не нужно, чтобы исходные данные были подвергнуты двоичной инверсной перестановке, однако результи-

рующий спектр оказывается переставленным. Дополнительным неудобством может быть то, что степени у W, необходимых для проведения вычислений, располагаются в двоично-инверсном порядке. Первоначальное описание алгоритма, принадлежащее Кули [7], соответствует направленному графу рис. 6.11.

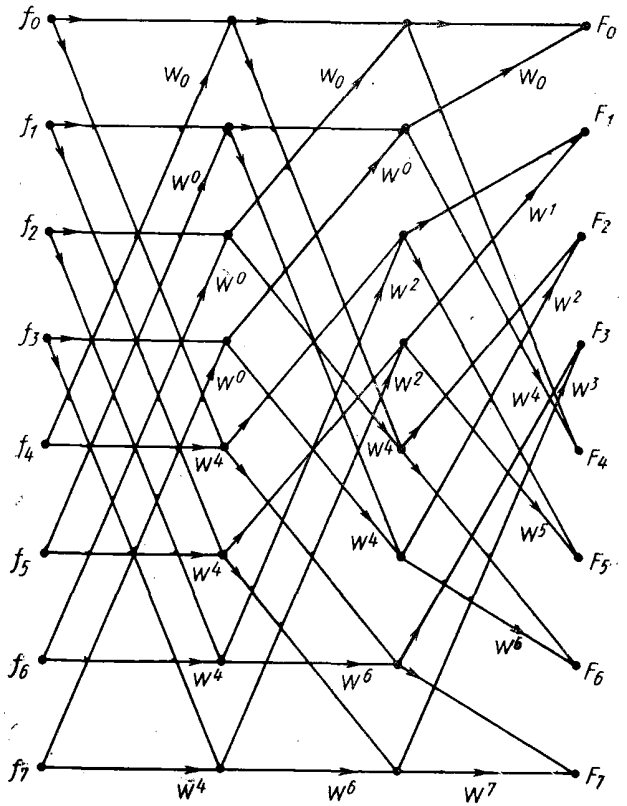


Рис. 6.12. Видоизменение рис. 6.10, которое уничтожает необходимость в двоично-инверсной перестановке, но не допускает вычисления преобразования с замещением.

Несколько более сложное видоизменение рис. 6.10 приводит к сигнальному направленному графу рис. 6.12. В этом случае как входные данные, так и результирующий спектр представлены в «естественном» порядке, и коэффициенты в вычислениях также употребляются

в естественном порядке. Однако вычисления теперь не могут производиться с замещением. Поэтому должен быть предусмотрен по крайней мере еще один дополнительный набор регистров. Этот сигнальный направленный граф и соответствующая ему процедура вычислений разработаны Стокхемом и независимо от него Санди [8].

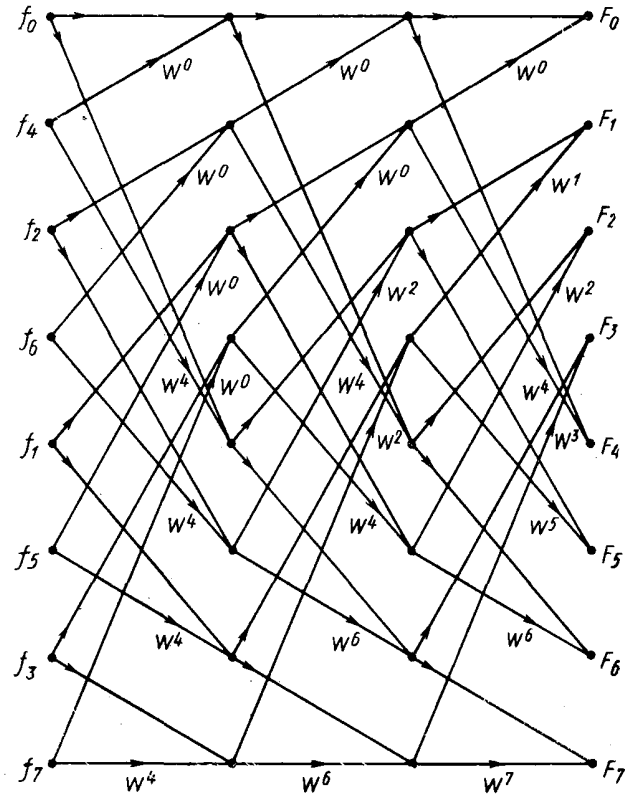


Рис. 6.13. Видоизменение рис. 6.10 с постоянной структурой на всех участках.

Приведенные три формы сигнального направленного графа имеют смысл в том случае, когда данные хранятся в памяти с произвольной выборкой. Иногда данных слишком много, чтобы держать их в памяти одновременно. В этом случае используется вспомогательная память с возможностью последовательной выборки. Остановимся

на видоизменении рис. 6.10, соответствующем алгоритму Синглетона [12]. Структура этого графа от участка к участку остается одной и той же и требует последовательного выбора данных из четырех раздельных массивов. Поэтому для практического применения алгоритма, изображенного на рис. 6.13, необходимы четыре магнитофона или магнитный барабан по крайней мере с четырьмя каналами. Алгоритм требует, чтобы входные данные были представлены в двоично-инверсном порядке, но степени W необходимо располагать в естественном порядке.

До сих пор детально рассматривался только случай, когда N делится на 2. Все, что при этом делалось, может быть обобщено и на случай других делителей, однако алгоритмам при N, не являющимся степенью числа 2, уделялось меньше внимания. Это объясняется двоичной организацией цифровых вычислительных машин и тем, что при таких N и возрастающих количествах входных данных становится все труднее составлять программы. Тем не менее, если N имеет множитель p, можно сформировать p различных последовательностей $g^{(i)}_l$, заданных в виде

$$g^{(i)}_l = f_{pl+i}{}^{*)} \qquad (6.59а)$$

и имеющих N/p точек. Каждая из этих последовательностей имеет ДПФ $G^{(i)}_k$, и ДПФ от f_n может быть вычислено с помощью p более простых ДПФ с pN комплексных умножений и сложений, т. е.

$$F_{k+m\,(N/p)} = \sum_{i=0}^{p-1} G^{(i)}_k W^{i\,[k+m\,(N/p)]}$$

$$\text{для} \begin{cases} m = 0, 1, \ldots, p-1, \\ k = 0, 1, \ldots, N/p-1, \end{cases} \qquad (6.59б)$$

что совпадает с (6.58), если $p=2$. На рис. 6.14,*а* изображен случай, когда $p=3$ и $N=6$, а на рис. 6.14,*б* — случай, когда $p=2$, $N=6$. Если N/p является составным, то вычисления различных $G^{(i)}_k$ могут быть затем снова упрощены.

Общей для рассмотренного выше набора методов является процедура формирования подпоследовательно-

*) Индекс (i) здесь обозначает i-ю последовательность, а не показатель степени.

стей из преобразуемой последовательности, причем каждая подпоследовательность составляется только из каждой p-й точки исходной последовательности. Это можно понимать так, словно подпоследовательности образу-

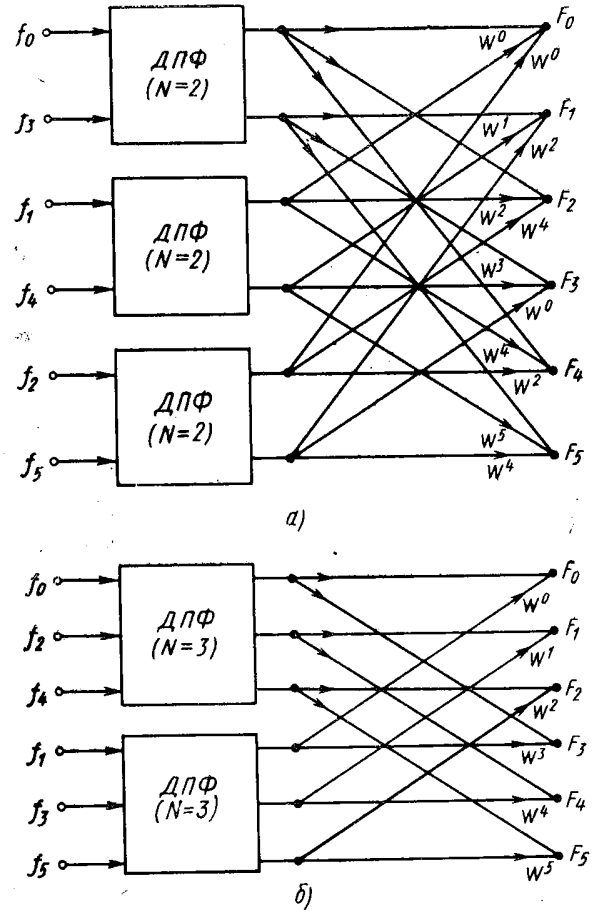


Рис. 6.14. Прореживание по времени:
а) для шеститочечного ДПФ с $p=3$; *б*) для шеститочечного ДПФ с $p=2$.

ются путем дискретизации временной функции с меньшей частотой или путем пропуска $p-1$ отсчетов из каждой группы в p отсчетов; отсюда и происходит название «прореживание по времени».

Прореживание по частоте

Рассмотрим теперь другую, совершенно особую форму алгоритма быстрого преобразования Фурье — прореживание по частоте. Эту форму алгоритма независимо друг от друга нашли Санди, Кули, Стокхем и др. Пусть функция f_l с четным числом точек N разделена на две последовательности по $N/2$ точек каждая, например, g_l и h_l, где g_l образована из первых $N/2$ точек f_l, а h_l образована из последних $N/2$ точек f_l. Формально можно записать

$$\left.\begin{aligned} g_l &= f_l \\ h_l &= f_{l+N/2} \end{aligned}\right\} \text{ для } l=0, 1, \ldots, N/2-1. \qquad (6.60)$$

N-точечное ДПФ, обозначенное F_k, теперь может быть записано в значениях g_l и h_l:

$$F_k = \sum_{l=0}^{N/2-1} (g_l W^{lk} + h_l W^{(l+N/2)k}), \qquad (6.61)$$

$$F_k = \sum_{l=0}^{N/2-1} (g_l + e^{-j\pi k} h_l) W^{lk}. \qquad (6.62)$$

Теперь рассмотрим четные и нечетные отсчеты F_k раздельно (отсюда и название — прореживание по частоте). Заменив в (6.62) k на $2k$, получим

$$F_{2k} = \sum_{l=0}^{N/2-1} (g_l + h_l)(W^2)^{lk}, \qquad (6.63)$$

а заменив в (6.62) k на $2k+1$, получим

$$F_{2k+1} = \sum_{l=0}^{N/2-1} [(g_l - h_l) W^l](W^2)^{lk}. \qquad (6.64)$$

Выражения (6.63) и (6.64) представляют собой $(N/2)$-точечные ДПФ от функций (g_l+h_l) и $(g_l-h_l)W^l$. Таким образом, найден другой путь для того, чтобы выразить вычисления N-точечного ДПФ через результаты двух $(N/2)$-точечных ДПФ. На рис. 6.15 эта редукция показана для $N=8$, а рис. 6.16 и 6.17 показывают, как

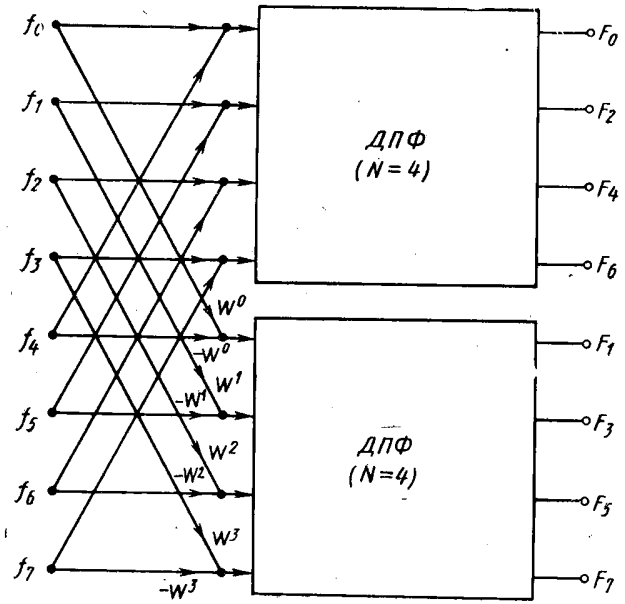


Рис. 6.15. Восьмиточечное ДПФ, сведенное к двум четырехточечным ДПФ с помощью прореживания по частоте.

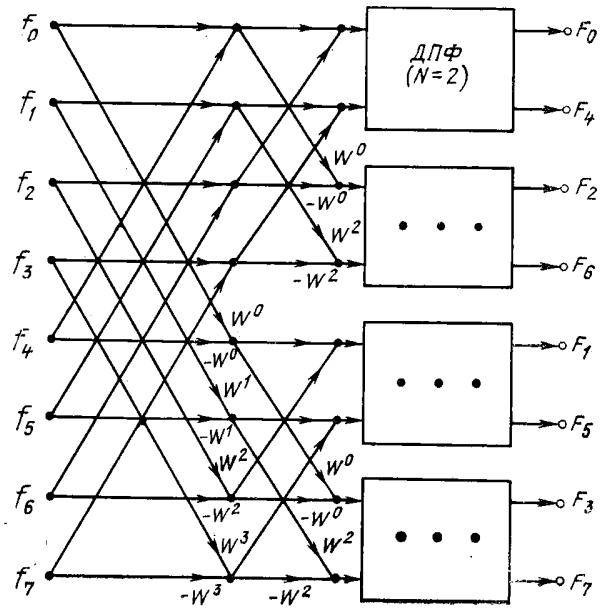


Рис. 6.16. Восьмиточечное ДПФ, редуцированное до четырех двухточечных ДПФ.

выполняются последовательные деления на меньшие ДПФ до тех пор, пока число точек в подпоследовательностях делится на 2. Рис. 6.17 представляет собой диаграмму для вычисления ДПФ в восьми точках, полностью сведенного к комплексному сложению и умножению. Как и прежде, количество вычислений оказывается про-

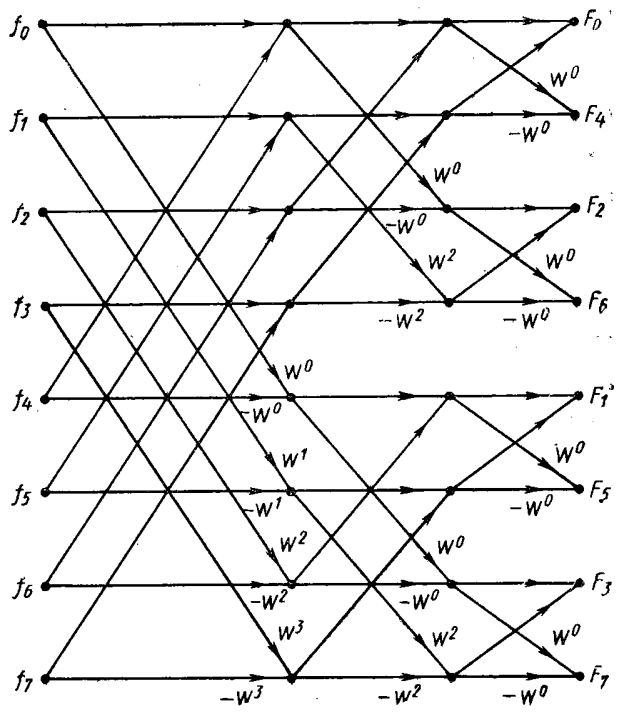


Рис. 6.17. Восьмиточечное ДПФ, полностью сведенное к комплексным умножениям и сложениям путем повторного прореживания по частоте (здесь входные отсчеты следуют в нормальном порядке, так же как и коэффициенты, а выходные отсчеты — в двоично-инверсном порядке).

порциональным $N \log_2 N$. Интересно отметить, что рис. 6.17 имеет тот же вид, что и рис. 6.11, соответствующий случаю прореживания по времени, однако коэффициенты

в обоих графах различны. В случае прореживания по частоте они следуют в естественном порядке. Вычисления опять могут быть произведены с замещением.

Видоизменение рис. 6.17, приведенное на рис. 6.18, имеет тот же вид, что и рис. 6.10, но другие коэффициенты. Более сложная модификация показана на рис. 6.19,

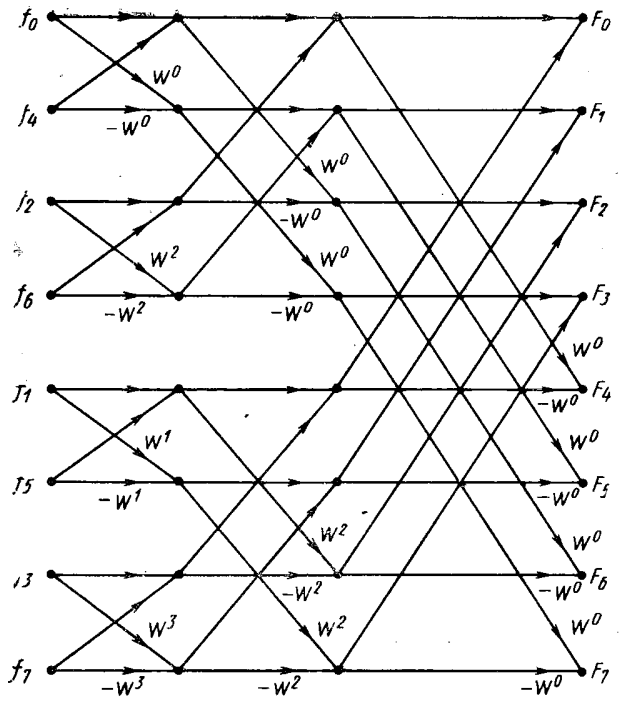


Рис. 6.18. Видоизменение рис. 6.17, для которого входные отсчеты и коэффициенты должны быть представлены в двоично-инверсном, а выходные отсчеты — в нормальном порядке.

который, подобно рис. 6.12, соответствует форме алгоритма, не требующей двоично-инверсной перестановки входного и выходного сигналов или коэффициентов, но в то же время невыполнимой с замещением. Наконец, на рис. 6.20

показана модификация, соответствующая алгоритму, который подходит для памяти с последовательной выборкой, подобно рис. 6.13, но уже с двоично-инверсной перестановкой выходных, а не входных отсчетов.

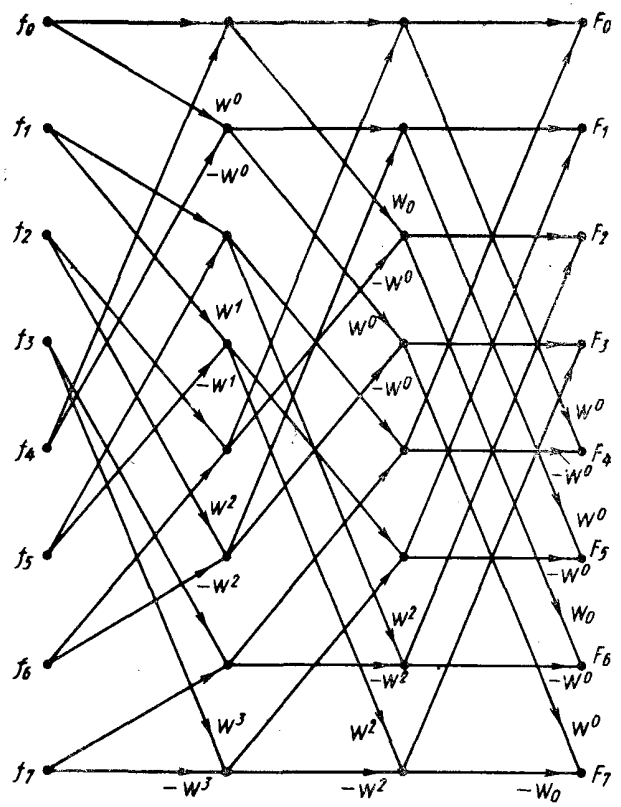


Рис. 6.19. Видоизменение рис. 6.17, при котором не нужна двоично-инверсная перестановка, но вычисления не могут быть сделаны с замещением.

В выражениях (6.59,*а*) и (6.59,*б*) прореживание по времени было обобщено на случай, когда множители N произвольны. Подобное обобщение может быть сделано и для прореживания по частоте. В результате получим

$$F_{pk+r}=H_k^{(r)}, \qquad (6.65а)$$

где

$$h_l^{(r)}=\sum_{i=0}^{p-1} f_{l+iN/p}W^{(l+iN/p)\,r}. \qquad (6.65б)$$

Эти выражения иллюстрируются рис. 6.21,*а* для случая $N=6$, $p=2$ и рис. 6.21,*б* — для случая $N=6$, $p=3$.

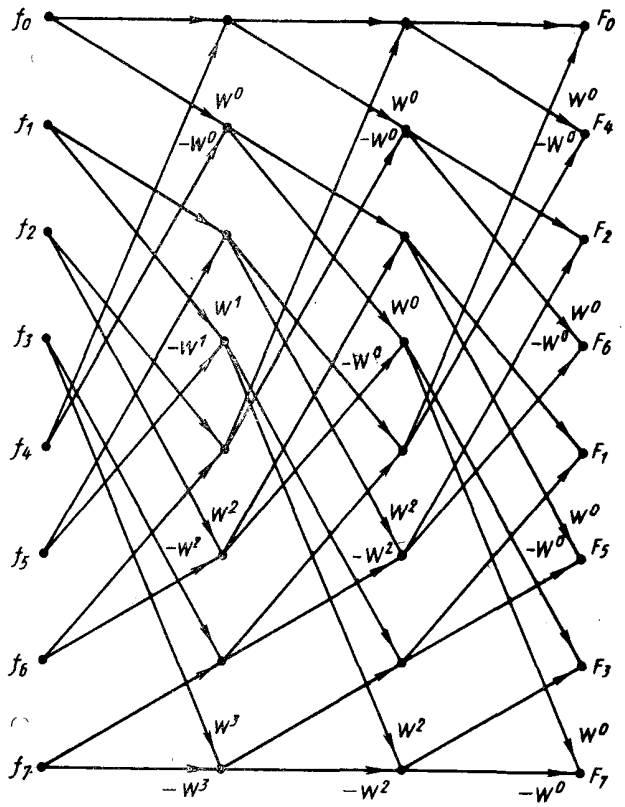


Рис. 6.20. Видоизменение рис. 6.17, при котором сохраняется структура от участка к участку.

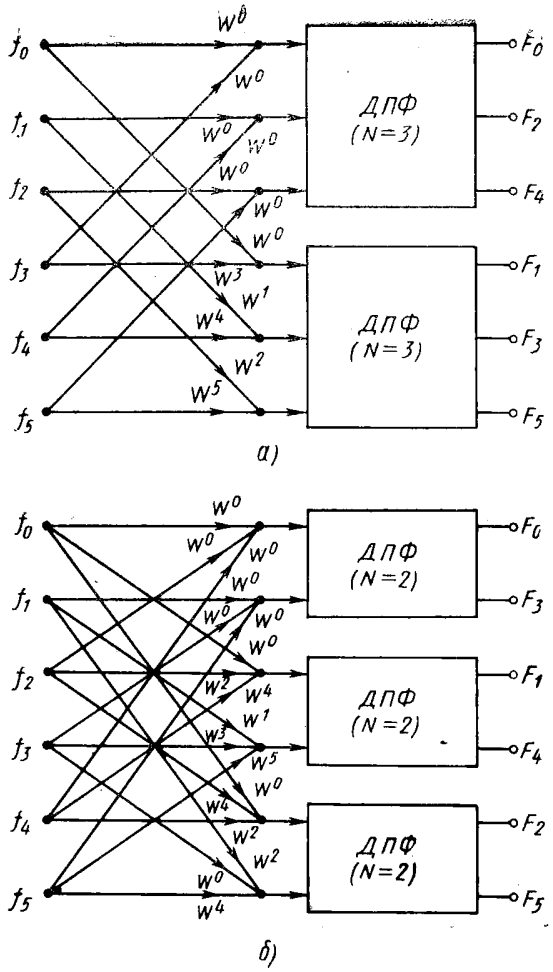


Рис. 6.21. Прореживание по частоте для шеститочечного ДПФ: *а)* $p=2$; *б)* $p=3$.

6.5. СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ВРЕМЕНИ И ПРОРЕЖИВАНИЕМ ПО ЧАСТОТЕ

В § 6.4 прореживание по времени и прореживание по частоте трактовались как независимые, хотя и очень похожие, алгоритмы. Эта точка зрения полезна для программиста или разработчика машины. Однако можно

лучше понять природу алгоритма быстрого преобразования Фурье, применив другую точку зрения, представленную в этом параграфе. Следуя этой точке зрения обычно нельзя получить дополнительную экономию объема вычислительных операций, но можно установить взаимосвязь двух форм алгоритма и предложить в некоторых специальных случаях третью форму.

Прежде подразумевалось, что входной и выходной сигналы при ДПФ есть одномерные последовательности. Предположим, что множителями N являются числа p и q. Можно записать входную последовательность в виде двумерной $p\times q$ таблицы, например:

Таблица 1

f_0	f_1	. . .	f_{q-1}
f_q	. . .	. . .	f_{2q-1}
. . .	. . .	. . .	. . .
$f_{(p-1)q}$	. . .	. . .	f_{N-1}

где элементом общего вида будет f_{l+iq}. Индекс l — это номер элемента внутри строки, а индекс i — внутри столбца. Теперь рассмотрим прореживание по частоте. Перепишем равенства (6.65), подставив q вместо N/p. Тогда получим

$$h_l^{(r)}=\sum_{i=0}^{p-1} f_{l+iq}W^{(l+iq)r}, \qquad F_{pk+r}=H_k^{(r)}. \tag{6.66}$$

Если в первом выражении (6.66) вынести W^{lr} за знак суммы, то $h_l^{(r)}$ примет вид r-й точки ДПФ от l-го столбца таблицы 1. Это есть p-точечное ДПФ, переводящее временной индекс i в частотный индекс r:

$$h_l^{(r)}=W^{lr}\times \underset{\substack{(p\text{-точечное}\\ \text{отображение}\\ i\to r)}}{\text{ДПФ}}\{f_{l+iq}\}. \tag{6.67}$$

В выражении (6.67) предусматривается проведение q отдельных ДПФ из p точек каждое. Расположим результаты в виде другой таблицы:

Таблица 2

$h_0^{(0)}$	$h_1^{(0)}$	. . .	$h_{q-1}^{(0)}$
$h_0^{(1)}$	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .
$h_0^{(p-1)}$	. . .	. . .	$h_{q-1}^{(p-1)}$

Второе равенство (6.66) предполагает вычисление q-точечного ДПФ каждой из p строк таблицы 2:

$$F_{pk+r} = \underset{\substack{(q\text{-точечное}\\ \text{отображение}\\ l\to k)}}{\text{ДПФ}} \{W^{ir} \times \underset{\substack{(p\text{-точечное}\\ \text{отображение}\\ i\to r)}}{\text{ДПФ}} \{f_{l+iq}\}\}. \qquad (6.68)$$

Теперь можно F_{pk+r} записать в виде следующей таблицы:

Таблица 3

F_0	F_p	. . .	$F_{(q-1)p}$
F_1	. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .	. . .
F_{p-1}	. . .	. . .	F_{N-1}

где второе ДПФ перевело индекс l в индекс k.

Таким образом, в основе выражения (6.68) лежит деление входной последовательности на несколько последовательностей, которые располагаются как строки таблицы. После этого вычисляется ДПФ каждого столбца этой таблицы, для того чтобы образовать столбцы второй таблицы, причем элемент r-й строки и l-го столбца умножается на W^{rl}. Наконец, каждая строка этой таблицы преобразуется так, чтобы образовать строки последней таблицы. Столбцы заключительной таблицы, будучи прочтены один за другим, образуют N-точечное ДПФ. Этот процесс проиллюстрирован на рис. 6.22 для случая $p=5$, $q=3$ и 15-точечного ДПФ.

Теперь рассмотрим прореживание по времени, описываемое как

$$F_{k+rq} = \sum_{i=0}^{p-1} G_k^{(i)} W^{i(k+rq)}, \qquad g_i^{(i)} = f_{pl+i}. \qquad (6.69)$$

Если изменить взаимно смысл p и q и поменять местами r и k, i и l, то получим

$$F_{pk+r} = \sum_{l=0}^{q-1} G_r^{(l)} W^{l(r+kp)}, \qquad g_i^{(l)} = f_{l+iq}. \qquad (6.70)$$

Уравнение (6.70) преобразует f_{l+iq} в F_{qk+r} подобно тому, как это делалось в (6.66), однако процессы, выражаемые этими соотношениями, существенно различаются. Правое уравнение (6.70) соответствует такой структуре табл. 1, при которой столбцами являются $g_i^{(l)}$. Однако $G_r^{(l)}$ есть ДПФ от $g_i^{(l)}$. Поэтому первым шагом является формирование некоторой таблицы, столбцы которой являются дискретными преобразованиями Фурье от столбцов табл. 1. Левое уравнение (6.70) предусматривает два шага: умножение таблицы на W^{rl} и вычисление ДПФ от каждой из строк. Заметим при этом, что (6.68) описывает прореживание по времени в такой же мере, как и прореживание по частоте.

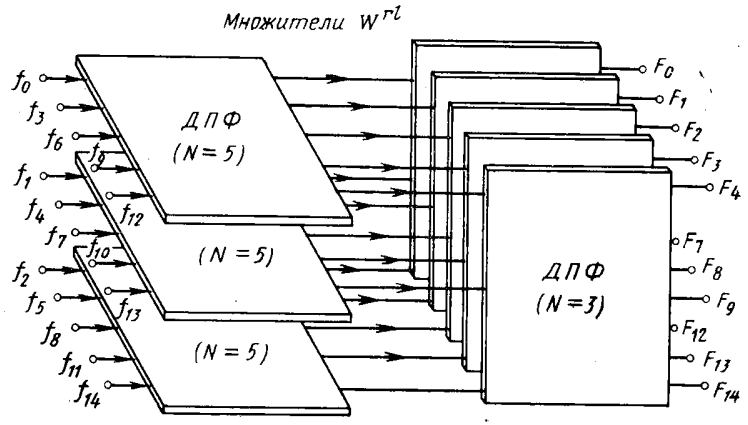


Рис. 6.22. Быстрое преобразование Фурье, изображенное как операция над двумерной таблицей.

Аналогично этому рис. 6.22 иллюстрирует в равной степени оба алгоритма. Единственное различие между этими двумя алгоритмами состоит в том, что множители W^{rl} входят во вторую совокупность ДПФ для прореживания по времени и в первую совокупность ДПФ для прореживания по частоте. Включение множителей W^{rl} в ту или другую совокупность ДПФ означает, что требуется меньше вычислений при прореживании по времени или по частоте по сравнению с прямыми вычислениями ДПФ. Тем не менее рис. 6.22 позволяет лучше оценить соотно-

шение между двумя методами быстрого преобразования Фурье. Множители W^{rl} могут быть названы *«поворачивающими»* множителями (*twiddle factors*) [8].

В некоторых специальных случаях «поворачивающие» множители могут быть исключены с помощью хитрых перестановок во входной и выходной последовательностях [4, 9]. Эти перестановки основаны на теореме кругового смещения и на других теоретических положениях. Предположим, что в табл. 1 каждый столбец подвергается круговому смещению различным образом, причем l-й столбец смещается по кругу на $a \times l$ позиций, где a подлежит определению. Выходные значения первой совокупности ДПФ на рис. 6.22 будут теми же, что и ранее, изменятся только показатели степени у множителей W^q [см. (6.68)], т. е.

$$(W^q)^{-ral} \times \text{ДПФ}\{f_{l+iq}\}.$$

Для того чтобы исключить эффекты от входных круговых смещений, необходимо «поворачивающим» множителям придать значения $W^{rl+qral}$. Теперь предположим, что мы хотим принять в качестве выходных сигналов второй совокупности ДПФ не подпоследовательности $\{F_{pk+r}\}$, а подпоследовательности, соответствующие строкам табл. 3, с элементами r-й строки, смещенными по кругу на $b \times r$ позиций, где b, подобно a, подлежит определению. Теорема кругового смещения имеет обратную теорему, которая гласит, что этот результат может быть достигнут путем умножения входных последовательностей второй совокупности ДПФ на $(W^{-p})^{brl}$, и это умножение может быть также выполнено путем изменения «поворачивающих» множителей. Когда эффекты круговых смещений входной и выходной последовательностей учтены в «поворачивающих» множителях, результирующий «поворачивающий» множитель будет равен $W^{rl+qral-prbl}$. Очевидно, что этот сложный коэффициент может быть исключен, если он всегда будет равен единице, т. е. если

$$bp - aq = 1. \qquad (6.71)$$

Если p и q имеют общие множители, (6.71) не может быть решено для любых целых чисел a, b. Однако если p и q являются взаимно простыми числами, то можно найти целые a, b, которые удовлетворяют (6.71), т. е. определяют такие круговые смещения входной и выходной последовательностей, которые позволяют обходиться без «поворачивающих» множителей. Этот алгоритм иногда применяется в том случае, когда число точек преобразования является степенью 10 и когда могут быть эффективно объединены простые алгоритмы для чисел точек в виде степени 2 и степени 5.

Подводя итоги, отметим, что существуют различные методы уменьшения количества вычислений, требуемых для N-точечного дискретного преобразования Фурье. Двумя основными методами являются: прореживание по времени, когда вычисляются преобразования более коротких последовательностей, составленных из каждого r-го отсчета, и затем эти преобразования объединяются в одно большое преобразование; и прореживание по частоте, при котором короткие куски последовательности комбинируются r способами, чтобы сформировать r коротких последовательностей, у которых отдельные преобразования, взятые вместе, образуют полное преобразование. Если N имеет более чем два множителя, вычисление преобразований, которое требуется осуществить после прореживания, может быть еще более упрощено посредством новых прореживаний по времени или по частоте.

Если последовательность входных точек для осуществления преобразования подвергается круговому смещению, то выходные точки умножаются только на определенные степени W. Если же входные точки для осуществления преобразования умножаются на определенные степени W, то последовательность выходных точек только смещается по кругу. Эти обстоятельства допускают существование и других вариантов основных алгоритмов быстрого преобразования Фурье. Полученные в результате направленные графы могут видоизменяться различным образом для упрощения или, по крайней мере, прояснения задач, связанных с программированием вычислительной машины для вычисления быстрых преобразований Фурье.

Поскольку обратное дискретное преобразование Фурье описывается уравнением, совершенно идентичным уравнению (6.11), любой метод вычисления ДПФ может быть легко модифицирован для вычисления обратного ДПФ. Особенность состоит лишь в том, что W заменяется на W^* (сопряженное W), а результат вычислений умножается на $1/N$.

6.6. ПРИМЕНЕНИЕ АЛГОРИТМОВ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Благодаря возросшей скорости, с которой можно вычислять дискретные преобразования Фурье, растет число их применений. В этом параграфе будут очень кратко рассмотрены некоторые применения быстрого преобразования Фурье и высказаны соображения, которые надо иметь в виду при этих применениях *). Прежде всего остановимся на некоторых общих вопросах, связанных с программированием и применением быстрого преобразования Фурье. Одним из интересующих нас вопросов является точность. Несмотря на то, что это еще далеко не решенный вопрос, различные авторы сообщают о значительном увеличении точности **), когда быстрый метод сравнивается с медленным методом, использующим арифметику с плавающей запятой. Это увеличение следует отнести за счет последовательности вычислений, используемой в быстром методе [5, 8].

Большое возрастание скорости в быстром методе по сравнению со всеми прежними «хитрыми» методами основано на использовании периодичности синусоидальных и косинусоидальных функций. Прежние методы использовали лишь симметричность этих функций. В методах быстрого преобразования Фурье можно получить еще больше экономии, воспользовавшись этой симметрией даже после того, как периодичность уже использована. Поэтому умножения на W^0 и $W^{N/2}$ могут быть исключены из основного контура программы, так как они не требуют проведения умножений на вычислительной машине (которые обычно проводятся медленнее, чем сложения). Это же справедливо и в отношении умножений на $W^{N/4}$ и $W^{3N/4}$. Даже умножение на $W^{N/8}$ и на W в других степенях, соответствующих углам 45° к действительной и мнимой осям, выгодно устранить из основного контура программы потому, что

$$(x+jy)\times(0{,}707+j0{,}707)=0{,}707(x-y)+j0{,}707(x+y)$$

*) Если это не оговаривается особо, то предполагается алгоритм, применяемый для 2^n точек.

**) Часто измерения точности программ быстрого преобразования Фурье основываются на применении дискретного аналога теоремы Парсеваля: «Сумма квадратов амплитуд входов и сумма квадратов амплитуд выходов ДПФ относятся как 1 к N».

и требует только двух умножений, а не четырех. Такие приемы уменьшают число умножений, требуемых при вычислениях, приблизительно в $(\log N-3)/\log N$ раз, что существенно в случае, когда $\log N$ меньше чем 15.

Некоторые программисты нашли, что алгоритм, основанный на степенях 4, 8 и даже 16, во многом так же прост, как и алгоритм с основанием 2, и у него эти выигрыши в вычислениях могут накапливаться во многих частях направленного графа. Например, если N есть четная степень 2, то для алгоритма с основанием 4 требуется на 25 процентов меньше комплексных умножений, чем для алгоритма с основанием 2 [1].

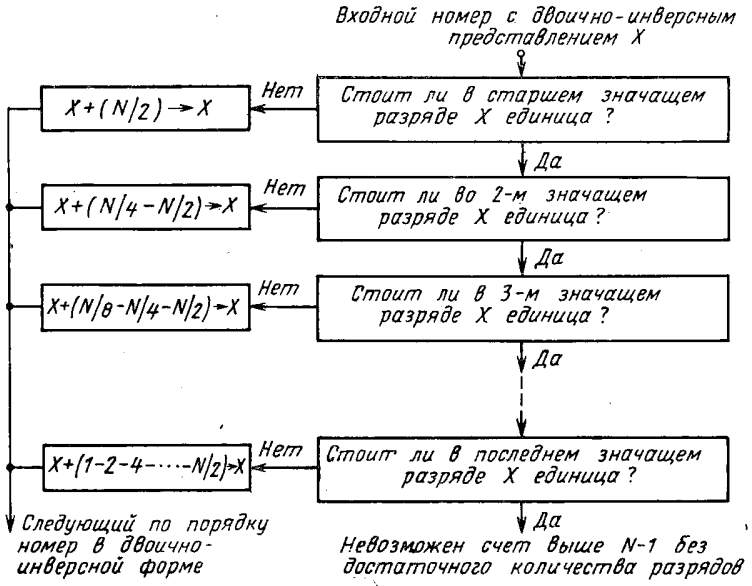


Рис. 6.23. Блок-схема программы двоично-инвертирующего счетчика.

Другим общим вопросом является осуществление двоично-инверсной перестановки на универсальной вычислительной машине. Для некоторых применений, как будет показано дальше, нет необходимости в двоично-инверсной перестановке. Даже когда это необходимо, всегда достаточно просто производить счет в двоично-инверсном порядке, например:

0, 8, 4, 12, 2, 10, 6, 14, 1, 9, 5, 13, 3, 11, 7, 15

для 16-точечного преобразования. Двоично-инверсный счетчик легче осуществить на типовой вычислительной машине, чем двоичное инвертирование произвольного числа. Рассмотрим блок-схему последовательности операций такого счетчика, изображенную на рис. 6.23. Сначала подвергается проверке старший значащий разряд двоично-инверсной формы X текущего номера. Он является самым младшим значащим разрядом в двоичном представлении этого номера. Если это нуль, то он переходит в единицу, число подается на выход и операция заканчивается. Если два старших разряда в X есть 10, то они переходят в 01, число подается на выход и на этом операция опять заканчивается и т. д.

Каждый раз на выходе образуется следующий по порядку номер, но в двоично-инверсной форме. Можно подсчитать, что половина этих номеров образуется с помощью двух операций, четверть — с помощью трех операций, одна восьмая часть — с помощью четырех операций и т. д. Среднее количество операций для перехода к следующему номеру поэтому будет равно

$$2\left(\frac{1}{2}\right)+3\left(\frac{1}{4}\right)+4\left(\frac{1}{8}\right)+5\left(\frac{1}{16}\right)+\ldots,$$

что в пределе сходится к трем и будет меньше трех для любого конечного числа разрядов в счетчике. Нет необходимости указывать на то, что двоично-инверсный счетчик не может считать больше, чем до номера $N-1$, в то время как обычный счетчик может работать и дальше.

Среди специальных применений быстрого преобразования Фурье наиболее естественным применением является оценка спектра мощности. Это обсуждалось в гл. 4, и нет нужды детально рассматривать этот аспект здесь, достаточно лишь указать на то, что основные операции автокорреляции и преобразования Фурье упрощаются с помощью алгоритма [5, 13]. Использование быстрого преобразования Фурье для вычисления корреляций и сверток также имеет крайне важное значение и изложено в гл. 7. В этом случае необходимо вычислять прямое и обратное преобразования, и можно применять как алгоритм преобразования, который дает двоично-инвертированное представление выходных последовательностей, так и алгоритм для обратного преобразования, допускающий двоично-инвертированное представление входных последовательностей. Таким путем можно полностью избежать двоично-зеркальной перестановки.

Часто требуется производить много преобразований в различных целях, как, например, при обработке непрерывного потока данных. Если эти данные являются действительными числами, то некоторые преимущества дает вычисление двух преобразований в одно и то же время. Допустим, что x и y — действительные функции. Образуем функцию $z=x+jy$ с преобразованием $Z=X+jY$. Тогда

$$Z=\operatorname{Re}X+j\operatorname{Im}X+j(\operatorname{Re}Y+j\operatorname{Im}Y)=$$
$$=(\operatorname{Re}X-\operatorname{Im}Y)+j(\operatorname{Im}X+\operatorname{Re}Y). \qquad (6.72)$$

Таким образом, действительная часть Z имеет четную часть, равную $\operatorname{Re}X$, и нечетную часть, равную $-\operatorname{Im}Y$, а мнимая часть Z имеет четную часть, равную $\operatorname{Re}Y$, и нечетную часть, равную $\operatorname{Im}X$. Но четная и нечетная части функции могут быть разделены при помощи N сложений и вычитаний; это очень малые дополнительные издержки за осуществление двух преобразований по сравнению с издержками за проведение одного преобразования. В некоторых применениях, как будет показано в гл. 7, обходятся даже без этих издержек. Если задача включает только одну действительную функцию, подлежащую преобразованию, то по-прежнему может быть использована четно-нечетная симметрия. Для этого последовательности точек исходной функции с четными и нечетными номерами принимаются за действительную и мнимую части искусственной $N/2$-точечной функции, которая затем подвергается преобразованию. Тогда два преобразования укороченных действительных функций могут быть разделены, как в (6.72), и использованы, как на рис. 6.8, для вычисления полного преобразования.

В некоторых применениях нет необходимости вычислять все точки преобразования. Тогда может быть достигнута некоторая дополнительная экономия за счет «подрезания» направленных сигнальных графов, которые могут быть составлены, но эта экономия очень невелика.

Интересное применение находит быстрое преобразование Фурье при интерполяции. Задача состоит в нахождении значений точек на кривой между уже известными точками. В случае аналоговой ограниченной по полосе функции, дискретизованной при $t=nT$, где $1/T$ превосходит частоту Найквиста, функция точно задается как

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT)\frac{\sin[(\pi/T)(t-nT)]}{(\pi/T)(t-nT)}. \qquad (6.73)$$

Это выражение требует бесконечного множества вычислений для каждой точки на кривой $f(t)$, но так как $\sin x/x$ быстро спадает, то возможна аппроксимация $f(t)$ некоторой конечной суммой. Теперь предположим, что известно только N точек функции. Функция, которая равна нулю вне интервала от 0 до NT, не может быть ограниченной по полосе. Следовательно, строгая ограниченная по полосе интерполяция в этом случае невозможна. Допустим поэтому, что известные N точек представляют один период периодической, ограниченной по полосе функции. Тогда можно оценить функцию в r раз большем количестве точек (где r не обязательно должно быть целым числом), вычислив N-точечное ДПФ и поместив $(r-1)N$ нулей в середину последовательности $F(k\Omega)$. Обратное преобразование тогда будет иметь rN точек, соответствующих интерполяции периодической функции с ограниченной полосой. Это иллюстрируется рис. 6.24.

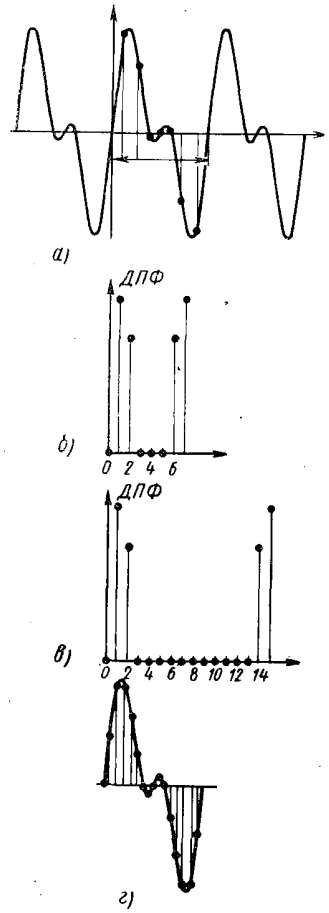


Рис. 6.24. Интерполяция функции с ограниченной полосой с помощью ДПФ:

а) функция, заданная отсчетами; б) ее ДПФ; в) модифицированное ДПФ; г) интерполированная функция.

6.7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Введено ДПФ и определены его свойства по аналогии со свойствами непрерывного преобразования Фурье. Свойства ДПФ формулируются независимо и строго и не должны рассматриваться как приближения к свойствам непрерывного преобразования Фурье. После исследования двух обычных алгоритмов для вычисления ДПФ введено быстрое преобразование Фурье, которое требует еще меньше вычислительного времени, чем эти обычные методы. Для числа точек данных, выражаемого степенью числа 2, существует два основных алгоритма: прореживание по времени и прореживание по частоте. Каждый алгоритм имеет множество вариантов в зависимости от данных, содержащихся в памяти до, в течение и после вычислений. Алгоритмы вычисления спектра, использующие ту же память, в которую записаны входные данные, требуют перестановки входных отсчетов, выходных отсчетов или потребных констант, а исключение этих перестановок требует дополнительной памяти для вычисления.

Быстрое преобразование Фурье сделало практичным вычисление дискретных преобразований Фурье; это придало, в свою очередь, практический смысл некоторым свойствам ДПФ. К моменту написания этой книги, вероятно, не все возможные применения дискретных преобразований Фурье были вскрыты. Однако, как будет видно из следующих двух глав, область цифровой обработки сигналов существенно обогатилась благодаря достоинствам алгоритма БПФ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bergland G. D., A Fast Fourier Transform Algorithm Using Base Eight Iterations, Math. Comput., 1968, April, v. 22, p. 275—279.
2. Brenner N. M., Three Fortran Programs That Perform the Cooley-Tukey Fourier Transform, Mass Inst. Technol., Lincoln Lab. TN-1967-2, 1967, 28 July.
3. Кокрен, Кули и др. «Что такое «быстрое преобразование Фурье», ТИИЭИР, 1967, № 10, стр. 7—17.
4. Кули, Льюис и др., «Исторические замечания относительно быстрого преобразования Фурье», ТИИЭИР, 1967, № 10, стр. 18—21.
5. Cooley J. W., Lewis P., Welch P. «The Fast Fourier Transform and Its Applications», IBM Res. Paper RC-1748, 1967, 9, Feb.
6. Cooley J. W., Lewis P., Welch P., «Application of the Fast Fourier Transform to Computation of Fourier Integrals, Fourier Series, and Convolution Integrals, IEEE Trans. Audio, 1967, June, v. 15(2), p. 79—84.
7. Cooley J. W., Tukey J. W., «An Algorithm for the Machine Computation of Complex Fourier Series», Math. Comput., 1965, April, v. 19, p. 297—301.
8. Gentleman W. M., Sande G., «Fast Fourier Transform — For Fun and Profit», presented at 1966 Fall Joint Computer Conference, AFIPS Proc., 1966, v. 29, p. 563—578.
9. Good I. J. «The Interaction Algorithm and Practical Fourier Series», J. Roy. Statist. Soc. Ser. B., 1958, v. 20, p. 361—372, Addendum, 1960, v. 22, p. 372—375.
10. Helms H. D. Fast Fourier Transform Method of Computing Difference Equations and Simulating Filters, IEEE Trans., Audio, 1967, June, v. 15(2), p. 85—90.
11. Rudnick P., Note on the Calculation of Fourier Series, Math. Comput., 1966, July, v. 20, p. 429—430.
12. Singleton R. C., A Method for Computing the Fast Fourier Transform with Auxiliary Memory and Limited High Speed Storage, IEEE Trans. Audio, 1967, June, v. 15(2), p. 91—98.
13. Stockham, High Speed Convolution and Correlation, presented at 1966 Spring Joint Computer Conference, AFIPS Proc., 1966, v. 28, p. 229—233.

Глава седьмая

ВЫСОКОСКОРОСТНАЯ СВЕРТКА И КОРРЕЛЯЦИЯ С ПРИЛОЖЕНИЯМИ К ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

7.1. ВВЕДЕНИЕ

Изложенное в настоящей главе имеет целью привлечь внимание к новому методу суммирования произведений последовательностей, сдвинутых друг относительно друга (*lagged products*), позволяющему получить экономию времени вычисления [5, 6, 8, 14]. Эта экономия может быть очень большой потому, что коэффициент убыстрения для сдвигов, охватывающих N произведений, пропорционален $N/\log N$. При вычислениях часто возникает потребность в суммировании произведений сдвинутых последовательностей, которому присваивают те или иные названия; поэтому описываемый метод имеет важное значение.

Помимо очевидных экономических соображений, повышение скорости выгодно и в том отношении, что делает применимыми к более широкому классу проблем взаимодействующие программы и тем самым представляет удобный случай для проведения исследований, считавшихся прежде слишком обременительными.

Суммирование произведений сдвинутых последовательностей обычно требуется в задачах, включающих в себя свертку или корреляцию. Такие задачи наиболее часто встречаются с электротехнике, статистике, оптике и других областях физики. В качестве некоторых примеров можно привести фильтрацию сигналов, спектральный анализ, преобразование изображений и задачи, связанные с теорией поля (акустика, распространение волн, электричество и магнетизм). Эта глава касается в основном первых двух задач.

Методы, описанные в этой главе, основываются на применении алгоритма быстрого преобразования Фурье (БПФ), рассмотренного в гл. 6. Без БПФ они не могли бы существовать. При их открытии рассуждения были примерно такими.

Поскольку перемножение преобразований Фурье соответствует свертке преобразуемых функций, то процесс свертки можно заменить тремя преобразованиями Фурье

и умножением. Если преобразования могут быть выполнены быстрее, чем сама свертка, то такая замена имеет практическую, а также теоретическую ценность. Так как БПФ требует времени пропорционально $N \log N$, а свертка требует времени пропорционально N^2, то нетрудно видеть, что для достаточно больших N всегда достигается экономия, которая, начиная с этих N, быстро растет *).

От свертки к корреляции перейти очень просто путем замены переменных, которая сводится к изменению знака независимой переменной у одной из функций.

Последующие попытки перевести эти рассуждения в ряд специфических алгоритмов столкнулись с весьма значительными трудностями, которые не были очевидны с самого начала. Эти трудности выражаются в том, что БПФ применяется только к дискретному преобразованию Фурье (ДПФ) и что умножение двух ДПФ соответствует свертке периодических, а не апериодических функций. Свертка периодических функций может быть по-другому истолкована как круговая свертка, в которой значения перемещаемого ядра циркулируют от одного конца периода к другому, внося таким образом то, что может быть названо междупериодной интерференцией.

Эту трудность можно преодолеть, если найти способ заставить периодическую свертку давать такой же численный результат, как и апериодическая свертка. Это сделано путем прибавления к каждому периоду обеих функций нулевых значений, для того чтобы создать нечто вроде «разделительной полосы», на протяжении которой межпериодная интерференция считается имеющей нулевое значение. Эта разделительная полоса может быть сделана больше или меньше в зависимости от того, какая часть периодической свертки переводится в *апериодический эквивалент*. Имея в виду эти идеи, нетрудно рассмотреть в деталях способы выполнения высокоскоростной свертки и высокоскоростной корреляции. Помимо них существуют некоторые другие подходы к решению проблемы, которые, однако, не приведены здесь ради ясности изложения.

---

*) Эмпирически установлено [14], что этот переход происходит при N, близком к 28.

7.2. ПРОИЗВЕДЕНИЕ ДИСКРЕТНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ФУРЬЕ. ПЕРИОДИЧЕСКАЯ СВЕРТКА

В § 6.2 было показано, что произведение двух ДПФ

$$V(k\Omega)=X(k\Omega)\,Y(k\Omega), \tag{7.1}$$

является ДПФ последовательности, которая была названа круговой или периодической сверткой $x(nT)$ и $y(nT)$,

$$v(mT)=\sum_{n=0}^{N-1} x(nT)\,y(((m-n))T)=$$
$$=\sum_{n=0}^{N-1} x(((m-n))T)\,y(nT). \tag{7.2}$$

Время, требуемое для вычисления $v(mT)$ по тому или другому выражению (7.2), равно

$$T_{\text{круг}}=k_{\text{круг}}N^2, \tag{7.3}$$

где $k_{\text{круг}}$ — коэффициент пропорциональности, равный времени, необходимому для нахождения двух отсчетов, перемножения их и сложения для образования частичной суммы. Однако напомним, что ДПФ от $x(nT)$ и $y(nT)$, а также обратное ДПФ произведения могут быть вычислены за время, пропорциональное $N\log N$, т. е.

$$T_{\text{бпф}}=k_{\text{бпф}}N\log_2 N, \tag{7.4}$$

где $k_{\text{бпф}}$ — коэффициент пропорциональности. Поэтому, если вычислить $X(k\Omega)$ и $Y(k\Omega)$, используя БПФ, перемножить их для получения $V(k\Omega)$ и затем оценить $v(mT)$, используя обратное БПФ, то общее требуемое время составит

$$T_{\text{бпс}}=3k_{\text{бпф}}N\log_2 N+k_mN=$$
$$=3k_{\text{бпф}}N(\log_2 N+\lambda_m), \tag{7.5}$$

где k_mN есть время, требуемое для вычисления (7.1) и $\lambda_m=k_m/3k_{\text{бпф}}$. При этом предполагается, что N выражается как степень числа 2. Подобная экономия может быть достигнута во всех случаях, когда N может быть разложено на большое количество множителей *).

*) Читатель не должен думать, что периодическая свертка не может быть вычислена с использованием методов высокоскоростной свертки, когда период N не является составным числом. Это возможно, однако, не столь прямым способом, как излагалось до сих пор.

В некоторых практических задачах требуется вычислять круговые свертки. Однако в большинстве случаев при перемещении ядра его значения, которые выдвигаются за пределы интервала суммирования с одного конца, не вдвигаются в этот интервал с другого конца, поэтому в таких задачах требуется выполнение *апериодической* свертки или корреляции.

7.3. АПЕРИОДИЧЕСКАЯ СВЕРТКА

Периодическая свертка может использоваться определенным образом и для вычисления апериодической свертки при условии, что каждая апериодическая последовательность имеет нулевую амплитуду вне некоторого единственного и конечного интервала *). Пара апериоди-

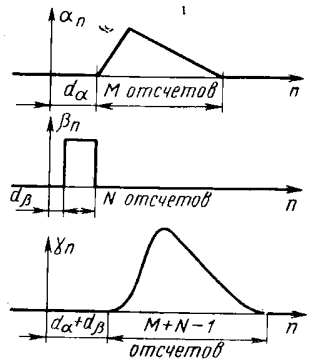


Рис. 7.1. Апериодические последовательности α_n и β_n конечной длительности и их апериодическая свертка γ_n.

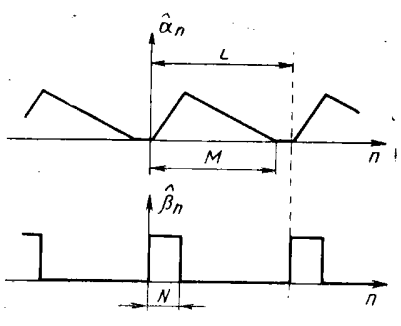


Рис. 7.2. Периодические последовательности $\hat{\alpha}_n$ и $\hat{\beta}_n$, полученные из α_n и β_n.

ческих функций α_n и β_n, удовлетворяющих этим условиям, показана на рис. 7.1. На нем также показана γ_n — результат апериодической свертки α_n и β_n.

γ_n может быть получена полностью или частично из результата свертывания подходящих периодических последовательностей, порожденных α_n и β_n, т. е. круговой свертки соответственно сформированных последовательностей $\hat{\alpha}_n$ и $\hat{\beta}_n$, показанных на рис. 7.2. Эти порожденные

*) Конечно, некоторое количество нулевых значений может быть и внутри интервала.

последовательности образуются без учета начальных задержек d_α и d_β, путем повторения апериодических функций α_n и β_n с периодом L, достаточно большим для исключения любого перекрытия.

Рис. 7.3 изображает $\hat{\gamma}_n$ — периодическую свертку $\hat{\alpha}_n$ и $\hat{\beta}_n$. Свертка $\hat{\gamma}_n$ может быть также образована без учета начальной задержки d_γ, путем повторения ее с периодом

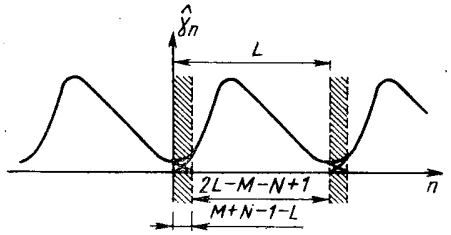


Рис. 7.3. Периодическая свертка $\hat{\alpha}_n$ и $\hat{\beta}_n$, содержащая интервалы с интерференцией и без интерференции.

L и суммирования значений внутри интервалов интерференции. Вне этих интервалов интерференции $\hat{\gamma}_n$ есть точная копия искомого γ_n. Если L сделать достаточно большим, так, чтобы $L \geqslant M+N-1$, то интервалов интерференции не будет. Таким образом, видно, что γ_n может быть получена полностью или частично путем выделения периода $\hat{\gamma}_n$, начиная с $n=0$, свига его на начальную задержку $d_\alpha+d_\beta$ и пренебрежения его частями, соответствующими интервалу интерференции.

Для того чтобы использовать БПФ для вычисления $\hat{\gamma}_n$, величина L должна быть выбрана как степень числа 2. Существуют только две возможности выбора для L, имеющие смысл. Если $M \geqslant N$, как на рис. 7.2 и 7.3, то наименьшее допустимое значение L будет 2^ν, такое, что

$$2^{\nu-1} < M \leqslant 2^\nu. \tag{7.6}$$

В случае, который также возможен,

$$M+N-1 \leqslant 2^\nu, \tag{7.7}$$

такое наименьшее значение автоматически исключает существование интервалов интерференции. Если, однако,

$$M+N-1 > 2^\nu. \tag{7.8}$$

то интервалы интерференции будут существовать, при L не равном $2^{\nu+1}$. Значения L больше этих никогда не требуются. В обоих случаях

$$M \leqslant L \leqslant 2(M+N-2), \tag{7.9}$$

и время $T_{\text{бас}}$, требуемое для вычисления быстрой апериодической свертки, лежит в пределах

$$T_{\text{бас}} \geqslant 3k_{\text{бпф}} M(\log_2 M+\lambda_m),$$
$$T_{\text{бас}} \leqslant 6k_{\text{бпф}}(M+N-2)[\log_2(M+N-2)+\lambda_m+1], \tag{7.10}$$

независимо от того, какие значения могут принимать M и N.

7.4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТИ АПЕРИОДИЧЕСКОЙ СВЕРТКИ И СЕКЦИОНИРОВАНИЕ

Часто, особенно в тех случаях, когда M существенно больше чем N, представляет интерес только относительно небольшой сегмент апериодической свертки γ_n, включающий в себя ряд смежных точек. В этом случае не имеет смысла вычисление всех значений γ_n только для того, чтобы затем отбросить большинство из них *).

Если допустить, что в γ_n представляет интерес только сегмент, содержащий S отсчетов, начиная с точки $n=n_0$, то можно получить их более эффективно путем выделения сегмента у α_n, содержащего $S+N-1$ отсчетов, начиная с точки $n=n_0-N+1$, и использования его для формирования сокращенного α_n с новым, меньшим M, удовлетворяющим условию

$$M=S+N-1. \tag{7.11}$$

Полученная таким образом $\hat{\gamma}_n$ содержит искомую часть апериодической свертки. Ее составляют значения от $\hat{\gamma}_{N-1}$ до $\hat{\gamma}_{S+N-2}$ включительно, численно соответствующие

*) Типичный пример такой ситуации наблюдается при вычислении функции автокорреляции для оценки спектра мощности.

значениям от γ_{n_0} до γ_{n_0+S-1} включительно. В этом случае существует единственно возможное значение L, такое, что

$$S+N-1 \leqslant L \leqslant 2(S+N-2). \qquad (7.12)$$

Поэтому время $T_{\text{чбас}}$, требуемое для вычисления части быстрой апериодической свертки, равно

$$T_{\text{чбас}} \geqslant 3k_{\text{бпф}}(S+N-1)[\log_2(S+N-1)+\lambda_m],$$
$$T_{\text{чбас}} \leqslant 6k_{\text{бпф}}(S+N-2)[\log_2(S+N-2)+\lambda_m+1]. \qquad (7.13)$$

Процесс свертки находит свое наиболее общее применение при фильтрации сигналов. При таком применении обычно M очень велико, возможно, бесконечно велико, поскольку α_n представляет собой сигнал типа речи, сейсмических толчков или, возможно, даже телевизионного изображения Марса. В стационарной установке, где сигнал должен быть отфильтрован в том виде, в каком он генерировался, M должно считаться бесконечно большим. Если α_n воспроизводится со скоростью 1 000 отсчетов в секунду, то за один год непрерывной обработки будет получено $M \approx 10^{10}$ отсчетов.

Попытка использовать методы, описанные до сих пор, для осуществления фильтрации сигнала может быть затруднена двумя важными обстоятельствами. Во-первых, никакая память вычислительной машины не будет достаточной для того, чтобы оперировать с $\hat{\alpha}_n$ и $\hat{\beta}_n$. Во-вторых, результаты будут выдаваться с громадной задержкой, так как они могут быть получены только после того, как станет известен последний отсчет α_n. Обе эти трудности могут быть уменьшены с помощью секционирования. Еще одно преимущество, которое может быть получено как побочный продукт при секционировании, заключается в дополнительной экономии времени по сравнению со временем, подсчитанным по выражению (7.10).

Секционирование может быть выполнено двумя способами. Первый способ, основанный на тех же принципах, что и определение части апериодической свертки, рассмотренное выше, называется методом перекрытия *с накоплением (overlap-save method)*. Второй способ называется методом перекрытия *с суммированием (overlap-add method)* [14].

При методе перекрытия с накоплением предполагается, что результат γ_n разделен на части, каждая из которых содержит P отсчетов, причем $P+N-1=L$ (L является степенью числа 2). При этом будет K полных частей, где

$$K = \text{наибольшее целое} \leqslant \frac{M+N-1}{P}, \qquad (7.14)$$

и, вероятнее всего, одна неполная часть длиной P_r, где

$$P_r = M+N-1-PK. \qquad (7.15)$$

Каждая часть γ_n формируется поочередно с помощью методов получения части апериодической свертки *). Требуемое время будет составлять

$$T_{\text{секц}} \leqslant [1+2(K+1)]k_{\text{бпф}}(P+N-1)[\log_2(P+N-1)]+$$
$$+(K+1)k_{\text{доп}}(P+N-1) \approx$$
$$\approx (2K+3)k_{\text{бпф}}(P+N-1)[\log_2(P+N-1)+\lambda_{\text{доп}}], \qquad (7.16)$$

где $k_{\text{доп}}(P+N-1)$ есть время, требуемое для образования сокращенного $\hat{\alpha}_n$ из α_n, для вычисления (7.1) и для выделения части γ_n из $\hat{\gamma}_n$. Величина $\lambda_{\text{доп}}$ есть $k_{\text{доп}}/2k_{\text{бпф}}$.

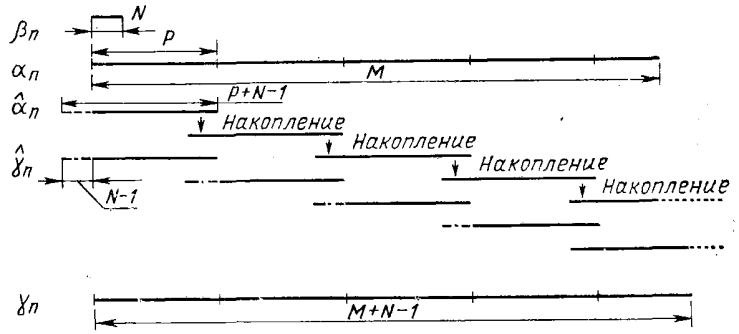


Рис. 7.4. Метод перекрытия с накоплением для высокоскоростной свертки, когда длительности α_n и β_n значительно отличаются.

Метод перекрытия с накоплением назван так потому, что каждое сокращенное $\hat{\alpha}_n$ представляет секцию α_n, которая перекрывается с соседней на протяжении $N-1$

*) Следует заметить, что ДПФ от β_n, предполагаемого более короткой последовательностью, должно быть вычислено только один раз и применено к каждой из секций α_n.

отсчетов. Каждое новое $\hat{\alpha}_n$ может быть образовано соединением P новых входных отсчетов с $N-1$ прежними входными отсчетами, накопленными за счет перекрытия. Эта ситуация изображена на рис. 7.4. Отметим, что накопленные отсчеты располагаются в конце прежней последовательности $\hat{\alpha}_n$ и в начале новой. $N-1$ отсчетов в начале каждого $\hat{\gamma}_n$ не имеют смысла, так как они соответствуют интервалам интерференции. Они отбрасываются при образовании γ_n.

Метод перекрытия с суммированием для выполнения секционированной свертки по существу такой же, как и метод перекрытия с накоплением, за исключением того, что α_n делится на части, а γ_n перекрывается. Секции α_n опять состоят из P отсчетов, а L остается неизменным. На этот раз, однако,

$$K = \text{наибольшее целое} \leqslant \frac{M}{P} \tag{7.17}$$

и разности

$$P_r = M - PK \tag{7.18}$$

имеют меньшее значение.

Каждое $\hat{\alpha}$ образуется выделением соответствующей части α и добавлением на конце $N-1$ отсчетов с нулевыми величинами. Каждое результирующее $\hat{\gamma}_n$ не имеет интервала интерференции и является полной апериодической сверткой β_n с частью α_n. Поэтому каждое $\hat{\gamma}_n$ должно быть аддитивно перекрыто с соседними отрезками для образования желаемого γ_n. Эта ситуация показана на рис. 7.5.

Время, необходимое для реализации метода перекрытия с суммированием, по существу является таким же, как и для реализации метода перекрытия с накоплением. Существует некоторый выигрыш, если K оказывается меньшим для метода перекрытия с суммированием, но он незначителен, так как его реализация требует некоторого увеличения времени для сложения перекрытий по сравнению со временем их накопления.

В случае, когда P_r очень мало, может оказаться более экономным производить обработку последней секции или с уменьшением значения L, или с использованием

обычного алгоритма свертки. Если $M \gg N$, то даже при $P_r = 1$ этот вид экономии можно не учитывать.

Точное значение $\lambda_{доп}$ зависит от того, какие виды памяти применяются для обращения с секциями α_n и γ_n, и от того, насколько эти секции необходимы и как они образуются. Характерно, что $\lambda_{доп}$ всегда будет мало по

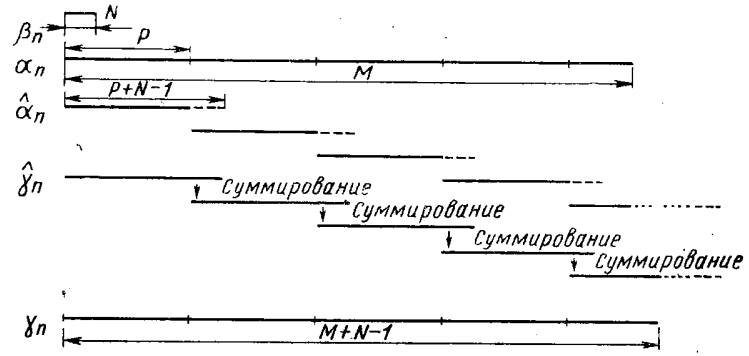


Рис. 7.5. Метод перекрытия с суммированием для высокоскоростной свертки, когда длительности α_n и β_n значительно отличаются.

сравнению с $\log_2(P+N-1)$, если вспомогательная память образуется за счет скорости движения ленты, диска или барабана. Типичными для $\lambda_{доп}$ являются значения 1,5—2 [6, 13, 14].

7.5. СПАРИВАНИЕ В ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ СВЕРТКЕ

Большинство операций по фильтрации сигналов охватывают действительный сигнал α_n и действительную импульсную характеристику β_n. В приведенных выше выводах такие ограничения не накладываются на α_n и β_n, и они могут быть комплексными функциями. Другими словами, γ_n на самом деле представляет собой четыре одновременно образуемые действительные свертки, комбинируемые по две. Более точно,

$$\gamma_n = \operatorname{Re}\gamma_n + j\operatorname{Im}\gamma_n = \operatorname{Re}\alpha_n * \operatorname{Re}\beta_n - \operatorname{Im}\alpha_n * \operatorname{Im}\beta_n + \\ + j(\operatorname{Im}\alpha_n * \operatorname{Re}\beta_n + \operatorname{Re}\alpha_n * \operatorname{Im}\beta_n). \tag{7.19}$$

Если $\operatorname{Im}\beta_n = 0$, то импульсная характеристика является действительной и (7.19) сокращается до двух отдельных действительных сверток, в которых используется β_n. Таким образом, для действительных сигналов или им-

пульсных характеристик методы, полученные до сих пор, являются правомерными либо при двукратном применении, либо при дублированном исполнении. Фактически существуют три возможности. Два сигнала могут быть обработаны с помощью одной и той же импульсной характеристики, две импульсные характеристики могут быть использованы для обработки одного и того же сигнала, или одна импульсная характеристика может быть использована для обработки одного и того же сигнала, но за половину времени.

Из этих трех возможностей последняя, вероятно, имеет наибольшее значение. Она осуществляется при объединении смежных секций $\widehat{\alpha}_n$ в комплексные комбинации. Это осуществляется, если использовать секции $\widehat{\alpha}_n$ с нечетными номерами как действительные части и секции $\widehat{\alpha}_n$ с четными номерами как мнимые части. Свертка этих комплексных комбинаций секций $\widehat{\alpha}_n$ с действительным $\widehat{\beta}_n$ дает комплексные комбинации частей свертки $\widehat{\gamma}_n$, действительные части которых есть секции $\widehat{\gamma}_n$ с нечетными номерами, а мнимые части — секции с четными номерами.

Для точной оценки достигнутого эффекта укажем, что этот прием уменьшает требуемое время, изменяя следующим образом выражение (7.14):

$$K = \text{наибольшее целое} \leqslant \frac{M+N-1}{2P}, \qquad (7.20)$$

и выражение (7.17):

$$K = \text{наибольшее целое} \leqslant \frac{M}{2P}. \qquad (7.21)$$

Хотя выражение (7.16) остается неизменным, K в нем уменьшается.

7.6. ВЫБОР ДЛИНЫ СЕКЦИИ

Для данной пары значений M и N длина секции P должна быть выбрана так, чтобы минимизировать $T_{\text{секц}}$. Поскольку $P+N-1$ должно быть степенью числа 2, можно оценить (7.16) для немногих значений P, которые совместимы с этим ограничением и размером имеющейся памяти, и затем выбрать оптимальную длину секции [5, 8, 14].

7.7. ВЛИЯНИЕ БОЛЬШОГО N

Число отсчетов N в импульсной характеристике ограничено возможным объемом памяти в быстродействующем запоминающем устройстве. Эксперименты показывают [14], что N должно быть ограничено так, чтобы занимать около одной восьмой части памяти, неиспользованной для программы. Если N больше этого предела, то импульсная характеристика β_n должна быть расщеплена на пакеты, каждый из которых используется как отдельная импульсная характеристика. Результаты, соответствующие каждому пакету, располагаются один за другим в соответствии с номерами пакетов, а затем суммируются. Эта дополнительная обработка может быть легко выполнена с помощью вспомогательной памяти.

Для очень больших чисел секций K выражение (7.16) может быть изменено так, чтобы оно включало M в явном виде (ранее оно включало M в неявном виде через посредство K). Это может быть сделано, если подставить в него значение K для действительной свертки из выражения (7.21):

$$T_{\text{быстр}} \approx k_{\text{бпф}} M \frac{P+N-1}{P} [\log_2 (P+N-1) + \lambda_{\text{доп}}]. \qquad (7.22)$$

Не останавливая внимания на оптимизации P, проводимой так, как это было описано выше, мы можем ради осторожности выбрать $P \approx N$ и, положив $\lambda_{\text{доп}}=2$, получить

$$T_{\text{быстр}} \approx 2k_{\text{бпф}} M (\log_2 N + 3). \qquad (7.23)$$

Выражение (7.23) представляет собой очень простую формулу для оценки времени фильтрации сигнала в зависимости от $k_{\text{бпф}}$, N и M.

Представляет интерес формула для времени фильтрации, полученная путем деления выражения (7.23) на коэффициент M:

$$\tau_{\text{быстр}} \approx 2k_{\text{бпф}} (\log_2 N + 3), \qquad (7.24)$$

где $\tau_{\text{быстр}}$ — время, требуемое для того, чтобы отфильтровать одиночный отсчет α_n. Поэтому $(\tau_{\text{быстр}})^{-1}$ представляет собой частоту, выраженную в отсчетах в секунду, с которой работает фильтр.

Вычислительная машина IBM 7094, модель II, работающая с плавающей запятой, может легко реализовать

значение $k_{\text{бпф}}$ в 100 *мксек*, а при специальном кодировании на языке машины достигается уменьшение этого значения до 75 *мксек*. Используя это минимальное значение и $N=8\,192$, получим $\tau_{\text{быстр}}=2{,}4$ *мсек*, которое соответствует скорости фильтрации выше 400 отсчетов в секунду. Выбранное значение N почти равно наибольшему числу, которое может быть обработано на машине с объемом быстродействующей памяти 64 000 слов, и обеспечивает возможность осуществления особо сложной фильтрации. Для применения в реальном масштабе времени импульсная характеристика может иметь протяженность более 19 *сек*.

Испытания показывают, [14], что стандартные методы вычисления свертки требуют примерно такого же времени, как и быстродействующие методы, когда N становится ниже 32. Для этого значения N $\tau_{\text{быстр}}=1{,}2$ *мсек*, т. е. только половине того значения, которое справедливо для $N=8\,192$. Эта слабая зависимость от N является исключительно важной характеристикой метода высокоскоростной свертки.

В течение предстоящих нескольких лет номенклатура вычислительных машин будет охватывать огромный диапазон скоростей, с которыми может вычисляться БПФ. Есть все основания ожидать в начале семидесятых годов возрастания скорости более чем на три порядка по сравнению с ее величиной для типов машин, которые упоминались выше. Если одновременно произойдет увеличение объема памяти, то станет возможной цифровая фильтрация в реальном масштабе времени с мегагерцовыми полосами частот и с весьма сложными частотными характеристиками.

7.8. ДИСКРЕТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ, ВЫРАЖЕННЫЕ КАК СВЕРТКИ ИЛИ КОРРЕЛЯЦИИ

Ранее было показано, что существует тесная связь между дискретными преобразованиями Фурье и произведением сдвинутых круговых или периодических последовательностей и что благодаря этой связи можно произвести вычисление большого числа произведений сдвинутых последовательностей за время, пропорциональное $N \log N$. Покажем возможность вычисления ДПФ как произведения сдвинутых последовательностей, что может быть использовано в тех случаях, когда БПФ непосредственно

неприменимо для вычисления спектра. Для этого существуют два совершенно различных подхода; первый — наиболее общий, а второй — менее общий, но не менее интересный. Рассмотрим сначала вариант, подсказанный непрерывным методом фильтрации сигналов с линейной частотной модуляцией (*chirp filtering*) [4]. Начнем с определения ДПФ,

$$F_k=\sum_{n=0}^{N-1} f_n W^{nk}. \tag{7.25}$$

Оставляя равенство неизменным, умножим правую часть на величину $W^{\frac{1}{2}(n^2+k^2)}$ и обратную ей. Можно перегруппировать коэффициенты в (7.25) так, чтобы получить

$$F_k=W^{-\frac{1}{2}k^2}\left[\sum_{n=0}^{N-1}\left(f_n W^{-\frac{1}{2}n^2}\right)W^{\frac{1}{2}n^2}W^{nk}W^{\frac{1}{2}k^2}\right], \tag{7.26}$$

и, поскольку

$$W^{\frac{1}{2}n^2}W^{nk}W^{\frac{1}{2}k^2}=W^{\frac{1}{2}(n+k)^2}, \tag{7.27}$$

получим следующее выражение для ДПФ:

$$F_k=W^{-\frac{1}{2}k^2}\left[\sum_{n=0}^{N-1}\left(f_n W^{-\frac{1}{2}n^2}\right)W^{\frac{1}{2}(n+k)^2}\right]. \tag{7.28}$$

Уравнение (7.28) предусматривает три этапа обработки для вычисления F_k:

1) умножение f_n на $W^{-\frac{1}{2}n^2}$ для того, чтобы получить новую последовательность ξ_n,

2) вычисление ξ_k, корреляции по сдвигу k последовательностей ξ_n и $W^{\frac{1}{2}n^2}$,

3) умножение ξ_k на $W^{-\frac{1}{2}k^2}$ для того, чтобы получить ДПФ F_k.

Основной этап, вычисление корреляции *), может быть выполнен высокоскоростными методами, и при этом достигнутый результат, на вид незначительный, будет заключаться в том, что можно использовать БПФ для вычисления окольным путем ДПФ. Однако этот результат в действительности не бесполезен, поскольку мы обошли несколько ограничений, присущих вычислению ДПФ непосредственно методами БПФ. Например, нам не потребовалось ограничения, требующего, чтобы число точек в f_n было сложносоставным (состояло бы из большого количества множителей), поскольку БПФ, основанное на степени 2, может быть применено для вычисления произведений сдвинутых последовательностей с любым числом точек. Это означает, что ДПФ для простого числа точек может быть вычислено за время, пропорциональное $N \log N$, а не N^2, как это прежде казалось необходимым, хотя в этом случае коэффициент пропорциональности в несколько раз больше, чем при обычном БПФ. Но это еще не все.

Вывод формулы (7.28) никоим образом не зависит от природы W. Поэтому, принимая во внимание, что мы прежде ограничивались при БПФ вычислением z-преобразования последовательности в точках, расположенных под углами $2\pi/N$ вдоль единичной окружности, теперь можем вычислить z-преобразование при любом равномерном расположении точек вдоль любой части единичной окружности и вдобавок сохранить зависимость вида $N \log N$ для времени вычисления. Можно даже вычислить z-преобразование точек на спирали: $z = W^k$, $k = k_0, k_0+1, k_0+2, \ldots, k_0+N-1$, приняв величину W отличной от единицы. Если W — действительное число,

*) Поскольку $W = e^{-j2\pi/N}$, было показано [4], что для N в виде полного квадрата, например M^2, существует рекурсивный фильтр, у которого для выполнения требуемой корреляции импульсная характеристика $W^{-\frac{1}{2}n^2}$ может быть свернута с ξ_n. Это следует из z-преобразования

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{+j\pi n^2/M^2} z^{-n} = \sum_{m=0}^{M-1} z^{-m} e^{j\pi m^2/N} \frac{1}{1 + e^{j2\pi m/M} z^{-M}},$$

которое описывает совокупность M рекурсивных фильтров с задержками и весами. Последнее выражение приводит к интересному алгоритму ДПФ, требующему для своей реализации время, пропорциональное $N^{3/2}$ при N, являющемся квадратом некоторого числа.

то эта спираль вырождается в ряд экспоненциально расположенных точек на действительной оси.

Теперь видно, что при вычислении ДПФ функции, когда число точек является простым, может быть достигнута эффективность того же порядка, что и при быстром преобразовании Фурье.

Второй метод, упоминавшийся во вводной части этого параграфа, можно применять только тогда, когда число точек является простым (хотя он может быть модифицирован так, чтобы охватывать случай любой степени любого нечетного простого числа). В то время как выражение (7.28) опиралось на метод фильтрации сигналов с линейной частотной модуляцией, метод который нам предстоит рассмотреть, кажется совершенно отличным от любого известного метода в теории непрерывного преобразования Фурье. Начнем с обсуждения свойства некоторых целых чисел, включая простые, — с существования первообразных корней.

Первообразный корень определяется следующим образом. Пусть количество целых чисел меньше N, а взаимно простым по отношению к N является число φ. Тогда если последовательность $\{((g^1)), ((g^2)), ((g^3)), \ldots, ((g^\varphi))\}$ содержит все такие φ чисел (и, конечно, не включает в себя ни любые другие числа, ни любые повторения), то говорят, что g есть первообразный корень от N. Если N — простое число, $\varphi = N-1$, то это определение сводится к утверждению, что последовательность $\{((g^n))\}$, $n = 1, 2, \ldots, N-1$ есть перестановка целых чисел $1, 2, \ldots, N-1$. Первообразные корни не обязательно существуют для всех целых N*), но они обязательно существуют для всех простых чисел. Доказательство может быть найдено почти в любой монографии по теории чисел [11]. Таблица первообразных корней для всех простых чисел, меньших 10^4, дана в сборнике таблиц Абрамовича и Стегана [1]. Заданное простое число может иметь несколько первообразных корней, связанных с ним. Проиллюстрируем природу перестановки с простым числом $N = 11$, которое имеет первообразный корень $g = 2$.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$((g^i))$	2	4	8	5	10	9	7	3	6	1

*) Первообразные корни существуют для $N = 2$, 4 и для всех степеней нечетных простых чисел.

В то же время $((g^{N-1}))$ должно быть всегда равно единице, и поэтому можно заключить, что

$$((g^i)) = ((g^{i \bmod N-1})) \tag{7.29}$$

для всех i. С этими сведениями возвратимся к рассмотрению ДПФ при простом числе точек N [12].

Выражение для F_0 является исключительно простым:

$$F_0 = \sum_{n=0}^{N-1} f_n, \tag{7.30}$$

и оно будет особо рассмотрено позднее. Его желательно вычислить по другому правилу, чем остальные F_k, так как оно не требует умножений. Заметим, что для других F_k отсчет f_0 ни на что не умножается, поэтому его можно прибавить, после того как выполнено суммирование (7.25). В таком случае вычисление $(N-1)$-точечной последовательности $\{F_k - f_0\}$ можно записать в виде выражения

$$F_k - f_0 = \sum_{n=1}^{N-1} f_n W^{nk}. \tag{7.31}$$

Имея в виду свойство первообразного корня g, можно произвести подстановку $k \longrightarrow ((g^k))$, которая только изменит порядок следования $N-1$ уравнений (7.31), и подстановку $n \longrightarrow ((g^n))$, которая изменит порядок следования членов суммы. Следовательно, можно записать

$$F_{((g^k))} - f_0 = \sum_{n=1}^{N-1} f_{((g^n))} W^{((g^n))\,((g^k))}, \tag{7.32}$$

и поэтому

$$F_{((g^k))} - f_0 = \sum_{n=1}^{N-1} f_{((g^n))} W^{((g^{(n+k)}))}. \tag{7.33}$$

Отсюда вытекает, что последовательность $\{F_{((g^k))} - f_0\}$ является корреляцией последовательностей $\{f_{((g^n))}\}$ и $\{W^{((g^n))}\}$, а из (7.29) следует то, что она является $(N-1)$-точечной круговой корреляцией. Таким образом, мы опять получили, что ДПФ можно вычислить с помощью высокоскоростной корреляции.

Для этого существует два пути. Так как N — простое число, то $(N-1)$ — составное число. Если оно сложносоставное (например, при $N=257$), то $(N-1)$-точечную круговую свертку выгодно вычислять, применяя соотношение

$$\{F_{((g^k))} - f_0\} = \text{ДПФ}^{-1}\{(\text{ДПФ}\{f_{((g^{-i}))}\}) \times \times (\text{ДПФ}\{W^{((g^i))}\})\}, \tag{7.34}$$

где все требуемые операции вычисления ДПФ выполняются с помощью $(N-1)$-точечного алгоритма БПФ. В этом случае соотношение (7.34) весьма эффективно *). Однако, если $N-1$ не очень сложное составное число (как при $N=563$), то выгоды от алгоритма БПФ сводятся на нет тем, что вычисляется более одного ДПФ. Тем не менее периодическая корреляция всегда может быть вычислена как апериодическая корреляция, основанная на ДПФ, использующих N' точек, где N' сложносоставное число (скажем, степень числа 2), превышающее $2N-4$.

Особым образом мы создаем последовательность $\{\gamma_n\}$ путем включения $N'-N+1$ нулей между нулевой и первой точками последовательности $\{f_{((g^{-n}))}\}$ и вторую последовательность $\{\vartheta_n\}$ путем периодического повторения $W^{((g^n))}$ до образования N' точек. Тогда

$$\text{ДПФ}^{-1}\{(\text{ДПФ}\{\gamma_n\})\,(\text{ДПФ}\{\vartheta_n\})\}$$

содержит $\{F_{((g^k))} - f_0\}$ в качестве последовательности (первые $N-1$ точек).

Если предварительно вычислено преобразование последовательности степеней W, то при каждой из этих двух процедур может быть сэкономлено около одной трети вычислений. Один подход требует выполнения объема вычислений, пропорционального сумме сомножителей, из которых состоит число $N-1$, умноженной на это число, тогда как второй подход требует объема вычислений, пропорционального $N' \log N'$. Кроме того, при приме-

*) Интересно, что $(N-1)$-точечное ДПФ от $\{W^{((g^n))}\}$ имеет величину $\sqrt{N}$ для всех точек, за исключением нулевой, где ДПФ равно -1.

нений любого из подходов вычисляется ДПФ от переставленной входной последовательности. Нулевая точка этого ДПФ есть сумма входных отсчетов, и прибавление f_0 к этому числу может заменить отдельное вычисление F_0 с помощью (7.30). Далее, после того как два ДПФ перемножены, частично используя данный метод, можно выполнить сложение f_0 с каждой из других точек преобразования путем изменения нулевой точки произведения дискретных преобразований Фурье. Прибавление $(N-1)f_0$ или $N'f_0$ к нулевой точке до обратного преобразования дает тот же результат, что и прибавление f_0 к каждой выходной точке, т. е. $\{F_{((g^k))}\}$, который после записи отсчетов в непереставленном виде приводит к искомому ДПФ с простым числом точек.

Отметим, что второй метод высокоскоростного вычисления круговой корреляции при не очень сложном составном числе точек представляет собой пример, на который делалась ссылка в сноске § 7.2.

7.9. РАСЧЕТ ВЫСОКОСКОРОСТНОГО ЦИФРОВОГО ФИЛЬТРА

Обычно считают, что цифровой фильтр определен во временной области, если задана его импульсная характеристика β_n. Высокоскоростные методы применимы, когда β_n не равна нулю только в единственном конечном интервале, что выполняется не всегда. Если такое условие не удовлетворяется, то высокоскоростные методы могут применяться лишь как приближенные при допущении, что β_n принимает нулевое значение вне некоторой разумно выбранной области. Вообще говоря, чем шире эта область, тем лучше аппроксимация.

Однако ширина области не является единственным важным условием. По-видимому, эта область еще должна быть соответственно расположена. Факторы, определяющие хорошее расположение области, зависят от целей процесса фильтрации, но общие соображения показывают, что обычно лучше отбросить значения β_n, которые малы, и сохранить те, которые велики.

Существует много способов, которыми можно определить β_n. Для того чтобы ее определить математическим путем, необходимо прежде установить, как учитывать ограничение, заключающееся в том, что интервал принимается конечным. Это позволит тесно увязать задачи фильтрации с наложенным ограничением и поможет найти средства минимизации ошибок измерений.

Когда характеристики β_n определяются с помощью физических измерений, как часто бывает в задачах, включающих в себя моделирование, то соображения по их выбору менее ясны. Эти вопросы лучше решаются, если рассмотреть известные физические свойства измеряемого объекта и попытаться сохранить те из них, которые важны для эксперимента.

Например, в эксперименте, составной частью которого является моделирование акустических свойств некоторой аудитории, импульсная характеристика между двумя выбранными точками может быть определена, если производить электрические разряды в одной точке и записывать их действие в другой точке с помощью подходящего микрофона. По физическим соображениям понятно, что никакие выводы относительно β_n не могут быть сделаны до тех пор, пока звук от разряда не достигнет микрофона. Поскольку расстояние известно, то значение n, начиная с которого должен отсчитываться интервал, может быть легко вычислено. Определение ширины интервала произвести намного труднее. Поскольку реверберации от разряда постепенно затухают, измерить физические свойства помещения можно только на том интервале, для которого реверберации остаются выше шумов измерений. Даже если уровень шума измерений сделать пренебрежимо малым, значения β_n уменьшаются с возрастанием n и в конце концов падают ниже уровня разрешения преобразователя аналог — цифра, что и определит тем самым соответствующий конец интервала. Если после учета этих соображений интервал все еще остается слишком большим, его можно уменьшить, исходя из количества циклов реверберации, которые надо учитывать, или из доли общей энергии, которая может быть отброшена без ущерба для обоснованности моделирования.

Независимо от того, как определено β_n — математически или посредством измерений, коль скоро подходящий интервал установлен, значит цифровой фильтр полностью охарактеризован и можно приступать к его непосредственной реализации с помощью методов высокоскоростной свертки.

Считается, что цифровой фильтр определен в частотной области, если задана его частотная характери-

стика $F(\omega T)$. Функция $F(\omega T)$ есть непрерывная, периодическая, комплексная функция от ωT, и для нерекурсивного фильтра она задается выражением

$$F(\omega T) = \sum_n \beta_n e^{-jn\omega T}. \qquad (7.35)$$

Поскольку $F(\omega T)$ является периодической функцией, она полностью определяется одним-единственным периодом. Обычно период характеризуют интервалом $-\pi < \omega T \leqslant \pi$. Так как $F(\omega T)$ — комплексная функция, то должны быть определены одновременно ее действительная и мнимая части или амплитуда и фаза.

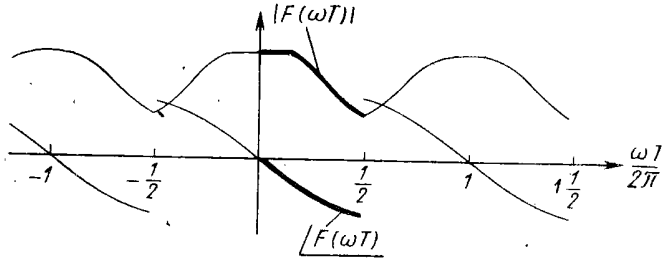


Рис. 7.6. Определение частотной характеристики цифрового фильтра (в полярных координатах).

В случае, когда β_n — действительная величина, как это обычно бывает, на $F(\omega T)$ накладывается ограничение, которое требует, чтобы действительная часть и амплитуда функции $F(\omega T)$ были четными функциями от ωT, а мнимая часть и фаза $F(\omega T)$ были нечетными функциями. В этом случае $F(\omega T)$ полностью определена, если она задана в диапазоне $0 \leqslant \omega T \leqslant \pi$. Типичный пример в полярных координатах показан на рис. 7.6 *).

Как бы то ни было, если задана $F(\omega T)$, то существуют β_n, которые определяются как

$$\beta_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(\omega T)\, e^{+j\omega T n} d(\omega T). \qquad (7.36)$$

*) При $\beta_n = 0$ для $n < 0$ считается, что цифровой фильтр реализуем, так как его текущий выходной отсчет не зависит от будущих входных отсчетов. Если это имеет место, то $\mathrm{Re}[F(\omega T)]$ и $\mathrm{Im}[F(\omega T)]$ связаны преобразованием Гильберта [7] и так, что если одно задано, то другое определяется. При этих обстоятельствах, хотя $|F(\omega T)|$ и $\arg[F(\omega T)]$ связаны между собой не так тесно, существует все же несколько условий [7], которым они должны удовлетворять.

Практически важно, чтобы β_n действительно были коэффициентами комплексного ряда Фурье для периодической функции $F(\omega T)$. Вообще говоря, будет существовать бесконечное количество ненулевых β_n, поскольку у большинства периодических функций при их разложении в ряд Фурье требуется бесконечное количество гармоник.

Напомним, что если применяются высокоскоростные методы, то β_n должно быть отлично от нуля в единственном и конечном интервале. Учитывая сказанное в предыдущем параграфе, это означает, что высокоскоростные методы могут применяться также, только приближенно, для реализации цифровых фильтров, заданных в частотной области.

Природа приближений, используемых здесь, хорошо известна, так как они идентичны тем, которые связаны со сходимостью ряда Фурье. Главным в этом вопросе является так называемое явление Гиббса (понятие сейчас хорошо известное), которое выражается в виде постоянного (в процентном отношении) выброса и пульсаций до и после скачка при его аппроксимации рядом Фурье. Эти пульсации характеристик и те, которые сопровождают разрывы производной, описываются с помощью функции $(\sin x)/x$ и различных ее интегралов [7].

Рис. 7.7 показывает влияние таких приближений на характеристику $F(\omega T)$ вблизи разрыва по величине и по производной (разрывы принимаются одинаковыми), когда β_n содержит только N ненулевых отсчетов. Важно отметить, что амплитуда пульсаций на рис. 7.7,*а* не зависит от величины N и что первый выброс составляет около 9% от величины разрыва. По мере возрастания N период пульсаций уменьшается, и они сосредоточиваются в более узком интервале частот вблизи скачка, а их амплитуды остаются теми же, уменьшаясь только обратно пропорционально расстоянию от разрыва. Это означает, что десятый выброс равен 1% (—40 *дб*), а сотый выброс составляет 0,1% (—60 *дб*) от величины разрыва.

На рис. 7.7,*б* картина немного иная. Максимальная ошибка в районе, где происходит разрыв производной, носит характер небольшого «обвода». В противоположность ситуации на рис. 7.7,*а*, максимальное отклонение при обводе и величина примыкающих к нему пульсаций находятся в обратно пропорциональной зависимости от

N. По мере возрастания N пульсации сосредоточиваются в более узком интервале частот около разрыва производной, а их амплитуды постепенно сходят на нет с той же скоростью. Это такой же эффект, как если бы рис. 7.7,*б* наблюдался со все возрастающего расстояния. Пульса-

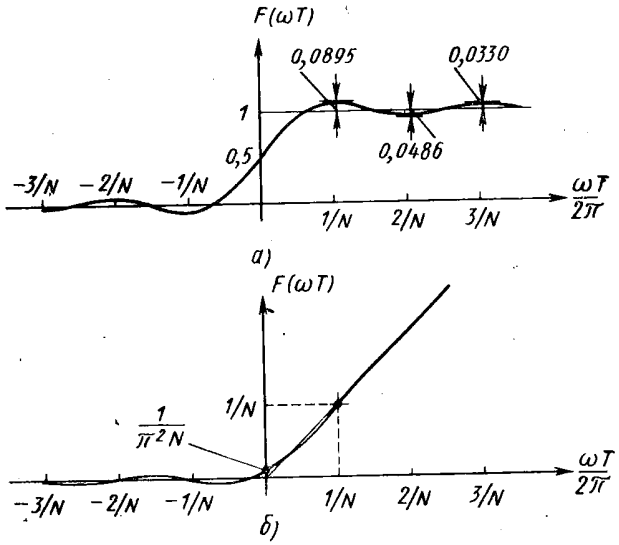


Рис. 7.7. Влияние усеченной импульсной характеристики на частотную характеристику:

а) вблизи разрыва частотной характеристики; *б*) вблизи разрыва производной

ции на рис. 7.7,*б* имеют меньшее значение, и к тому же они так же, как и на рис. 7.7,*а*, уменьшаются обратно пропорционально расстоянию от разрыва.

Так как периодическая функция, такая, как $F(\omega T)$, даже если она и не имеет разрывов в какой-либо производной, будет содержать при ее представлении в виде ряда Фурье бесконечное количество гармоник, то при высокоскоростной цифровой фильтрации возникают трудности, которые хорошо иллюстрируются искажениями на рис. 7.7. Эти трудности отчасти вызываются тем фактом, что значительная часть фильтров в частотной области должна иметь резко различающиеся характеристики в примыкающих друг к другу частотных полосах, что приводит к разрывам характеристик на стыках этих полос.

Лучшим примером может служить случай проектирования идеального низкочастотного фильтра, для которого

$$F(\omega T)=\begin{cases}1, & 0\leqslant|\omega T|\leqslant\omega_c T,\\ 0, & \omega_c T<|\omega T|\leqslant\pi.\end{cases} \qquad (7.37)$$

Приближенная функция $F(\omega T)$ в районе $\omega_c T$ ведет себя так же, как на рис. 7.7,*а*. Издержки такого приближения видны наиболее ясно, когда частотные характеристики изображены в логарифмическом масштабе, как на рис. 7.8. Хотя пульсации, которые наблюдаются в полосе пропускания, почти незаметны (наибольшая составляет

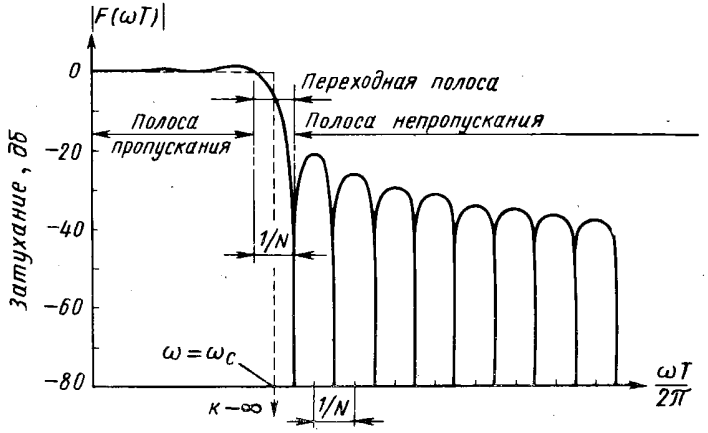


Рис. 7.8. Аппроксимация идеального низкочастотного фильтра, вызывающая явление Гиббса (в логарифмическом масштабе).

около 0,75 *дб*), в полосе непропускания они крайне неприятны, так как из-за них минимальное затухание не может опуститься ниже точки 21 *дб*. В большинстве случаев фильтрации требуется минимальное затухание, по крайней мере 40 *дб* или даже 60 или 80 *дб*.

Даже в случае, когда характеристика $F(\omega T)$ не должна состоять из различных частотных полос, как в приведенном примере, разрывы характеристики почти всегда требуются при $\omega T=0$ и $\omega T=\pi$ (см. рис. 7.6). По своему влиянию эти точки являются зеркальными точками. В них функция $F(\omega T)$ должна обладать такой симметрией, чтобы по обе стороны от каждой из них она принимала сопряженные комплексные значения. Для то-

го чтобы избежать разрывов, нечетная часть от $F(\omega T)$ и любая из ее производных должны у этих точек стремиться к пределу, равному нулю *). Для $F(\omega T)$ и любой из ее производных четного порядка нечетная часть соответствует мнимой части, а для производных нечетного порядка — действительной части.

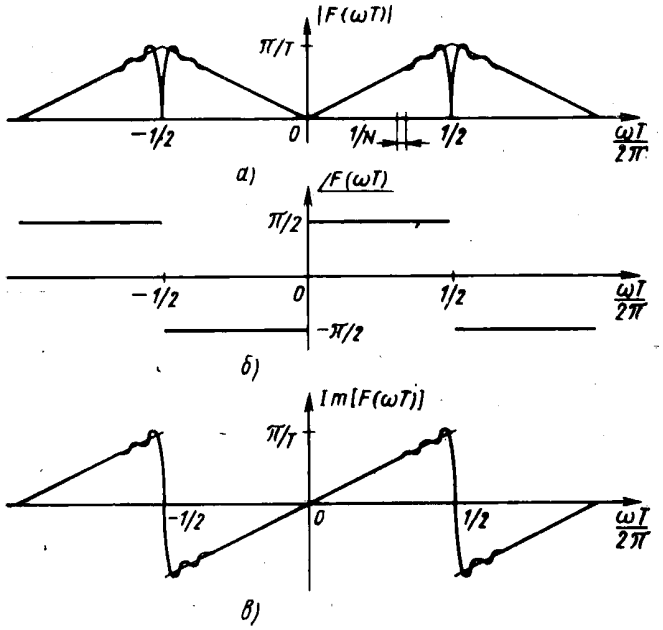


Рис. 7.9. Идеальный дифференциатор и его аппроксимация:
а) амплитудная характеристика; *б*) фазовая характеристика; *с*) мнимая часть характеристики.

Прекрасной иллюстрацией этих эффектов может служить идеальный дифференциатор [10], для которого

$$F(\omega T) = j\omega, \qquad -\pi < \omega T < \pi. \tag{7.38}$$

Функция $F(\omega T)$ непрерывна при $\omega T = 0$, но совершает скачок на $2j\pi/T$ при $\omega T = \pi$. На рис. 7.9 дается график функции $F(\omega T)$ и ее аппроксимация для $N = 32$.

*) Разрывы в $\arg[F(\omega T)]$ и производных от $|F(\omega T)|$ не обязательно означают наличие соответствующих разрывов в $F(\omega T)$. См., например, рис. 7.9.

Такого же рода функцией $F(\omega T)$, с разрывами при $\omega T = 0$ и при $\omega T = \pi$ является частотная характеристика преобразователя Гильберта, который часто применяется для получения аналитических сигналов и при построении систем с одной боковой полосой. Она имеет вид

$$F(\omega T) = \begin{cases} j, & 0 < \omega T < \pi, \\ -j, & -\pi < \omega T < 0. \end{cases} \tag{7.39}$$

На рис 7.10 представлена эта функция $F(\omega T)$ и ее аппроксимация подобно тому, как это было сделано на рис. 7.9.

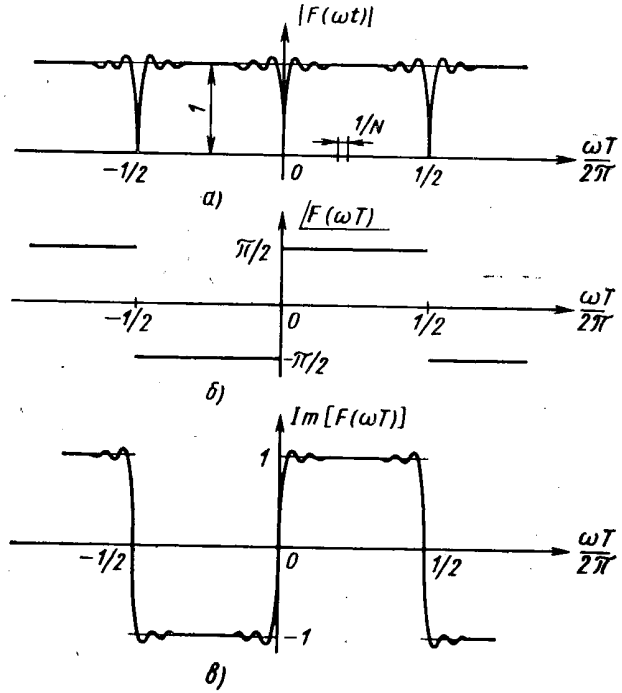


Рис. 7.10. Идеальный преобразователь Гильберта и его аппроксимация:
а) амплитудная характеристика; *б*) фазовая характеристика; *с*) мнимая часть характеристики.

Пульсации, вызванные разрывами производной, наиболее часто встречаются при $\omega T = 0$ и особенно при $\omega T = \pi$. Возникающая ситуация обычно не опасна, посколь-

ку $F(\omega T)$ также становится малой в тех же точках. Примером этого является фильтр Фейера или Чезаро, который обладает треугольной частотной характеристикой, заданной в виде

$$F(\omega T) = 1 - \left|\frac{\omega T}{\pi}\right|, \quad -\pi \leqslant \omega T \leqslant \pi. \tag{7.40}$$

Этот фильтр имеет разрыв производной при $\omega T = 0$, где $F(\omega T)$ велика, и при $\omega T = \pi$, где она мала. Рис. 7.11 иллюстрирует этот случай в логарифмическом масштабе. Ошибка при $\omega T = 0$ и при $\omega T = 1/2$ приблизительно равна

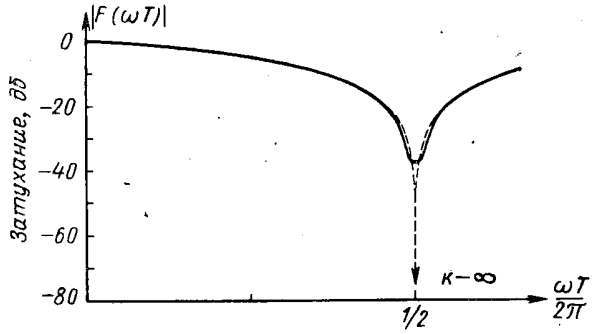


Рис. 7.11. Треугольная частотная характеристика (фильтр Чезаро) и ее аппроксимация в логарифмическом масштабе.

$4/\pi^2 N \approx 1/80$, что при $\omega T = 0$ составляет около 0,11 *дб*, а при $\omega T = \pi$ приводит к глубокому провалу величиной около —38 *дб*. При удвоении N затухание на последнем рисунке может быть увеличено на 6 *дб*.

Возвращаясь снова к случаю, когда характеристика состоит из различных частотных полос, рассмотрим пример, демонстрирующий влияние разрывов производной. Предположим, что опять рассматривается фильтр Чезаро, но ширина его полосы пропускания ограничена срезом $\omega_c T$ так, что

$$F(\omega T) = \begin{cases} 1 - \left|\dfrac{\omega}{\omega_c}\right|, & 0 \leqslant |\omega T| \leqslant \omega_c T, \\ 0, & \omega_c T < |\omega T| \leqslant \pi. \end{cases} \tag{7.41}$$

Рис. 7.12 относится к этому случаю. В противоположность идеальному низкочастотному фильтру рис. 7.8, этот

фильтр имеет пульсации в полосе непропусканий, которые уменьшаются на 6 *дб* всякий раз при удвоении N. Выберем $\omega_c = 5\Omega$, где $\Omega = 2\pi/NT$.

Затухание при $\omega T = \omega_c T$ равно $\Omega/\pi^2\omega_c \approx 1/50$, что составляет —34 *дб*. Наибольшее колебание в полосе непропускания равно $0{,}34\,\Omega/\pi^2\omega_c \approx 0{,}0068$ или —43 *дб*.

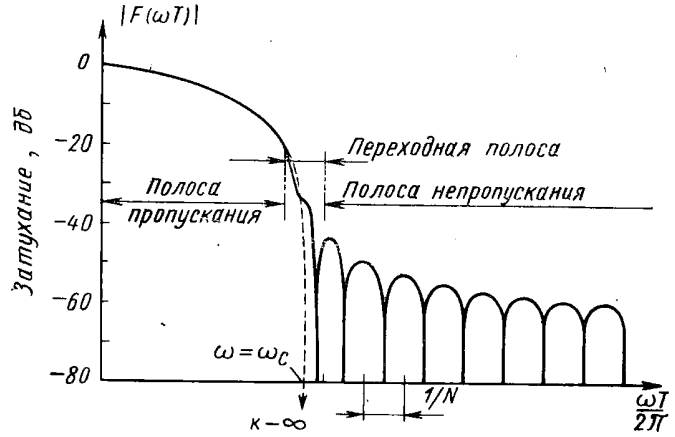


Рис. 7.12. Идеальный фильтр Чезаро с частотой среза $\omega_c T$ (пунктирная линия) и его аппроксимация в логарифмическом масштабе.

Из этих соображений и из того, что время вычислений выбирается по (7.24), должно следовать, что нежелательные пульсации могут быть легко ликвидированы, если применить достаточно большое N. Это может быть справедливо для пульсаций, вызванных разрывом производной, как на рис. 7.12, потому что в этом случае для фиксированных значений ширины переходной полосы и $\omega_c T$ минимум затухания снижается на 40 *дб* при десятикратном увеличении N. Однако в случае ступенчатого разрыва, как на рис. 7.8, эта мера является слишком дорогостоящей даже для высокоскоростных цифровых методов.

Основным камнем преткновения в этих вопросах является большой выброс из-за явления Гиббса и его медленный спад.

Этой проблеме было посвящено большое количество исследований [3, 10]. В них проведен обширный и тонкий теоретический анализ, но большинство наиболее значи-

тельных результатов все же было получено численными методами с помощью цифровых вычислительных машин [9, 10]. Анализируя достигнутые результаты, следует сказать, что с помощью лучших методов пульсации в полосе непропускания на рис. 7.8 могут быть сделаны такими, чтобы обеспечивалось минимальное затухание в 80 *дб*. Это достигается путем увеличения N в 5 раз в сочетании с умножением β_n на весовую функцию внутри интервала.

Идея использования весовой функции с целью изменения коэффициентов Фурье периодической функции для управления сходимостью этого ряда, хорошо известна. Она основана на замене прямоугольного «окна», ограничивающего бесконечный ряд, окном некоторой другой формы. Поскольку умножение коэффициентов Фурье на окно соответствует свертыванию периодической функции с преобразованием Фурье от этого окна, то усилия концентрируются на отыскании такого конечного окна, преобразование Фурье которого имеет относительно малые боковые лепестки.

Как известно, прямоугольное окно имеет преобразование Фурье в виде $(\sin x)/x$ с относительно большими боковыми лепестками. Треугольное окно имеет преобразование в виде $[(\sin x)/x]^2$ со значительно меньшими боковыми лепестками, которые затухают быстрее за счет двойной ширины центрального лепестка. Параболическое окно имеет преобразование вида $[(\sin x)/x]^3$, тройную ширину центрального лепестка и выброс величиной всего лишь 0,5% от единичного разрыва. Поскольку в этом случае боковые лепестки уменьшаются обратно пропорционально кубу расстояния от центрального лепестка, то пульсации при ступенчатом разрыве после свертки с этим преобразованием затухают таким же образом. Этим достигается значительный эффект по сравнению со случаем, изображенным на рис. 7.8. Минимум затухания в полосе непропускания будет равен 46 *дб* вместо 21 *дб*, а пульсации спадают со скоростью 60 *дб* на декаду вместо 20 *дб* на декаду. Хотя эти результаты очень хороши и легко достигаются, они все же далеки от 80-*дб* рубежа, указанного выше.

Другая перспективная идея подавления пульсаций основывается на том факте, что они переменны по знаку. Если их наложить друг на друга с задержкой на одну пульсацию, то они будут компенсироваться. На рис. 7.13 две копии рис. 7.7,*а*, сдвинутые на $2\pi/N$, показаны от-

дельно и наложенными друг на друга. Пиковый выброс уменьшается на 2%; поскольку пульсации представляют собой первую разность от пульсаций на рис. 7.7,*а*, то они спадают обратно пропорционально квадрату их расстояния от места разрыва. Функция окна, соответствующая этой модификации, будет равна

$$w_n^{(1)} = \frac{1}{2}\left(e^{-j\pi n/N} + e^{+j\pi n/N}\right) = \cos\frac{\pi n}{N},$$

$$-\frac{1}{2}N \leqslant n \leqslant +\frac{1}{2}N, \qquad (7.42)$$

и равна нулю вне указанного интервала. Это показано на рис. 7.14. Заметим, что β_n уменьшается для больших значений n и что переходная полоса удваивается по ширине.

Продолжая этот процесс таким же образом дальше, мы получим суперпозицию аппроксимаций основного скачка, формирующую вторую разность от тех пульса-

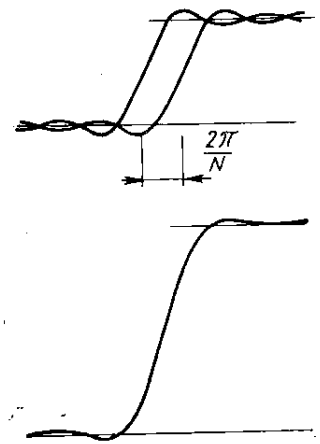


Рис. 7.13. Подавление явления Гиббса путем суммирования двух сдвинутых частотных характеристик для компенсации пульсаций.

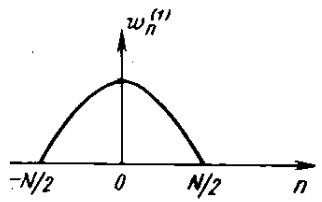


Рис. 7.14. Функция окна во временной области; умножение импульсной характеристики на эту функцию окна дает эффект в частотной области, как на рис. 7.13.

ций, которые изображены на рис. 7.7,*а*. Для того чтобы это сделать, необходимы три копии, раздвинутые на промежутки $2\pi/N$, причем центральная должна быть вдвое больше двух крайних. Как следствие, пиковый выброс уменьшается до 0,5%, а пульсации спадают обратно про-

порционально кубу их расстояния от точки разрыва. Соответствующая функция окна будет равна

$$w_n^{(2)} = \frac{1}{4}\left(e^{-j2\pi n/N} + 2 + e^{+j2\pi n/N}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 + \cos\frac{2\pi n}{N}\right), \qquad -\frac{1}{2}N \leqslant n \leqslant \frac{1}{2}N, \qquad (7.43)$$

и равна нулю вне указанного интервала. Это окно известно как окно *Хеннинга* и часто встречается в литературе [2, 3]. Подобно примеру с окном $[(\sin x)/x]^3$, приведенному выше, оно обеспечивает затухание 44 *дб* в полосе непропускания с пульсациями, спадающими со скоростью 60 *дб* на декаду. Второй выброс составляет около —55 *дб*.

В отличие от примера с окном $[(\sin x)/x]^3$, в примере с полученным окном понятно, каким образом дополнительно изменить веса 1/4, 1/2, 1/4, чтобы увеличить минимальное затухание в полосе непропускания. Первые несколько выбросов неполностью компенсируются при вторичном их вычитании потому, что они не составляют линейную прогрессию (средний выброс всегда немного меньше чем нужно). Для того чтобы скомпенсировать это, вес центрального выброса должен быть немного увеличен, а веса крайних выбросов уменьшены. Скорректированные веса, при которых ликвидируется первый выброс, приблизительно составляют 0,22; 0,56; 0,22; это очень близко к окну Хемминга, которое также часто встречается в литературе [3]. Дальнейшие манипуляции позволяют сбалансировать первые два выброса, доведя минимум затухания в полосе непропускания примерно до 60 *дб*.

Эти идеи можно развить и дальше и попытаться улучшить компенсацию других выбросов, вызванных разрывом. Дополнительные веса становятся очень малыми, как в окне Блекмана [3] (0,04; 0,25; 0,42; 0,25; 0,04), и приводят к пятикратному увеличению переходной полосы и увеличению минимального затухания в полосе непропускания более чем до 87 *дб*.

Хотя и не с целью подавления одних пульсаций с помощью других, окна Кайзера [9, 10] требуют, чтобы точно выдерживались различия в весах, с которыми накладываются друг на друга смежные аппроксимации разрыва. Это позволяет получить очень большое затухание

в полосе непропускания в сочетании с переходными полосами минимальной ширины. Требуются ли в каждом конкретном случае такие тонкие различия в весах или нет, должно быть определено с учетом разных факторов, наиболее важным из которых является верхний предел N, поскольку он определяется возможным объемом памяти в быстродействующем запоминающем устройстве.

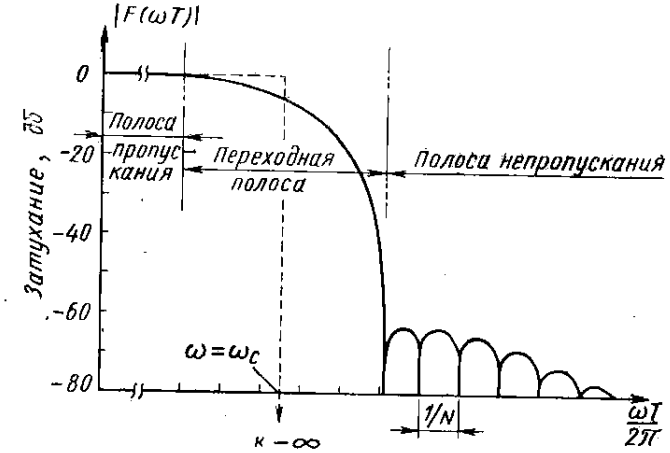


Рис. 7.15. Низкочастотный фильтр, рассчитанный с применением функции окна.

В качестве последнего примера на рис. 7.15 показан эффект, который можно получить при соответствующем окне для идеального низкочастотного фильтра, ранее показанного на рис. 7.8. Отметим расширение переходной полосы и увеличение затухания в полосе непропускания. Ширина переходной полосы в герцах приблизительно равна $5/NT$. Если обозначить через λ часть общей полосы $(0 \leqslant \omega T \leqslant \pi)$, приходящуюся на переходную полосу, то

$$5/N = \lambda/2 \qquad (7.44)$$

и

$$N = 10/\lambda. \qquad (7.45)$$

Для $\lambda = 0{,}01$ $N = 1000$ отсчетам.

При проектировании высокоскоростного цифрового фильтра полезно использовать БПФ как средство для выбора подходящей функции окна, а также размера и

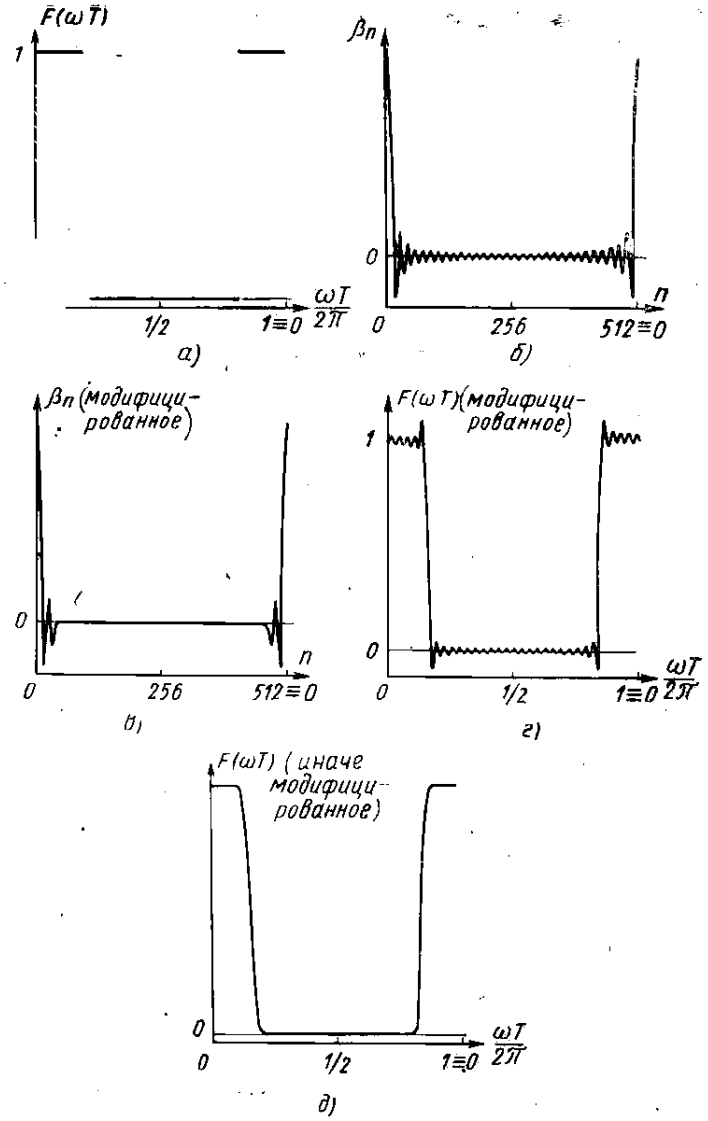


Рис. 7.16. Пример расчета низкочастотного фильтра:

а) идеальный фильтр; *б)* β_n, вычисленное как 512-точечное БПФ; *в)* β_n из рис. 7.16,*б*, умноженное на прямоугольное окно; *г)* частотная характеристика, соответствующая β_n на рис. 7.16,*в*; *д)* частотная характеристика при использовании окна Блекмана.

положения интервала. С этой целью $F(\omega T)$ должно быть вычислено в дискретной форме, использующей S отсчетов, где S является степенью числа 2. S должно быть по крайней мере вдвое, а лучше всего в четыре или в восемь раз больше, чем первоначальная оценка N, определяемая выражением (7.45). Когда β_n вычислена, выбран и должным образом расположен интервал шириной N и найдена функция окна, то модифицированная β_n может быть образована путем умножения на функцию окна. Затем, для получения отсчетов модифицированной $F(\omega T)$ должно быть вычислено БПФ от модифицированной β_n. При этом для обеспечения воспроизведения всех деталей используется по-прежнему S отсчетов. Для проверки должен быть построен график этих отсчетов. Если график неудовлетворительный, то процесс дол-

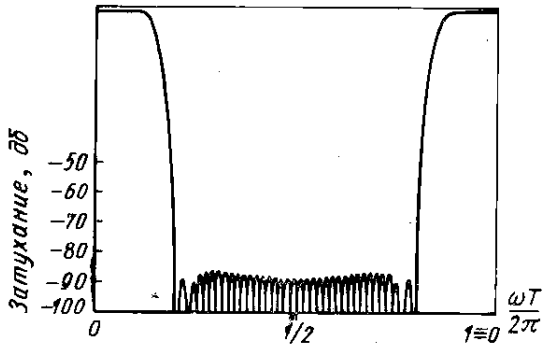


Рис. 7.17. Частотная характеристика рис. 7.16,*д*, изображенная в логарифмическом масштабе.

жен быть повторен с увеличенным N, другим окном, другим положением интервала или другой комбинацией этих факторов. После того как будет получена удовлетворительная модифицированная $F(\omega T)$, соответствующая β_n может быть использована в высокоскоростной свертке для осуществления процесса фильтрации. Конечно, $\hat{\beta}_n$ должна быть сформирована на базе периода L и с ненулевыми значениями в точках, смежных с $n=0$. Тогда после циклического сдвига β_n всегда окажется снова возможным вычислить ее ДПФ.

Приведем теперь характерный для этих методов пример расчета при наличии разрыва у функции $F_1(\omega T)$. Рассмотрим расчет идеаль-

ного низкочастотного фильтра, для которого желательно иметь $\omega_c T = 0{,}32\pi$ и коэффициент, определяющий ширину переходной полосы, $\lambda = 0{,}15$. Используя (7.45), получим первоначальную оценку N, равную 67. Соответственно выберем S как степень числа 2, которое близко к $8N$, а именно $S = 512$. Затем вычислим $F(\omega T)$ в виде линейно-ломаной кривой. График показан на рис. 7.16,*а*.

Теперь вычислим β_n с помощью обратного БПФ (результат показан на рис. 7.16,*б*). Для иллюстрации сначала выберем прямоугольное окно с центром при $n=0$ и шириной $N=65$ *). Умножая β_n на это окно, получим модифицированную β_n, показанную на рис. 7.16,*в*. При вычислении БПФ от этой модифицированной β_n определяются отсчеты модифицированной $F(\omega T)$, показанной на рис. 7.16,*г*. Полученный график очень волнистый за счет более быстрого изменения в переходной области, чем это требуется. Поэтому необходимо применить окно Блекмана, которое дает модифицированную функцию $F(\omega T)$, изображенную на рис. 7.16,*д*. Эта функция показана на рис. 7.17 в логарифмическом масштабе. Минимум затухания в полосе непропускания составляет более чем 87 *дб*, а часть, занимаемая переходной полосой λ, составляет 0,172. Если N немного увеличить, то λ легко приводится к заданному значению 0,15. Пример использования этого метода в случае разрыва производной функции $F(\omega T)$ приведен у Хелмса [8].

7.10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Произведение дискретных преобразований Фурье есть дискретное преобразование Фурье от круговой свертки. Это дает возможность вычислить круговую свертку за время, пропорциональное $N \log N$ вместо N^2. Прибавляя соответствующие числа нулевых отсчетов к каждой из последовательностей, подвергаемых круговой свертке, можно сделать численные значения круговой свертки идентичными значениям апериодической свертки. Аналогичный аргумент применим и к корреляции, которую можно рассматривать как свертку, при которой одна из последовательностей перевернута по времени. Возможна дополнительная экономия времени и памяти в том случае, когда требуется вычислить только часть свертки или когда одна последовательность в свертке значительно длиннее другой. Первая ситуация часто возникает при вычислении корреляционных функций для оценки спектра, а вторая — при нерекурсивной цифровой фильтрации, при которой одна из последовательностей имеет произвольно большую длину. Высокоскоростная свертка или корреляция находят применение в различных случаях, и в том числе в цифровой фильтрации, при оценке спектра и даже при вычислении дискретных преобразований Фурье, которые не могут быть вычислены непосредственно с помощью БПФ. Последнее применение становится возможным благодаря тому, что ДПФ может быть выражено как свертка или корреляция. Значительное внимание было уделено проблемам, встречающимся при расчете нерекурсивных цифровых фильтров, и методам разрешения этих проблем. БПФ является полезным средством не только при реализации, но и при расчете нерекурсивного фильтра.

---

*) Прямоугольное окно равно 1 для $|n| < 32$, 0 для $|n| > 32$ и 1/2 для $|n| = 32$ и содержит всего 65 ненулевых отсчетов.

562—2

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Abramowitz M., Stegun I., «Handbook of Mathematical Functions», Dover Publications, Inc., 1965, New York., p. 827, 864—869.
2. Bingham C., Godfrey M. D., Tukey J. W. «Modern Techniques of Power Spectrum Estimation», IEEE, Trans. Audio Electroacoustics, 1967, June, v. AU—15(2), p. 56—66.
3. Blackman R. B., Tukey J. W., «Measurement of Power Spectra», sec. B. 5, pp. 95—100, Dover Publications, Inc., New York, 1958.
4. Bluestein L. I., «Several Fourier Transform Algorithms», Nerem Record, 1968, Nov., v. 10, pp. 218—219. Published by Boston section of Inst. of Electrical and Electronic Engineers.
5. Cooley J. W., Lewis P., Welch P., «The Fast Fourier Transform Algorithm and Its Applications», IBM Res., Paper RC—1743, 1967.
6. Gentleman W. M., Sande G., «Fast Fourier Transforms — for Fun and Profit», 1966 Fall Joint Computer Conference, AFIPS Proc., 1966, v. 29, pp. 563—578.
7. Guillemin E. A., «Theory of Linear Physical Systems», chap. 16, sec. 5 and chap. 18, John Wiley and Sons, New York, 1963.
8. Helms H. D., «Fast Fourier Transform Method of Computing Difference Equations and Simulating Filters», IEEE Trans. Audio Electroacoustics, 1967, June, v. AU—15(2), pp. 85—90.
9. Kaiser J. F., «A Family of Window Functions Having Nearly Ideal Properties», неопубликованная работа, 1964, November.
10. Kaiser J. F., «Digital Filters», in Kuo F. K. and Kaiser J. F. (eds.), «System Analysis by Digital Computer», John Wiley and Sons, Inc., New York, 1966.
11. McCoy N., «The Theory of Numbers», The Macmillan Co., New York, 1965.
12. Рэйдер К., «Дискретные преобразования Фурье для случая, когда число выборочных величин является простым числом», ТИИЭР, 1968, т. 56, № 7, стр. 95—96.
13. Singleton R. C., «A Method for Computing the Fast Fourier Transform with Auxiliary Memory and Limited Highspeed Storage», IEEE Trans. Audio Electroacoustics, 1967, June, v. AU-15(2), pp. 91—98.
14. Stockham T. G., «High Speed Convolution and Correlation», 1966 Spring Joint Computer Conference, AFIPS Proc., v. 28, 1966, pp. 229—233.

Глава восьмая

ОБОБЩЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

8.1. ВВЕДЕНИЕ

Теория систем и сигналов в основном связана со спектральным анализом и суперпозицией. Тот факт, что большинство сигналов можно выразить в виде линейной комбинации комплексных экспоненциальных временных функций и что эти функции являются собственными функциями линейных неизменяемых во времени систем,— стал ключом к математическому описанию таких систем. Вследствие этого теория линейных систем превратилась в хорошо сформулированный и хорошо понимаемый раздел общей теории систем. При описании линейных систем можно использовать определяющее их свойство — принцип суперпозиции. В противоположность этому, при рассмотрении нелинейных систем сталкиваются с проблемой, вызванной отсутствием общего, характеризующего их свойства. Поэтому невозможно дать общую характеристику нелинейных систем.

Подход, который в этих условиях имеет смысл применить, заключается в том, чтобы собрать вместе нелинейные системы, обладающие одними и теми же свойствами, в надежде, что если эти свойства успешно найдены, то они могут привести к полезному способу описания такого класса нелинейных систем.

Существует много способов классификации нелинейных систем, и каждый из них имеет свои трудности. В данной главе рассматривается одна из таких классификаций. В частности, нелинейные системы представлены таким образом, что каждый класс определяется принципом суперпозиции, подобным принципу суперпозиции для линейных систем [7]. На основании этого представления рассматривается подход к определенному классу проблем нелинейной фильтрации и дается подробное развитие этого подхода для нелинейной фильтрации перемноженных сигналов и для близкой к ней задаче нелинейной фильтрации свернутых сигналов. Такие задачи возникают в целом ряде ситуаций. Были рассмотрены четыре характерных случая применения, но здесь приводятся только два из них, а именно сжатие динамического диапазона и увеличение контрастности изображений, а также анализ и обработка речевых сигналов.

Большая часть материала, приведенного в этой главе, является результатом совместной работы автора с Р. В. Шафером и Т. Г. Стокхэмом, мл. В частности, анализ, данный в § 8.5—8.9, проведен автором и Р. Шафером. Материал § 8.11, где рассматривается обработка изображений, заимствован у Т. Стокхэма, мл.

Основные теоретические предпосылки в § 8.2 и 8.3 сформулированы здесь впервые и даны применительно к непрерывным и дискретным колебаниям без какого-либо предпочтения. Однако описание процессов фильтрации свернутых сигналов приводится применительно к дискретным сверткам и дискретным колебаниям. Хотя такое рассмотрение вначале мотивировалось тем, что система должна была быть реализована на цифровой вычислительной машине, в действительности оказалось, что математически намного проще исследовать задачу, используя не непрерывные функции, а последовательности отсчетов.

Помимо математического аппарата дискретных последовательностей и z-преобразований, на котором базируются § 8.5—8.9, материал настоящей главы в значительной степени использует положения и результаты предыдущих глав. Применения предложенного метода, связанные с обработкой изображений, требуют двумерной линейной фильтрации, которая проводилась, конечно, в цифровой форме. Хотя это и не подчеркивается, рассматриваемый метод полностью использует преимущества высокоскоростной свертки, производимой в двух измерениях. Применение этого метода в задачах с выполнением действий развертки *) требует точного вычисления спектров во всех их деталях. Чрезвычайно благоприятным обстоятельством оказалось то, что примерно в тот же период, когда велись серьезные исследования указанных применений, был открыт алгоритм Кули—Таки для вычисления преобразований Фурье. Этот алгоритм открывает возможность производить развертку способами, описанными в этой главе, при помощи доступных вычислительных средств.

---

*) Развертка (*deconvolution*) — операция, обратная свертке двух функций, т. е. операция разделения свернутых сигналов. — *Прим. ред.*

8.2. ОБОБЩЕННАЯ СУПЕРПОЗИЦИЯ

Принцип суперпозиции в том виде, как он сформулирован для линейных систем, состоит в том, что если T — это преобразование сигнала, производимое системой, то для любых входных сигналов *) $x(t)$ и любого скаляра c имеем

$$T[x_1(t)+x_2(t)]=T[x_1(t)]+T[x_2(t)], \tag{8.1}$$

и

$$T[cx(t)]=cT[x(t)]. \tag{8.2}$$

Из этого определения ясно, что система с преобразованием φ, заданным в виде

$$\varphi[x(t)]=e^{x(t)}, \tag{8.3}$$

нелинейна. Однако

$$\varphi[x_1(t)+x_2(t)]=\varphi[x_1(t)]\varphi[x_2(t)] \tag{8.4}$$

и

$$\varphi[cx(t)]=\{\varphi[x(t)]\}^c, \tag{8.5}$$

и, следовательно, преобразование, определяемое выражением (8.3), удовлетворяет своеобразной форме принципа суперпозиции в том смысле, что его отклик на линейную комбинацию совокупности входных сигналов, описываемый (8.4) и (8.5), определяется по-прежнему откликами на каждый сигнал этой совокупности. Подобным же образом, если рассматривать преобразование ψ, заданное как

$$\psi[x(t)]=[x(t)]^2, \tag{8.6}$$

то видно, что

$$\psi[x_1(t)x_2(t)]=\psi[x_1(t)]\psi[x_2(t)] \tag{8.7}$$

и

$$\psi[x^c(t)]=\{\psi[x(t)]\}^c. \tag{8.8}$$

Опять можно сказать, что преобразование (8.6) удовлетворяет своеобразному принципу суперпозиции — его отклик на произведение входных сигналов является произведением индивидуальных откликов. Мы получили обобщение принципа суперпозиции, установленного для линейных систем, по крайней мере на некоторые нелинейные системы. Чтобы сформулировать этот принцип в общем виде, рассмотрим систему с преобразованием φ и обозначим через $\{x(t)\}$ совокупность возможных входных сигналов, а через $\{y(t)\}$ — совокупность возможных выходных сигналов. Пусть $x_1(t)\bigcirc x_2(t)$ означает комбинацию любых двух входных сигналов, образованную с помощью операции $\bigcirc$ (например, сложения, умножения, свертки и т. д.), и пусть $y_1(t)\square y_2(t)$ означает комбинацию любых двух выходных сигналов при операции $\square$. Подобным же образом, пусть $c \llcorner x(t)$ означает комбинацию входного сигнала $x(t)$ со скаляром c, а $c:y(t)$ — комбинацию выходного сигнала $y(t)$ со скаляром c. Тогда можно сказать, что система удовлетворяет обобщенному принципу суперпозиции, если

$$\varphi[x_1(t)\bigcirc x_2(t)]=\varphi[x_1(t)]\square\varphi[x_2(t)] \tag{8.9}$$

и

$$\varphi[c \llcorner x(t)]=c:\varphi[x(t)]. \tag{8.10}$$

Например, если φ — линейное преобразование, то операции $\bigcirc$ и $\square$ соответствуют сложению, а операции $\llcorner$ и $:$ соответствуют умножению.

В основе описания систем, имеющих свойства (8.9) и (8.10), лежит представление входных сигналов системы в виде векторов в векторном пространстве, выходных сигналов — в виде векторов в том же или другом векторном пространстве, а преобразования системы — в виде линейного отображения этих пространств. При таком подходе должно быть наложено дополнительное ограничение на операции $\bigcirc$ и $\llcorner$, которое состоит в том, что они должны удовлетворять тем же алгебраическим постулатам, что и векторное сложение *). При таком ограничении и в предположении, что входные сигналы составляют векторное пространство с операциями $\bigcirc$ и $\llcorner$, соответствующими векторному сложению и скалярному умножению, теоремы линейной алгебры могут непосредственно применяться для описания этих систем. Такие системы, которые можно описать как линейные отображения векторных пространств, были отнесены к гомоморфным системам. Этот термин подсказан алгебраическим определением гомоморфного (т. е. линейного) отображения векторных пространств. Операция $\bigcirc$ считается входной операцией системы, а операция $\square$ — выходной операци-

*) Будем предполагать, что эти сигналы являются функциями времени t. Однако читателю важно понять, что в аргументах нет ничего, что мешало бы рассмотрению сигналов как функций пространства, частоты или какого-либо другого параметра. Не имеется также никаких ограничений для рассматриваемых типов сигналов.

*) См., например, [4].

ей. Гомоморфная система с входной операцией ○, выходной операцией □ и преобразованием системы φ изображается, как показано на рис. 8.1.

Понятие гомоморфных систем обусловлено тем фактом, что при установленных ограничениях на совокуп-

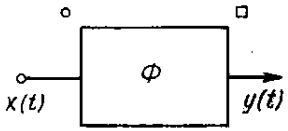


Рис. 8.1. Представление гомоморфной системы с входной операцией ○, выходной операцией □ и преобразованием системы φ.

ность входных сигналов можно всегда найти обращающую систему $\alpha_{\bigcirc}$, имеющую следующие свойства:

$$\alpha_{\bigcirc}^{-1}[x_1(t) \bigcirc x_2(t)] = \alpha_{\bigcirc}[x_1(t)] + \alpha_{\bigcirc}[x_2(t)]$$

и

$$\alpha_{\bigcirc}[c \curvearrowleft x(t)] = c\alpha_{\bigcirc}[x(t)],$$

т. е. гомоморфную с входной операцией ○ и выходной операцией +.

Подобным же образом можно найти обращающую гомоморфную систему $\beta_{\square}$ с входной операцией + и выходной операцией □. Так как $\alpha_{\bigcirc}$ и $\beta_{\square}$ обе являются обращающими, то систему φ можно далее представить, как показано на рис. 8.2. Система, ограниченная пунктирными линиями, является линейной системой, т. е. это гомо-

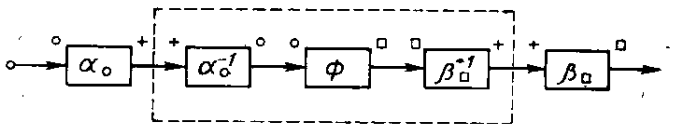


Рис. 8.2. Эквивалентное представление гомоморфной системы.

морфная система, в которой как входная, так и выходная операции являются операциями сложения. Если L означает линейное преобразование в этой системе, то рис. 8.2 можно представить в виде рис. 8.3. Такое каскадное включение может быть определено как каноническая форма гомоморфных систем.

Важно отметить, что система $\alpha_{\bigcirc}$ (или $\alpha_{\bigcirc}^{-1}$) определяется только совокупностью входных сигналов и входных

операций и что система $\beta_{\square}$ (или $\beta_{\square}^{-1}$) — только совокупностью выходных сигналов и выходных операций.

Если рассматривать классификацию гомоморфных систем по векторным пространствам входных и выходных сигналов (включая определение входных и выходных операций), то системы в пределах данного класса отличаются только в линейной части канонического представ-

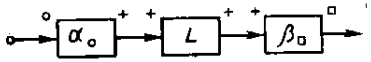


Рис. 8.3. Каноническое представление гомоморфной системы.

ления для этого класса. Можно также показать, что система рис. 8.3 гомоморфна с входной операцией ○ и выходной операцией □ при любом выборе линейной системы L. Соответственно, когда известны характеристические системы $\alpha_{\bigcirc}$ и $\beta_{\square}$ для данного класса, гомоморфные системы из этого класса могут быть получены путем изменения линейной системы L. Можно также показать, что только в том случае, когда входная и выходная операции для данного класса не требуют памяти (например, сложение и умножение в противоположность свертке), может быть найдена характеристическая система для этого класса, не имеющая памяти. При этом вся память системы концентрируется в линейной части канонического представления.

Чтобы легче уяснить эти идеи, рассмотрим класс гомоморфных систем с умножением в качестве входной операции и сложением в качестве выходной операции. На первом этапе мы должны доказать, что может быть построено векторное пространство, для которого векторное сложение соответствует произведению входных функций. Ограничим класс возможных входных сигналов положительными временными функциями. Так как умножение является коммутативным и ассоциативным, то оно удовлетворяет тем же алгебраическим постулатам, что и сложение. При таком определении векторного сложения инверсия вектора соответствует обратной функции по отношению к соответствующей временной функции, и так как наши временные функции ограничены тем, что они могут быть только положительными, то каждый входной

сигнал имеет соответствующий инверсный сигнал. Наложив ограничение, требующее, чтобы множество скалярных величин содержало только действительные величины, скалярное умножение в векторном пространстве можно определить как временную функцию, возведенную в скалярную степень. Другими словами, если $x_1(t) \bigcirc x_2(t) = x_1(t)x_2(t)$, то $c \bigcirc x(t) = [x(t)]^c$. Легко показать, что выбор такого типа скалярного умножения согласуется с требуемыми алгебраическими постулатами. Характеристическую систему $\alpha_\bigcirc$ можно получить, приняв, что, так как входная операция не требует памяти, то характеристическая система ее также не имеет. Таким образом, необходимо определить систему $\alpha_\bigcirc$ так, чтобы

$$\alpha_\bigcirc(x_1x_2) = \alpha_\bigcirc(x_1) + \alpha_\bigcirc(x_2), \quad \alpha_\bigcirc(x^c) = c\alpha_\bigcirc(x). \quad (8.11$$

Из (8.11) следует: $\alpha_\bigcirc^{-1}(cy) = [\alpha_\bigcirc^{-1}(y)]^c$, где $y = \alpha_\bigcirc(x)$.

Выбрав y равным единице, $\alpha_\bigcirc^{-1}(c) = [[\alpha_\bigcirc^{-1}(1)]^c$, и обозначив $\alpha_\bigcirc^{-1}(1)$ через b, $\alpha_\bigcirc^{-1}(c) = b^c$, получим $\alpha_\bigcirc(x) = \log_b x$.

Следовательно, характеристическая система для этого случая представляет собой логарифмический усилитель с произвольным основанием логарифма. Каноническая форма этого класса систем показана на рис. 8.4.

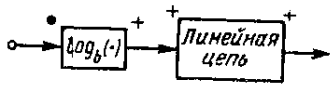


Рис. 8.4. Каноническая форма класса гомоморфных систем, для которых умножение — входная операция, а сложение — выходная.

8.3. ОБОБЩЕННАЯ ЛИНЕЙНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ

При проектировании фильтров или, в более общем случае, систем для обработки сигналов линейные системы играют существенную роль. Когда производится проектирование линейной части системы обработки сигналов, в большинстве случаев можно обосновать принятые решения и вести проектирование с помощью формальных расчетных процедур. С другой стороны, при расчете нелинейной части чаще всего приходится руководствоваться интуицией и эмпирическими суждениями. Понятие обобщенной суперпозиции дает возможность, по крайней

мере в некоторых случаях, применить к классу задач нелинейной фильтрации формальный метод, который является расширением формального подхода, лежащего в основе линейной фильтрации.

Задача линейной фильтрации, как это констатируется, связана с применением линейной системы для извлечения сигнала из суммы сигнала и шума. С точки зрения векторного пространства задачей линейной фильтрации можно считать определение такого линейного преобразования в векторном пространстве, которое сводит длину или норму вектора ошибки к минимуму. Норма для данного векторного пространства определяет используемый критерий ошибки. Во многих случаях, когда сигнал суммируется с шумом, линейная система не является лучшей системой. Рассмотрим, например, сигнал, квантованный с уровнями квантования 1, 2, 3, . . ., и допустим, что к нему добавились шумы с пиковыми значениями $\pm 0{,}25$. Ясно, что сигнал может быть точно восстановлен с помощью квантизатора, хотя его нельзя формально обосновать как оптимальный нелинейный фильтр. В менее очевидных случаях могут существовать одновременно формальные обоснования как для «лучшего» линейного фильтра, так и для «лучшего» нелинейного фильтра из некоторого класса, хотя полное и точное сравнение этих фильтров не всегда может быть проведено, хотя бы из-за того, что они часто используют различную информацию о входных сигналах.

Должно быть ясно, что обобщение понятия линейной фильтрации может производиться при фильтрации сигнала и шума, которые комбинируются неаддитивно, лишь при условии, что правило их комбинирования удовлетворяет алгебраическим постулатам векторного сложения. Например, если нужно восстановить сигнал $s(t)$ после такого воздействия шума $n(t)$, что принятым сигналом является $s(t) \bigcirc n(t)$, то необходимо связать $s(t)$ и $n(t)$ с векторами в векторном пространстве, а операцию $\bigcirc$ с векторным сложением. Тогда класс линейных преобразований в этом векторном пространстве окажется связанным с классом гомоморфных систем, для которых операция $\bigcirc$ является входной и выходной операцией. Следовательно, при обобщении проблемы линейной фильтрации на гомоморфную фильтрацию класс фильтров, из которого должен быть выбран оптимальный фильтр, будет классом таких гомоморфных систем, входные и вы-

ходные операции которых производятся по правилу, согласно которому объединены выделяемые сигналы.

Если x_1 и x_2 обозначают два сигнала, которые объединяются с помощью операции $\bigcirc$, то каноническая форма для класса гомоморфных фильтров, которые можно было бы использовать для восстановления x_1 или x_2, имеет вид, приведенный на рис. 8.5.

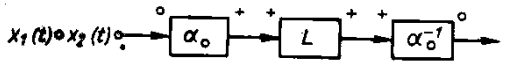


Рис. 8.5. Каноническая форма класса гомоморфных фильтров, используемых для разделения сигналов, объединенных с помощью операции $\bigcirc$.

Система $\alpha_\bigcirc$ и обратная ей являются характеристическими для этого класса, и, следовательно, при выборе системы из класса необходимо определить только линейную систему L. Кроме того, мы видим, что, поскольку система $\alpha_\bigcirc$ гомоморфна с входной операцией $\bigcirc$ и выходной операцией $+$, то входным сигналом линейной системы L является $\alpha_\bigcirc(x_1)+\alpha_\bigcirc(x_2)$. Так как выходной сигнал линейного фильтра затем преобразуется с помощью обращения $\alpha_\bigcirc^{-1}$ и так как сигнал x_1 должен быть восстановлен из комбинации $x_1 \bigcirc x_2$, то требуемым выходным сигналом линейной системы является $\alpha_\bigcirc(x_1)$. Следовательно, задача сводится к линейной фильтрации, и может применяться полностью формальный аппарат, применяемый в этом случае.

Следует подчеркнуть, что подход к нелинейной фильтрации, основанный на обобщенной суперпозиции, является лишь одним из многих возможных подходов. Основное его ценное качество состоит в том, что так же, как и при линейной фильтрации просуммированных сигналов, он удобен с точки зрения анализа и фактически сводится к проблеме линейной фильтрации. Хотя на практике при решении большинства задач линейной фильтрации для оптимального выбора фильтра обычно не выполняются формальные расчеты, критерием ошибки, получившим самое широкое распространение, является среднеквадратическая ошибка (или интегральная квадратическая ошибка для апериодических сигналов). При рассмотрении критерия ошибки для гомоморфных

фильтров естественно было бы выбрать такой тип критерия, который позволяет выбирать линейный фильтр на основе среднеквадратической ошибки. Этот выбор может быть обоснован формально [8], но в любом случае естественно считать, что система оптимизируется, если оптимизируется линейный фильтр.

К двум типам задач, где оказалась полезной идея гомоморфной фильтрации, относятся фильтрация перемноженных сигналов и фильтрация свернутых сигналов. В следующих параграфах будут рассмотрены эти два класса гомоморфных фильтров.

8.4. ГОМОМОРФНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ПЕРЕМНОЖЕННЫХ СИГНАЛОВ

Существует множество задач, где сигнал может быть выражен как произведение компонент, которые необходимо выделить или по отдельности видоизменить. Например, при передаче сигнала по каналу с замираниями можно промоделировать эффект замирания, приписав к передаваемому сигналу медленно изменяющийся мно-

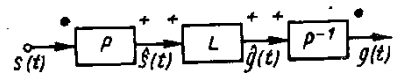


Рис. 8.6. Каноническая форма класса гомоморфных фильтров, используемых для разделения сигналов, объединенных путем перемножения.

житель, который желательно было бы устранить в приемнике. Другим примером является амплитудно-модулированный сигнал, который представляется как произведение сигнала несущей частоты и огибающей функции, выделяемой в приемнике. Имеются также примеры, связанные со сжатием звукового динамического диапазона и обработкой изображения.

Как уже говорилось, умножение удовлетворяет требуемым алгебраическим постулатам, и, следовательно, может рассматриваться гомоморфная система, основанная на умножении. Поэтому рассмотрим класс фильтров, описываемый канонической формой рис. 8.6, где система обладает свойствами

$$P[s_1 s_2] = P[s_1] + P[s_2] \tag{8.12а}$$

и

$$P[s^c] = cP[s]. \tag{8.12б}$$

В общем случае желательно рассмотреть входные сигналы в виде комплексных функций, задаваемых рядом скалярных величин, действительных или комплексных. Если для этого более общего случая попытаться определить логарифмическое преобразование как характеристическую систему, то возникнет проблема разрешения неоднозначности, связанная с логарифмом комплексной функции. Стандартный прием определения основного значения комплексного логарифма в этом случае не может быть использован, так как основное значение логарифма произведения комплексных сигналов не всегда является суммой основных значений, соответствующих отдельным комплексным сигналам, и, таким образом, может не удовлетворять условию (8.12).

Чтобы определить характеристическую систему для этого более общего случая, напомним, что неоднозначность комплексной логарифмической функции является следствием того, что к мнимой части комплексного логарифма можно прибавить произвольное целое число величин $j2\pi$, т. е. прибавить член вида $jm(t)2\pi$, где $m(t)$ может принимать только целые значения. Проще говоря, неоднозначность можно разрешить, если потребовать, чтобы мнимая часть комплексного логарифма была непрерывной функцией времени, которая может принимать только фиксированные значения. Формально, пусть $\hat{s}(t)$ означает отклик характеристической системы P:

$$\hat{s}(t) = P[s(t)].$$

Потребуем, чтобы $s(t)$ был ненулевым и непрерывным, и определим

$$\frac{d}{dt}\hat{s}(t) = \frac{1}{s(t)}\frac{ds(t)}{dt} \tag{8.13}$$

или

$$\hat{s}(t) = \int_{t_0}^{t} \frac{1}{s(t)}\frac{ds(t)}{dt}\,dt \tag{8.14а}$$

при

$$\hat{s}(t_0) = 0. \tag{8.14б}$$

Уравнения (8.13) и (8.14) однозначно определяют комплексный логарифм. При такой интерпретации можно на-

писать, что $\hat{s}(t) = \ln s(t)$. Инверсная система P^{-1} является комплексной экспоненциальной функцией.

В общем случае можно допустить, что входные и выходные сигналы системы P являются комплексными, и независимо от этого выбрать ряд скалярных действительных или комплексных величин c, связанных с входными сигналами. Линейную систему общего вида можно представить в канонической форме с помощью четырех подсистем, входные и выходные сигналы которых действительные, как показано на рис. 8.7. Если потребовать, чтобы

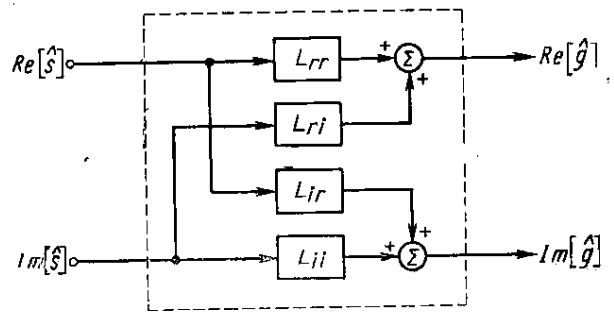


Рис. 8.7. Общее представление линейной системы с комплексными входными и выходными сигналами.

скалярные величины c принимали только действительные значения, то система L (рис. 8.6) будет удовлетворять принципу суперпозиции только в том случае, когда ее входные сигналы умножаются на действительные скалярные величины. При этих условиях четыре подсистемы на рис. 8.7 будут независимыми. Если же вместо этого связать ряд входных сигналов с комплексными скалярными величинами, то система L (рис. 8.6) должна будет удовлетворять суперпозиции при умножении входных сигналов на комплексные скалярные величины. Можно непосредственно установить, что для этого требуется, чтобы

$$L_{rr} = L_{ii} \tag{8.15а}$$

и

$$L_{ri} = -L_{ir}. \tag{8.15б}$$

8.5. ГОМОМОРФНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ СВЕРНУТЫХ СИГНАЛОВ

Многие представляющие интерес функции можно представить как свертку составляющих сигналов. Например, при связи или звукозаписи в условиях многолучевости или реверберации вносимые искажения можно представить как результат свертки шума с требуемым сигналом. При обработке речевых сигналов часто желательно разделить эффекты, вызванные импульсной характеристикой речевого тракта и возбуждением. По крайней мере на коротких интервалах времени, можно считать, что сигнал возбуждения и импульсная характеристика свертываются в процессе формирования сигналов речи [2]. Примером другого рода является разделение функций плотности вероятности, которые свертываются при сложении независимых случайных процессов.

Обычным подходом к развертке является метод инверсной фильтрации. В этом случае нежелательные компоненты обрабатываемого сигнала устраняются путем фильтрации с помощью линейной системы, передаточная функция которой является обратной по отношению к преобразованию Фурье для этих компонент. Ясно, что этот метод приемлем только для таких ситуаций, где имеется подробная модель или описание устраняемых компонент. Такой подход является плодотворным, например, при восстановлении функции возбуждения по сигналам речи, так как разработаны точные модели голосового тракта.

Инверсная фильтрация аналогична способу устранения эффекта аддитивного шума путем вычитания. Если шум точно известен, за исключением лишь нескольких параметров, то может быть целесообразным представить восстановление сигнала как вычитание шума из суммы. Однако во многих случаях нельзя получить подробную информацию о нежелательных компонентах сигнала, и поэтому такие методы, как вычитание в аддитивном случае и инверсная фильтрация в случае свертки, нельзя использовать.

При применении понятия гомоморфной фильтрации для разделения свернутых сигналов вначале следует определить характеристическую систему для этого класса фильтров. Хотя результаты могут быть сформулированы применительно к непрерывным или дискретным входным сигналам, обработку, которая будет описана, легче всего реализовать на цифровой вычислительной машине. Следовательно, рассмотрение будет вестись с позиций дискретного временного ряда *). Таким образом, мы считаем, что последовательность $s(n)$ состоит из дискретной свертки двух последовательностей $s_1(n)$ и $s_2(n)$:

$$s(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} s_1(k)\,s_2(n-k)$$

или

$$s(n)=s_1(n)\otimes s_2(n), \tag{8.16}$$

где $\otimes$ обозначает дискретную свертку. Каноническая форма класса гомоморфных фильтров представлена симво-

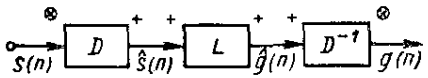


Рис. 8.8. Каноническая форма класса гомоморфных фильтров, применяемых для разделения сигналов, объединенных с помощью свертки.

лически на рис. 8.8, где D — характеристическая система для класса, имеющая следующее свойство:

$$D[s_1(n)\otimes s_2(n)]=\hat{s}_1(n)+\hat{s}_2(n). \tag{8.17}$$

Здесь $\hat{s}_1(n)$ и $\hat{s}_2(n)$ являются откликами D на входные сигналы $s_1(n)$ и $s_2(n)$ соответственно.

Пусть $S(z)$ и $\hat{S}(z)$ обозначают двусторонние z-преобразования от $s(n)$ и $\hat{s}(n)$ соответственно:

$$S(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} s(n)\,z^{-n}, \tag{8.18а}$$

$$\hat{S}(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{s}(n)\,z^{-n}, \tag{8.18б}$$

$$s(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c_1} S(z)\,z^{n-1}dz \tag{8.18в}$$

*) Для удобства обозначения в дальнейшем предполагается, что период дискретизации T равен единице. Таким образом, отсчеты временной функции представляются как $f(n)$, а не как $f(nT)$. Переменная z на единичной окружности, необходимая для z-преобразования, представляется величиной $z=e^{j\omega}$.

и

$$\hat{s}(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_{c_2}\hat{S}(z)\,z^{n-1}dz, \qquad (8.18г)$$

где c_1 и c_2 — замкнутые контуры интегрирования в z-плоскости. Для удобства обозначения предположим, что в качестве c_1 и c_2 всегда берется единичная окружность $z=e^{j\omega}$. Хотя это несколько ограничивающее условие, полученные результаты легко модифицировать, чтобы охватить общий случай.

Из выражений (8.16) и (2.12) следует, что

$$S(z)=S_1(z)S_2(z), \qquad (8.19)$$

где $S_1(z)$ и $S_2(z)$ — z-преобразования от $s_1(n)$ и $s_2(n)$ соответственно. Следовательно, на основании результатов предыдущего параграфа, приложенных здесь к функциям частоты, можно получить соотношение между $S(z)$ и $S(z)$ с помощью соответственно определенного логарифмического преобразования.

Пусть требуется, чтобы $S(z)$ и $\hat{S}(z)$ были аналитическими функциями без особых точек на единичной окружности. Взяв

$$S(e^{j\omega})=S_R(e^{j\omega})+jS_I(e^{j\omega}) \qquad (8.20а)$$

и

$$\hat{S}(e^{j\omega})=\hat{S}_R(e^{j\omega})+j\hat{S}_I(e^{j\omega}), \qquad (8.20б)$$

можно поставить условие, чтобы S_R, $\hat{S}_R$, S_I и $\hat{S}_I$ были непрерывными функциями от ω. Так как z-преобразование является периодической функцией от ω с периодом 2π, то дополнительно потребуем, чтобы $\hat{S}_R$ и $\hat{S}_I$ были периодическими по ω. Кроме того, можно наложить ограничение, чтобы $s(n)$ и $\hat{s}(n)$ были действительными функциями, тогда S_R и $\hat{S}_R$ будут четными функциями от ω, а S_I и $\hat{S}_I$ — нечетными функциями от ω. Поэтому из (8.13) найдем

$$\frac{d\hat{S}}{d\omega}=\frac{1}{S(\omega)}\,\frac{dS(\omega)}{d\omega},$$

откуда

$$\hat{S}_R=\ln|S| \qquad (8.21а)$$

и

$$\frac{d\hat{S}_I}{d\omega}=\frac{S_R^2}{S_I^2+S_R^2}\,\frac{d}{d\omega}\,\frac{S_I}{S_R} \qquad (8.21б)$$

при

$$|\hat{S}_I(e^{j\omega})|_{\omega=0}=0.$$

Таким образом, мнимая часть $\hat{S}$ интерпретируется как угол S, рассматриваемый как непрерывная, нечетная, периодическая функция от ω. Тогда отклик системы D соответствует обратному преобразованию от комплексного логарифма преобразования.

Подобное сложное преобразование было введено Богертом, Хили и Таки [1] применительно к спектру мощности. Они предложили использовать спектр мощности логарифма спектра мощности как средство для обнаружения отраженных сигналов. Результат этого ряда операций ими был назван *кепстром*. Ясно, что $\hat{s}(n)$ тесно связан с кепстром. Основные различия между ними связаны с тем, что при определении $\hat{s}(n)$ необходимо использовать понятия *комплексного* преобразования Фурье и *комплексного* логарифма. Чтобы подчеркнуть их родство и указать на имеющиеся различия, удобно считать $\hat{s}(n)$ комплексным кепстром.

8.6. СВОЙСТВА КОМПЛЕКСНОГО КЕПСТРА

Хотя (8.21) полностью определяет комплексный кепстр, соотношению между $s(n)$ и $\hat{s}(n)$ можно придавать различный вид с тем, чтобы лучше проявились свойства этого кепстра. Применив выражение (8.21), интерпретирующее комплексный логарифм, напишем

$$\hat{s}(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint\ln[S(z)]\,z^{n-1}dz. \qquad (8.22)$$

Так как контуром интегрирования является единичная окружность и $\ln S(z)$ определен как однозначная функ-

ция, можно переписать (8.22) следующим образом:

$$\hat{s}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln[S(e^{j\omega})]\,e^{j\omega n}d\omega.$$

Интегрируя по частям и используя тот факт, что согласно принятому допущению $S_l(e^{j\omega})$ является непрерывной, нечетной, периодической функцией от ω, получим

$$\hat{s}(n)=-\frac{1}{2\pi jn}\oint z\frac{S'(z)}{S(z)}z^{n-1}dz,\qquad n\neq 0,$$

$$\hat{s}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\ln|S(e^{j\omega})|\,d\omega,\qquad n=0, \tag{8.23}$$

где $S'(z)$ обозначает производную от $S(z)$ по z.

Примером функций $S(z)$, удовлетворяющих требованию, чтобы $S(z)$ и $\hat{S}(z)$ были аналитическими, является класс функций вида

$$S(z)=|K|\frac{\prod_{i=1}^{M_0}(1-a_iz^{-1})\prod_{i=1}^{M_1}(1-b_iz)}{\prod_{i=1}^{P_0}(1-c_iz^{-1})\prod_{i=1}^{P_1}(1-d_iz)}, \tag{8.24}$$

где a_i и c_i — нули и полюсы внутри единичной окружности, а $1/b_i$ и $1/d_i$ — нули и полюсы снаружи единичной окружности. Заметим, что для этого класса функций полюсы интегрируемой функции в (8.23) появляются в точках полюсов и нулей $S(z)$. Соответственно, $\hat{s}(n)$ будет состоять из суммы экспоненциальных функций, деленной на n.

Уравнение (8.23) можно переписать в несколько иной форме, если учесть, что

$$\hat{S}'(z)=\frac{S'(z)}{S(z)}$$

или

$$\hat{S}'(z)\,S(z)=S'(z). \tag{8.25}$$

Используя тот факт, что $z\hat{S}'(z)$ представляет собой z-преобразование от $n\hat{s}(n)$, а $zS'(z)$ является z-преобразованием от $-ns(n)$, можно написать обратное z-преобразование от (8.25) следующим образом:

$$[n\hat{s}(n)]\otimes s(n)=ns(n)$$

или

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{k}{n}\hat{s}(k)\,s(n-k)=s(n),\qquad n\neq 0. \tag{8.26}$$

В общем случае это соотношение между $s(n)$ и $\hat{s}(n)$ является неявным и его нельзя вычислить. Однако если предположить, что $s(n)$ и $\hat{s}(n)$ равны нулю для отрицательного n и что $s(0)\neq 0$, то (8.26) примет вид

$$\hat{s}(n)=\begin{cases}\dfrac{s(n)}{s(0)}-\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\frac{k}{n}\hat{s}(k)\frac{s(n-k)}{s(0)}, & n\neq 0,\\[2ex] \ln s(0), & n=0.\end{cases} \tag{8.27}$$

Для этого случая инверсия характеристической системы легко может быть найдена, если решить (8.27) относительно $s(n)$, выразив его через $\hat{s}(n)$:

$$s(n)=\begin{cases}s(0)\,s(n)+\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}k\hat{s}(k)\,s(n-k), & n\neq 0\\[2ex] e^{\hat{s}(0)}, & n=0.\end{cases} \tag{8.28}$$

8.7. МИНИМАЛЬНО ФАЗОВЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГИЛЬБЕРТА

Для определенного класса функций, называемых функциями с минимальной фазой или минимальной задержкой, фаза, связанная с преобразованием Фурье, однозначно определяется величиной преобразования Фурье. Для временных функций $f(t)$, имеющих рацио-

нальные преобразования Лапласа, обычно говорят, что $f(t)$ является минимально фазовой, если преобразование Лапласа не содержит нулей или полюсов в правой половине комплексной частотной плоскости. Для последовательностей $f(n)$, имеющих рациональные z-преобразования, обычно говорят, что $f(n)$ является минимально фазовой, если z-преобразование не содержит нулей или полюсов снаружи единичной окружности.

Для последовательностей (или временны́х функций), являющихся минимально фазовыми, логарифм амплитуды z-преобразования, вычисленного на единичной окружности, и фаза связаны преобразованием Гильберта. Интересно, что вывод этого соотношения может быть интерпретирован с помощью понятия комплексного кепстра. В частности, как мы увидим, минимально фазовую последовательность можно определить как последовательность, комплексный кепстр которой равен нулю для n (или t), меньшего нуля. Тогда для минимально фазовых последовательностей применимы рекурсивные соотношения (8.27) и (8.28). Чтобы подробно развить эти идеи, применительно к дискретным последовательностям и z-преобразованиям, необходимо рассмотреть, достаточно ли для их описания знания действительной части и соотношений преобразования Гильберта. Аргументы, подобные приводимым, имеются в специальной литературе для случая непрерывных временны́х функций [3].

Рассмотрим последовательность $f(n)$, равную нулю для $n<0$, у которой z-преобразование, вычисленное на единичной окружности, равно $F(e^{j\omega})$. Можно выразить $f(n)$ как сумму четной и нечетной последовательностей:

$$f(n)=f_e(n)+f_0(n)$$

при

$$f_e(n)={}^1/_2[f(n)+f(-n)]$$

и

$$f_0(n)={}^1/_2[f(n)-f(-n)].$$

Так как $f(n)=0$ для $n<0$, то

$$f_0(n)=f_e(n)\,w(n) \tag{8.29}$$

и

$$f_e(n)=f_0(n)\,w(n)+f_e(0)\,\delta(n), \tag{8.30}$$

где

$$w(n)=\begin{cases}1, & n>0;\\ 0, & n=0;\\ -1, & n<0;\end{cases}\qquad \delta(n)=\begin{cases}1, & n=0,\\ 0, & n\neq 0.\end{cases}$$

Если $F_R(e^{j\omega})$ и $F_I(e^{j\omega})$ есть действительная и мнимая части $F(e^{j\omega})$, то это означает, что $F_R(e^{j\omega})$ и $F_I(e^{j\omega})$ являются преобразованиями от $f_e(n)$ и $f_0(n)$ соответственно. Кроме того, из теоремы о комплексной свертке (2.16) и соотношения (8.29) следует:

$$jF_I(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_R(e^{j\Omega})\,G[e^{j(\omega-\Omega)}]\,d\Omega,$$

где $G(e^{j\omega})$ есть преобразование от $w(n)$.

Можно доказать, что

$$G(e^{j\omega})=-j\operatorname{ctg}\frac{\omega}{2},$$

и, следовательно,

$$F_I(e^{j\omega})=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_R(e^{j\Omega})\operatorname{ctg}\frac{\omega-\Omega}{2}\,d\Omega. \tag{8.31}$$

Подобным же образом из (8.30) следует, что

$$F_R(e^{j\omega})=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F_I(e^{j\Omega})\operatorname{ctg}\frac{\omega-\Omega}{2}\,d\Omega+f_e(0). \tag{8.32}$$

Уравнения (8.31) и (8.32) отражают тот факт, что для последовательностей, равных нулю при $n<0$, мнимая часть z-преобразования на единичной окружности однозначно определяется действительной частью, а действительная часть однозначно определяется (с точностью до постоянной) мнимой частью. Это свойство часто называют достаточностью действительной части, а (8.31) и (8.32) можно рассматривать как выражения для преобразования Гильберта, связывающие действительную и мнимую части дискретных последовательностей.

Определим минимально-фазовую функцию как функцию, у которой *фаза* и *логарифмическая амплитуда* связаны преобразованием Гильберта так, что

$$\theta(e^{j\omega})=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln|F(e^{j\Omega})|\operatorname{ctg}\frac{\omega-\Omega}{2}\,d\Omega.$$

Это соответствует применению понятия достаточности действительной части к логарифму $F(e^{j\omega})$ или, что

эквивалентно, применению соотношений (8.29) и (8.30) к комплексному кепстру. При такой интерпретации аналогично можно утверждать, что комплексный кепстр минимально фазовой последовательности равен нулю при $n<0$.

Чтобы связать эту интерпретацию с утверждением, что минимально фазовая последовательность — это такая последовательность, для которой все полюсы и нули лежат внутри единичной окружности, обратимся к (8.23). В общем случае полюсы подынтегральной функции будут в точках полюсов и нулей $S(z)$. В том случае, когда единичная окружность принимается в качестве контура интегрирования, $\hat{s}(n)$ будет равно нулю для $n<0$, если подынтегральная функция в (8.23) не имеет полюсов снаружи единичной окружности. Это означает, что $S(z)$ не должна иметь полюсов или нулей вне единичной окружности.

Из сказанного выше можно сделать вывод, что для входных последовательностей, являющихся минимально-фазовыми, входные и выходные сигналы системы D связаны рекурсивным соотношением (8.27), а входные и выходные сигналы системы D^{-1} связаны рекурсивным соотношением (8.28). Эти рекурсивные соотношения не обязательно дают преимущества при вычислениях. Однако они имеют принципиально важное значение. В частности, они проливают свет на тот факт, что для входных минимально-фазовых сигналов преобразование D является реализуемым, т. е. отклик $\hat{s}(n)$ при $n=n_0$ зависит только от отсчетов входного сигнала для $n\leqslant n_0$. Подобным же образом, обратное преобразование D^{-1} реализуемо для входных последовательностей $\hat{s}(n)$, равных нулю для $n<0$. Отсюда можно заключить, что для входных минимально-фазовых последовательностей класс гомоморфных фильтров, определяемый канонической формой рис. 8.8, может быть реализован (в том смысле, что выходной сигнал зависит только от предыдущих значений входного сигнала), если линейный фильтр также реализуем.

Аналогичное рассмотрение может быть проведено для последовательностей, комплексный кепстр которых равен нулю для $n>0$. Такие последовательности, которые не имеют минимально-фазовых компонент, можно соответственно назвать *максимально-фазовыми последовательностями*. Для этих случаев можно вывести соотношение, подобное (8.27), в котором значения комплексного кепстра зависят от будущих, а не от прошлых значений входного сигнала. Следует заметить, что любую последовательность всегда можно выразить как свертку минимально-фазовой и максимально-фазовой последовательностей, т. е.

$$s(n)=s_1(n)\otimes s_2(n).$$

Часть $\hat{s}(n)$ для $n>0$ образована минимально-фазовой составляющей, а часть для $n<0$ — максимально-фазовой составляющей.

Из этих рассуждений следует интересный и, пожалуй, полезный результат. Рассмотрим ограниченную во времени последовательность $s(n)$, содержащую $N+1$ отсчетов. Тогда ее z-преобразование является рациональной функцией только с одними нулями. Выберем исходную точку и полярность сигнала так, чтобы $S(z)$ можно было выразить в виде (8.24). Теперь $s(n)$ можно выразить как свертку минимально-фазовой последовательности $s_1(n)$ и максимально-фазовой последовательности $s_2(n)$, где $s_1(n)$ и $s_2(n)$ ограничены во времени:

$$s_1(n)\begin{cases}\neq 0, & 0\leqslant n\leqslant N_1,\\ =0, & \text{для всех других } n\end{cases}$$

и

$$s_2(n)\begin{cases}\neq 0, & -N_2\leqslant n\leqslant 0,\\ =0, & \text{для всех других } n.\end{cases}$$

Здесь

$$N_1+N_2=N.$$

Комплексный кепстр от $s_1(n)$ в общем случае не ограничен во времени. Однако $\hat{s}_1(n)$ равно нулю при $n<0$ и $\hat{s}_2(n)$ равно нулю при $n\geqslant 0$. Таким образом, из (8.26) следует, что

$$s_1(n)=\begin{cases} e^{\hat{s}_1(0)}, & n=0,\\ \hat{s}_1(n)\,s_1(0)+\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(\frac{k}{n}\right)\hat{s}_1(k)\,s_1(n-k), & n>0,\end{cases}$$

и

$$s_2(n)=\begin{cases}1, & n=0,\\ \hat{s}_2(n)+\sum\limits_{k=n+1}^{0}\left(\frac{k}{n}\right)\hat{s}_2(k)\,s_2(n-k), & n<0.\end{cases}$$

Следовательно, для восстановления $s_1(n)$ требуется N_1+1 значений $\hat{s}_1(n)$, для восстановления $s_2(n)$ требуется N_2 значений $\hat{s}_2(n)$, а для получения N_1+N_2+1 значений $s(n)$ необходимо N_1+N_2+1 значений комплексного кепстра.

8.8. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ С РАЦИОНАЛЬНЫМИ z-ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ

До сих пор рассмотрение ограничивалось входными последовательностями, для которых $S(z)$ и $\hat{S}(z)$ являются аналитическими, и в этом случае логарифм z-преобразования на единичной окружности определялся так, что мнимая часть логарифма была непрерывной, нечетной, периодической функцией от ω. Было отмечено, что это касается всех последовательностей с z-преобразованиями вида (8.24).

Разумно предположить, что большинство входных последовательностей, представляющих интерес, могут быть представлены, по крайней мере приближенно, рациональными z-преобразованиями вида:

$$S(z)=Kz^{r}\frac{\prod\limits_{i=1}^{M_0}(1-a_iz^{-1})\prod\limits_{i=1}^{M_0}(1-b_iz)}{\prod\limits_{i=1}^{P_1}(1-c_iz^{-1})\prod\limits_{i=1}^{P_1}(1-d_iz)}. \qquad (8.33)$$

Уравнение (8.33) отличается от (8.24) тем, что в него входит член z^r, выражающий задержку или опережение последовательности, и тем, что в постоянном множителе K учитывается не только абсолютное значение, но и знак, и поэтому больше нет необходимости в том, чтобы $S(z)$ было положительным для $z=1$ ($\omega=0$). Хотя в принципе можно формально создать структуру для образования сигнала с z-преобразованием наиболее общего вида, она не даст реального преимущества. В частности, если рассматривать конкретную задачу, а именно разделение свернутых сигналов, то вряд ли удастся определить, а вероятнее всего вообще не будет необходимости в определении того, насколько каждый из сигналов влияет на величину и знак постоянной K. Подобным же образом вряд ли можно определить, как велико влияние каждого сигнала на схемную задержку или опережение r. В этой задаче, по-видимому, особый интерес будет представлять только форма составляющих, а не их амплитуды или начало отсчета времени.

Если допустимо такое упрощение задачи, то можно определить раздельно алгебраический знак K и величину r, а затем изменить входной сигнал (или его преобразование) так, чтобы z-преобразование имело форму (8.24).

8.9. ВЫЧИСЛЕНИЕ КОМПЛЕКСНОГО КЕПСТРА

Из предыдущего рассмотрения входных последовательностей общего вида следует, что для вычисления комплексного кепстра требуется предварительно вычислить преобразование Фурье от входного сигнала, причем по практическим соображениям требуется, чтобы входной сигнал $s(n)$ содержал только конечное число точек, т. е. был ограничен во времени, и чтобы преобразование вычислялось только на дискретных частотах. Таким образом, при выполнении преобразования D мы заменяем z-преобразование и его инверсию парой дискретных преобразований Фурье (ДПФ), определяемой как

$$F(k)=\sum_{k=0}^{N-1}s(n)\,W^{nk} \quad \text{и} \quad s(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}F(k)\,W^{-nk},$$

где $W=e^{-2\pi j/N}$.

Следовательно, комплексный кепстр, вычисленный с помощью ДПФ, определяется выражением

$$\hat{s}_d(n)=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[\ln S(k)]\,W^{-nk}=$$

$$=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}[\ln|S(k)|+j\theta(k)]\,W^{-nk} \qquad (8.34)$$

при

$$S(k)=\sum_{k=0}^{N-1} s(n)\,W^{nk}.$$

Можно непосредственно убедиться в том, что $\hat{s}_d(n)$ является вариантом $\hat{s}(n)$ с учетом наложения спектров, т. е. что

$$\hat{s}_d'(n)=\sum_{a=-\infty}^{\infty} \hat{s}(aN+n).$$

Эффект наложения зависит от значения частоты, с которой берутся отсчеты спектра, или, что эквивалентно, от значения N.

Во многих случаях вычисление комплексного кепстра — задача нетрудная, потому что имеется относительно быстрый и эффективный метод вычисления дискретного преобразования Фурье для большого N (см. гл. 6).

Фазовую кривую $\theta(k)$ можно вычислить, если сначала вычислить фазу по модулю 2π и затем «развернуть» ее, чтобы удовлетворить требованиям непрерывности и нечетности. Для этого нетрудно составить простые алгоритмы при условии, что частотный интервал между соседними точками достаточно мал.

В качестве альтернативы для вычисления комплексного кепстра с помощью (8.34) можно найти $\hat{s}(n)$, составив отношение производной спектра и самого спектра в соответствии с выражением (8.23). В частности, так как отсчеты производной спектра, которые обозначим через $\hat{S}(k)$, могут быть получены с помощью выражения

$$\hat{S}(k)=\sum_{a=0}^{N-1} nf(n)\,W^{nk},$$

то дискретная аппроксимация $\hat{s}_d(n)$ будет иметь вид

$$\hat{s}_d(n)=-\frac{1}{jn}\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{\hat{S}(k)}{S(k)}W^{-nk}. \qquad (8.35)$$

Комплексный кепстр, вычисленный по формуле (8.35), несколько отличается от комплексного кепстра, полученного из (8.34).

Различие может быть установлено, если учесть, что $n\hat{s}_d(n)$, представленное выражением (8.35), является копией $n\hat{s}(n)$ с учетом наложения спектров, т. е.

$$n\hat{s}_d(n)=\sum_{a=-\infty}^{\infty}(aN+n)\,\hat{s}(aN+n)$$

или

$$\hat{s}_d(n)=\frac{1}{n}\sum_{a=-\infty}^{\infty}(aN+n)\,\hat{s}(aN+n). \qquad (8.36)$$

Отметим, что в общем случае эффект наложения спектров при использовании (8.35) учитывается более строго, чем с помощью (8.34). С другой стороны, применение (8.34) требует детального вычисления фазовой кривой в явной форме, чего не требуется при использовании (8.35).

8.10. ПРИМЕНЕНИЕ ГОМОМОРФНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

В предыдущих параграфах рассматривались аналитические аспекты гомоморфной фильтрации, вообще, и фильтрации перемноженных и свернутых сигналов, в частности. В остальной части этой главы будут рассмотрены некоторые специфические случаи применения фильтрации, вытекающие из этой теории. С успехом были реализованы четыре случая применения—два, использующие идеи гомоморфной фильтрации перемноженных сигналов, и два, использующие идеи гомоморфной фильтрации свернутых сигналов. Первые два касаются сжатия и расширения динамического диапазона звуковых колебаний [17] и сжатия динамического диапазона и усиления контрастности изображений [13]. Два других случая касаются борьбы с эхо-сигналами при отражении волн [15, 16] и анализа и сжатия полосы частот речи [11, 12, 14]. Ограничимся в этой главе рассмотрением только двух из этих примеров применения, а именно сжатия динамического диапазона и усиления контрастности изображений, а также анализа сжатия полосы частот речи.

8.11. ГОМОМОРФНАЯ ОБРАБОТКА ИЗОБРАЖЕНИЙ

Как показал Стокхэм, образование изображения является преимущественно мультипликативным процессом. В естественных условиях наблюдаемая яркость, запечатленная на сетчатке глаза или на фотографической пленке, может рассматриваться как произведение двух составляющих: функции освещенности и функции отражательной способности. Функция освещенности описывает освещенность спектра в различных точках, и ее можно считать независимой от предметов, расположенных на этой сцене *). Функция отражательной способности характеризует детали сцены и может считаться независимой от освещенности. Таким образом, изображение может быть представлено как двумерный пространственный сигнал, выраженный в форме

$$I_{x,y}=i_{x,y}\cdot r_{x,y}>0,$$

где $I_{x,y}$ — изображение, $i_{x,y}$ — составляющая освещенности, а $r_{x,y}$ — составляющая отражательной способности. Отрицательные значения яркости по физическим причинам исключаются, а нулевая яркость исключается по практическим соображениям.

При обработке изображения часто возникают две задачи — сжатие динамического диапазона и усиление контрастности. Первая из них вызвана тем, что часто встречаются сцены с чрезмерными отношениями уровня светлого к уровню темного, что приводит к слишком большому динамическому диапазону по сравнению с возможностями имеющегося приемника, например фотографической пленки. Решение состоит в записи модифицированной интенсивности $I'_{x,y}$, связанной с $I_{x,y}$, в следующем виде:

$$I'_{x,y}=I^{\gamma}_{x,y}. \qquad (8.37)$$

Параметр γ хорошо известен фотографам, которые выбором фотоматериалов и изменением времени проявления регулируют численное значение γ. Когда γ выбрано положительным, но меньшим единицы, происходит сжатие динамического диапазона.

Другая задача состоит в такой обработке изображения, которая увеличивала бы контрастность, придавая бо́льшую четкость краям предметов. Это усиление контрастности часто достигается модификацией картины распределения пространственной яркости в соответствии с (8.37) при γ, выбранном больше единицы.

Ясно, что при таком специфическом подходе сжатие динамического диапазона и усиление контрастности являются противоречивыми задачами. Сжатие динамического диапазона, достигаемое при использовании γ, меньшего единицы, вызывает уменьшение контрастности и доведенное до крайности дает темное или размытое изображение. Усиление контрастности, достигнутое применением γ, большего единицы, увеличивает динамический диапазон изображения, причем в результате этого часто еще более затрудняется возможность передачи этого диапазона.

Для получения приемлемой аппроксимации сжатие динамического диапазона можно рассматривать как проблему, сосредоточенную на функции освещенности $i_{x,y}$, а усиление контрастности — как проблему, сосредоточенную на функции отражательной способности $r_{x,y}$, т. е. считать, что большие динамические диапазоны, встречающиеся в естественных изображениях, обусловлены главным образом большим изменением освещенности, в то время как очертания краев предметов связаны только с составляющей отражательной способности. Таким образом, можно отдельно ввести функции отражательной способности и освещенности, модифицировать каждую из них раз-

*) Освещенность зависит от размеров и формы сцены, но по существу не зависит от ее отражательной способности.

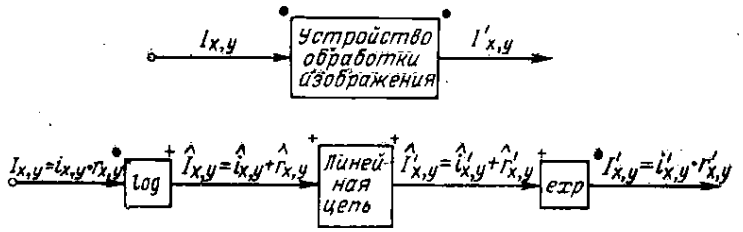


Рис. 8.9. Каноническая форма устройства обработки изображения, производящего раздельное изменение компонент освещенности и отражательной способности исходного изображения.

личными показателями степени и затем восстановить их для того, чтобы сформировать модифицированное изображение. При таком подходе модифицированная яркость $I''_{x,y}$ будет

$$I''_{x,y}=(i_{x,y})^{\gamma_i}(r_{x,y})^{\gamma_r}, \qquad (8.38)$$

где γ_i меньше единицы для сжатия динамического диапазона и γ_r больше единицы для усиления контрастности.

Имея перед собой эту задачу, можно говорить об обработке изображения с помощью гомоморфного фильтра, т. е. о раздельной обработке составляющих освещенности и отражательной способности. Такое устройство обработки изображения могло бы иметь вид, показанный на рис. 8.9. Функция освещенности обычно изменяется медленно, в то время как отражательная способность часто (но не всегда) изменяется быстро, так как предметы изменяют структуру и размеры и почти всегда имеют хорошо очерченные края. Если бы $\ln i_{x,y}$ и $\ln r_{x,y}$ имели частотные составляющие, занимающие отдельные области пространственных частот, то их можно было бы обработать по отдельности в соответствии с рис. 8.9. Целесообразно

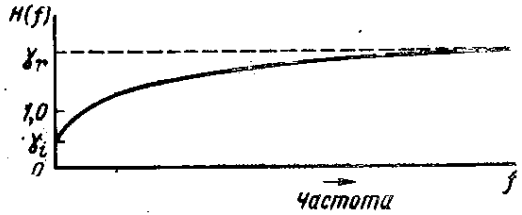


Рис. 8.10. Частотная характеристика линейного фильтра рис. 8.9 для одновременного сжатия динамического диапазона и усиления контрастности.

предположить, что $\ln i_{x,y}$ содержит главным образом низкие пространственные частоты. Быстрые изменения в $r_{x,y}$ способствуют появлению высоких пространственных частот в $\ln r_{x,y}$, хотя отражательная способность вносит некоторый вклад и в низкие пространственные частоты. Таким образом, возможна только частично независимая обработка. Тем не менее на практике оказалось полезным связать низкие пространственные частоты с $\ln i_{x,y}$, а высокие пространственные частоты — с $\ln r_{x,y}$. При таком предположении и при обработке изображения в соответствии с (8.38) линейный фильтр рис. 8.9 выбирался так, чтобы он *производил умножение* низких пространственных частот на γ_i и высоких пространственных частот на γ_r.

Рис. 8.11,*а*. Два исходных изображения.

Рис. 8.11,*б*. Изображения рис. 8.11,*а* после обработки с целью одновременного сжатия динамического диапазона и усиления контрастности.

При выполнении этой обработки частотная характеристика фильтра выбиралась так, чтобы она имела общий вид, как на рис. 8.10, и была изотропной с нулевой фазой. Линейная обработка проводилась с применением методов высокоскоростной свертки, выполняемых в двух измерениях (см. гл. 7). На рис. 8.11 приведены два примера изображений, обработанных таким образом для одновременного сжатия динамического диапазона и усиления контрастности. Усиление фильтра на низкой частоте было выбрано равным 0,5, а на высокой частоте — *равным* 2, *что соответствует* выбору $\gamma_i=0{,}5$ и $\gamma_r=2$ в (8.38).

8.12. ГОМОМОРФНАЯ ОБРАБОТКА РЕЧИ

При произнесении звонких звуков, например, гласных, речевой *сигнал можно рассматривать как* результат возбуждения речевого тракта струями воздуха, периодически пропускаемыми голосовыми связками [2]. Таким образом, простая и практически полезная модель действия речевого сигнала состоит из свертки трех функций, характеризующих высоту основного тона, форму голосовых связок или голосовой щели и конфигурацию речевого тракта. Основной стратегией многих систем сжатия полосы частот речи и автоматического распознавания звуков речи является выделение и раздельное описание возбуждения и импульсной характеристики речевого тракта. Таким образом, многие системы обработки речи частично основываются на выполнении развертки сигнала.

Речевой сигнал представляет собой непрерывный сигнал и, следовательно, должен обрабатываться на интервалах малой длительности. Поэтому рассмотрим часть $s(t)$ речевого сигнала как бы видимую через окно $w(t)$, ограниченное по времени. Хотя конфигурация речевого тракта со временем изменяется, выберем длительность окна достаточно малой, чтобы можно было предположить, что за это время форма импульсной характеристики речевого тракта и его возбуждение остаются неизменными. Далее, если обозначить через $p(t)$ последовательность идеальных импульсов *), синхронизованных с импульсами, создаваемыми голосовыми связками, через $g(t)$ — импульсную характеристику глотки и через $v(t)$ — импульсную характеристику речевого тракта, то $s(t)$ можно выразить приблизительно так:

$$s(t)=[p(t)\otimes g(t)\otimes v(t)]\,w(t). \tag{8.39}$$

Кроме того, если функция $w(t)$ является гладкой на протяжении эффективной длительности импульсной характеристики глотки и импульсной характеристики речевого тракта, то уравнение (8.39) можно аппроксимировать следующим образом:

$$s(t)=[p(t)\,w(t)]\otimes g(t)\otimes v(t). \tag{8.40}$$

Таким образом, если для взвешивания речевого сигнала используется гладкая функция, то его можно рассматривать как свертку взвешенного сигнала основного тона, импульсной характеристики глотки и импульсной характеристики речевого тракта.

*) Имеются в виду дельта-импульсы. — *Прим. ред.*

В соответствии с предыдущим рассмотрением желательно сформулировать приведенные соображения на языке дискретной обработки [в значениях отсчетов $s(t)$, которые обозначим через $s(n)$]. Допустив, что непрерывную свертку (8.40) можно заменить дискретной сверткой отсчетов каждого из составляющих членов, запишем

$$s(n) = [p(n)\,w(n)] \otimes g(n) \otimes v(n)$$

или

$$s(n) = p_1(n) \otimes g(n) \otimes v(n), \tag{8.41}$$

где $w(n)$, $g(n)$ и $v(n)$ являются отсчетами $w(t)$, $g(t)$ и $v(t)$ соответственно, а $p_1(n)$ — есть серия единичных отсчетов, взвешенных с помощью окна $w(n)$.

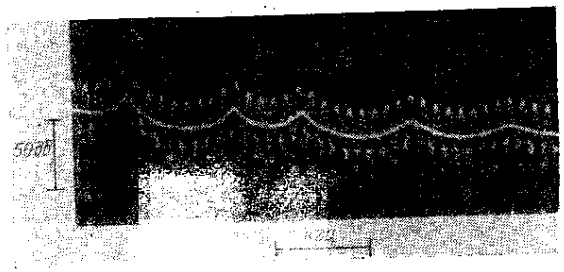


Рис. 8.12. Логарифмический спектр синтезированного гласного звука.

Грубо говоря, идея выделения составляющей основного тона $p_1(n)$ из сложных сигналов, созданных совместным действием импульсной характеристики речевого тракта и импульсов основного тона, основывается на том факте, что $p_1(n)$ обусловливает быстрые периодические изменения логарифма спектра, в то время как $g(n) \otimes \otimes v(n)$ вызывает медленные изменения логарифма спектра. Это иллюстрируется рис. 8.12, где представлен логарифм спектра синтезированного гласного звука. Сплошная линия представляет логарифм спектра от $g(n) \otimes v(n)$. Наложенные на нее быстрые периодические изменения представляют логарифм спектра от $p_1(n)$. На этом основании можно предположить, что в обратном преобразовании от логарифма спектра вклады от каждой из этих составляющих локализованы в различных временных областях.

Импульсная характеристика речевого тракта $v(n)$ может быть представлена как характеристика каскадного соединения резонаторов с затуханием, поэтому z-преобразование для нее имеет следующий вид:

$$V(z) = \frac{k}{\prod\limits_{i=1}^{M} (1 - a_i z^{-1})(1 - a^*_i z^{-1})}, \qquad |a_i| < 1. \tag{8.42}$$

В этом случае $v(n)$ является минимально-фазовой функцией и из (8.23) следует, что комплексный кепстр $\hat{v}(n)$ от $v(n)$ имеет вид

$$\hat{v}(n) = \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{M} \dfrac{|a_i|^n}{n} \cos \omega_i n, & n > 0, \\ 0, & n < 0, \end{cases} \tag{8.43}$$

где $a_i = |a_i|\, e^{j\omega}$. Таким образом, $\hat{v}(n)$ затухает как $1/n$, и поэтому при $n>0$ его основное влияние сказывается вблизи начальной точки $n=0$.

Точное аналитическое представление импульсной характеристики глотки $g(n)$ неизвестно, и, следовательно, трудно сделать какие-либо определенные утверждения относительно характеристик ее комплексного кепстра $\hat{g}(n)$. Однако в общем случае можно предполагать, что $g(n)$ не является минимально-фазовой функцией [5]. Выражая $g(n)$ как свертку минимально-фазовой последовательности $g_1(n)$ и максимально-фазовой последовательности $g_2(n)$, предположим, что $\hat{g}_1(n)$, равное нулю при $n<0$, и $\hat{g}_2(n)$, равное нулю при $n>0$, имеют эффективную длительность меньше периода основного тона.

Комплексный кепстр последовательности взвешенных единичных отсчетов, представляющих сигнал основного тона, является последовательностью единичных отсчетов с тем же расположением. В частности, если через $P_1(z)$ обозначить z-преобразование от $p_1(n)$, то

$$P_1(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} w(kN)\,(z^N)^{-k},$$

где N — число отсчетов между импульсами основного тона.

Если принять, что $w_N(n)$ определяется как весовая функция, сжатая во времени в N раз, так что $w_N(n) = w(nN)$, то получим

$$P_1(z) = w_N(z^N),$$

$$\ln P_1(z) = \ln w_N(z^N),$$

где $w_N(z)$ есть z-преобразование от $w_N(n)$. Далее, $\hat{p}_1(n)$, комплексный кепстр от $p_1(n)$, задается выражением

$$\hat{p}_1(n) = \begin{cases} \hat{w}_N\left(\dfrac{n}{N}\right), & n = 0, \pm N, \pm 2N, \ldots, \\ 0 & \text{во всех других точках.} \end{cases} \tag{8.44}$$

Другими словами, комплексный кепстр последовательности отсчетов основного тона, взвешенных с помощью функции окна, можно определить путем сжатия весовой функции с коэффициентом N, соответствующим интервалу между отсчетами основного тона, определения комплексного кепстра и растяжения результата с тем же коэффициентом N. Отсюда видно, что $\hat{p}_1(n)$, выраженное с помощью (8.44), состоит из серии отсчетов с интервалом τ, в котором m-й отсчет имеет вес $\hat{w}_\tau(m)$.

Можно считать, что составляющие $s(n)$, обусловленные основным тоном и совместным влиянием импульсной характеристики речевого тракта и импульсной характеристики глотки, оказывают свое первоначальное действие в неперекрывающиеся интервалы времени. Степень разделения этих составляющих зависит, конечно, некоторым образом от высоты основного тона: она больше для мужских голосов низкого тона, чем для женских голосов высокого тона. Тем не менее эксперимент показал, что за исключением случаев очень высокого основного тона эти составляющие хорошо разделяются. Для иллюстрации рассмотрим пример, изображенный на рис. 8.13. На этом рисунке показан отрезок гласной «*ah*», как в слове «*father*», произнесенной мужским голосом, а на рис. 8.13,*б* приведен комплексный кепстр. Согласно предыдущему рассмотрению мы можем восстановить член $p_1(n)$ выражения (8.41), умножая комплексный кепстр на нуль вблизи начальной точки (на интервале, скажем, 8 *мсек*) и на единицу в любой другой области. Наоборот, чтобы восстановить $v(n) \otimes g(n)$, можно умножить комплексный кепстр на единицу вблизи начальной точки и на нуль в любой другой области. После такого взвешивания результат преобразуется с помощью системы D^{-1}. На рис. 8.13,*в* показана восстановленная взвешенная последовательность импульсов основного тона $p_1(n)$. На нем ясно видны равномерно расположенные импульсы *). На рис. 8.13,*г* показан результат удержания только «низковременной» части $\hat{s}(n)$ при восстановлении $v(n) \otimes g(n)$. Чтобы подтвердить, что импульс рис. 8.13,*г* можно рассматривать как сверточную составляющую речи, она была снова синтезирована путем свертки этого импульса с последовательностью единичных отсчетов, интервалы между которыми были выбраны равными периоду основного тока, измеренному по колебанию рис. 8.13,*в*. Повторно синтезированная речь показана на рис. 8.13,*д*, и ее следует сравнить с оригинальной речью рис. 8.13,*а*.

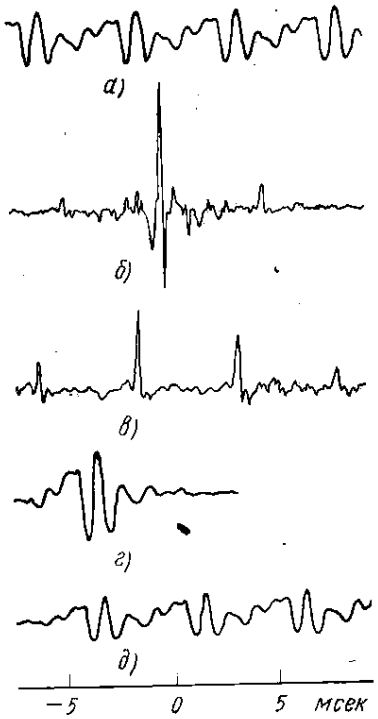


Рис. 8.13. *а*) отрезок гласного звука; *б*) его комплексный кепстр; *в*) восстановленная последовательность взвешенных импульсов основного тона; *г*) восстановленная импульсная характеристика речевого тракта; *д*) синтезированная речь с использованием импульсной характеристики (*г*) и импульсов основного тона, выделенных из (*в*).

*) Обнаружение основного тона, основанное непосредственно на измерении местоположения пиков в кепстре (предложенное в [1]), было успешно продемонстрировано Ноллем [6].

Эти идеи использовались для моделирования системы анализа — синтеза речи с целью исследования свойств и сжатия полосы частот речи [14]. При этом задача сводилась к анализу речи в части определения высоты основного тона, звонких и глухих звуков и информации, представляющей совместное действие импульсной характеристики глотки и импульсной характеристики речевого тракта. При анализе кепстр образовывался путем взвешивания входного речевого сигнала с помощью окна Хеннинга длительностью 40 *мсек*. Кепстр разделялся на свои «низковременные» и «высоковременные» части с граничным временем 3,2 *мсек*. Решение о том, является ли отрезок длительностью 40 *мсек* отрезком звонкого или глухого звука, и определение частоты основного тона в случае звонкого звука производилось по «высоковременной» части. Синтезатор принимает «высоковременные» значения кепстра, сигнал о наличии звонкого или глухого звука и результаты определения высоты основного тона, отнесенные к интервалам 10 или 20 *мсек*. В синтезаторе информация о высоте основного тона и о глухих и звонких звуках преобразуется

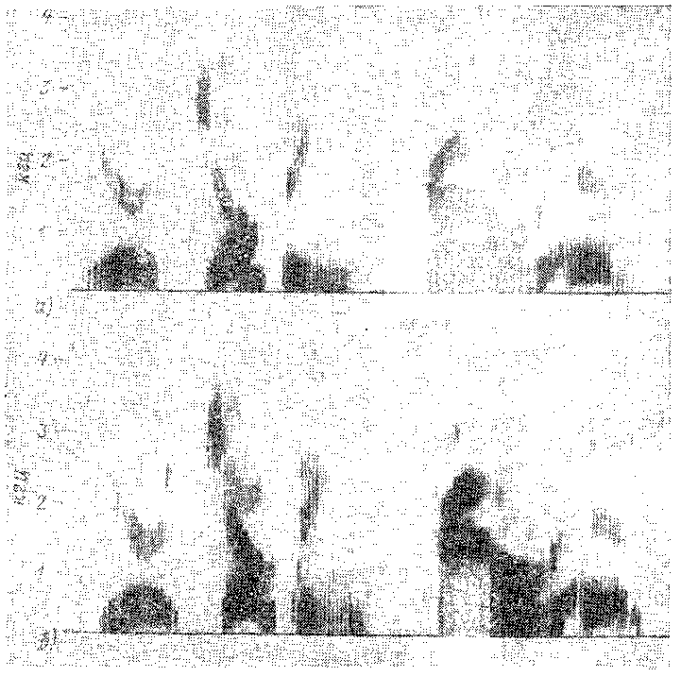


Рис. 8.14. *а*) спектрограмма фразы «*your jumping thrilled him*», произнесенной мужским голосом; *б*) та же фаза после обработки.

в функцию возбуждения, состоящую из импульсов во время звонких звуков и из шума во время глухих звуков. «Низковременные» значения кепстра преобразуются снова в функцию импульсной характеристики, которая затем свертывается с функцией возбуждения для образования синтетической речи.

При использовании системы для уменьшения полосы частот было сделано предположение о том, что функция импульсной характеристики является минимально-фазовой. Тем самым было уменьшено вдвое количество передаваемой информации об импульсной характеристике, так как при этом сохранялась только четная часть «низковременных» значений кепстра.

Хотя обычно считается, что речь не является минимально-фазовой, эксперименты, проведенные с этой системой, показали, что может быть получена высококачественная речь с естественным звучанием и при предположении, что она является минимально-фазовой. Фазовая зависимость вырабатывалась в синтезаторе в соответствии со сказанным в § 8. 7. На рис. 8.14 даются спектрограммы фразы до и после обработки.

8.13. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе вводится понятие обобщенной линейной фильтрации и применяется для обработки сигналов, которые можно представить в виде произведения или свертки составляющих сигналов. Основа подхода вытекает из такого обобщения принципа суперпозиции, которое позволяет применять его для широкого класса нелинейных систем.

После введения понятия обобщенной линейной фильтрации приводятся специфические условия фильтрации перемноженных сигналов, фильтрации свернутых сигналов и описывается соотношение между операциями, требуемыми для развертки и кепстрального анализа. Рассматриваются свойства комплексного кепстра для минимально-фазовых последовательностей и с их помощью описывается преобразование Гильберта, связывающее спектральную амплитуду и фазу. Так как при реализации этих фильтров для развертки сигналов требуется в общем случае определить спектр, то при рассмотрении играют главную роль свойства и оценка ДПФ. В § 8.9, в частности, описываются некоторые связанные с этим практические подробности.

Приводятся два случая применения. Первый случай — сжатие динамического диапазона и увеличение контрастности изображений, рассматриваемый как проблема фильтрации сигнала, заданного в виде свертки составляющих. Второй случай — анализ и сжатие полосы частот речи, рассматриваемый как проблема фильтрации сигналов, заданных в виде свертки составляющих. Упоминаются и другие применения, которые либо разработаны, либо достойны разработки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bogert B., Healy M., Tukey J., «The Quefrency Analysis of Time Series for Echoes», in Rosenblatt (ed.), «Proceedings of the Symposium on Time Series Analysis», chap 15, pp. 209—243, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1963.
2. Flanagan J. L., «Speech Analysis, Synthesis and Perception», Academic Press, Inc., New York, 1965.

3. Guillemin E. A., «Theory of Linear Physical Systems», chap. 18, John Wiley and Sons, Inc., New York, 1963.
4. Hoffman K., Kunze R., «Linear Algebra», Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. Y., 1961.
5. Mathews M. V., Miller J. E., David E. E., «Pitch Synchronous Analysis of Voiced Sounds», J. Acoust. Soc. Am., 1961, February, v. 33(2), pp. 179—186.
6. Noll A. M., «Cepstrum Pitch Determination», J. Acoust. Soc. Am., 1967, February, v. 41, pp. 293—309.
7. Oppenheim A. V., «Superposition in a Class on Non-linear Systems», Mass. Inst. Technol., Res. Lab. Electron., Tech. Rept. 432, Mar. 31, 1965.
8. Oppenheim A. V., «Optimum Homomorphic Filters», Mass. Inst. Technol., Res. Lab. Electron., Quart. Progr. Rept. 77, pp. 248—260, Apr. 15, 1965.
9. Oppenheim A. V., «Non-linear Filtering of Convolved Signals», Mass. Inst. Technol., Res. Lab. Electron Quart. Progr. Rept. 80, pp. 168—175, 1966.
10. Oppenheim A. V., «Generalized Superposition», Inform. Control, 1967, November, v. 11, pp. 528—536.
11. Oppenheim A. V., «Deconvolution of Speech», J. Acoust. Soc. Am., 1967, v. 41(6), p. 1595.
12. Oppenheim A. V., Schafer R. W., «Homomorphic Analysis of Speech», IEEE Trans. Audio Electroacoustics, 1968, v. AU—16, pp. 221—226.
13. Оппенгейм, Шефер, Стокхэм, мл., «Нелинейная фильтрация сигналов, представленных в виде произведения и свертки», ТИИЭР, 1968, т. 56, № 8, стр. 5—34.
14. Oppenheim A. V., «A Speech Analysis — synthesis System Based on Homomorphic Filtering», J. Acoust. Soc. Am., 1969, February.
15. Schafer R. W., «Echo Removal by Generalized Linear Filtering», Nerem Record, 1967, pp. 118—119.
16. Schafer R. W., «Echo Removal by Discrete Generalized Linear Filtering», диссертация, Massachusetts Institute of Technology, Department of Electrical Engineering, Cambridge, Mass., 1968, February.
17. Stockham T. G., мл., «The Application of Generalized Linearity to Automatic Gain Control», IEEE Trans. Audio Electroacoustics, 1968, June, v. AU—16, pp. 267—270.

Приложение

Д. Кайзер

ЦИФРОВЫЕ ФИЛЬТРЫ *)

ВВЕДЕНИЕ

При моделировании линейных динамических систем и непрерывных фильтров, а также при фильтрации или обработке сигналов с помощью ЦВМ проектируются и применяются цифровые фильтры. Термин *цифровой фильтр* относится к процессу вычислений алгоритма, с помощью которого дискретный сигнал или последовательность чисел (представляющих вход) преобразуется во вторую последовательность чисел, выражающих выходной сигнал. Процесс вычислений может представлять собой фильтрацию нижних частот (сглаживание), полосовую фильтрацию, интерполяцию, формирование производных и т. д. Предполагается, что процесс является линейным, т. е. что принцип суперпозиции применим к соотношению вход/выход.

В данной главе подробно рассматриваются некоторые методы проектирования цифровых фильтров и использование этих методов. Основное внимание направлено на рассмотрение методов расчета в частотной области и на обработку больших потоков данных, а не на методы расчета во временной области и обработку коротких информационных сообщений. Совершенно не затрагиваются вопросы проектирования цифровых фильтров с точки зрения теории оптимальных фильтров и теории оценки сигналов при наличии шумов. Эти вопросы широко освещаются в литературе.

После краткого обзора развития теории цифровых фильтров рассматриваются вопросы теории применения процесса дискретизации к сигналам и к устройствам обработки сигналов. Существует два типа линейных цифровых фильтров: рекурсивные и нерекурсивные фильтры.

*) Глава 7 из книги: Kuo F. K. and Kaiser J. F. (eds.) System Analysis by Digital Computer, John Wiley, 1966.

Подробно рассматриваются методы проектирования фильтров каждого типа в частотной области. Указывается на преимущества и недостатки различных методов проектирования и приводятся примеры.

Глава заканчивается рассмотрением некоторых проблем, связанных с реализацией цифровых фильтров, а именно определением точности коэффициентов, влияния квантования и округления результатов вычислений. Проводится сравнение различных канонических форм реализации и процедур их расчета с тем, чтобы облегчить выбор соответствующей формы.

П.1. РАННЕЕ РАЗВИТИЕ ТЕОРИИ ЦИФРОВОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

Обработка дискретных сигналов линейными фильтрами или весовыми последовательностями производилась еще в 1600 г. Она началась с работ математиков, занимавшихся составлением математических таблиц, и астрономов, которые занимались определением орбит небесных светил. Труды Найпера, Грегори, Ньютона и Бернулли, Эйлера, Тейлора, Лагранжа, Лапласа и Гаусса используются в классических методах численного анализа, применяемых и в настоящее время для численного интегрирования, интерполяции, дифференцирования и т. д. Эти применения, в которых обычно имеют дело со сравнительно узкополосными сигналами при отсутствии шумов, вытекают из характерных особенностей указанных трудов, обосновывающих полезные способы фильтрации, что становится особенно ясным при их рассмотрении в частотной области. Например, легко показать, что для классических симметричных интерполяционных фильтров первые n последовательных производных их амплитудно-частотных характеристик имеют нулевые значения (поведение при нулевой частоте весьма сходно с поведением фильтра нижних частот Баттерворта). Труд Жордана [1] по вычислениям конечных разностей иллюстрирует общность и изящество этих фундаментальных работ.

Однако полезность классических методов снижается, если обрабатываемые данные содержат нежелательные шумовые компоненты. Развитие в 1940 и 1950 гг. системы управления огнем и радиолокации дало сильный толчок развитию более усовершенствованных методов обработки сигналов. Появилась богатая литература по дискретным системам управления, начиная с работы Гуревича [2] и др. и кончая потоком литературы по дискретным системам [3—10]. Эти работы, рассматривая подробно теорию дискретных систем с помощью z-преобразования, в основном ограничиваются анализом систем управления и исследованием методов их оптимизации. Они могут быть использованы для решения многих задач цифровой фильтрации.

Параллельно с интенсивным развитием теории дискретных систем управления проявляется большой интерес к численной обработке сигналов от радиолокационных станций и других датчиков. Целью такой обработки было, с одной стороны, выделение более чистых выходных сигналов, выражающих требуемые величины, например скорость и ускорение; с другой стороны, цель состояла в получении

характеристик шумов, сигнала или измеряемой системы. Появление вычислительных машин ускорило развитие методов обработки сигналов и позволило довольно быстро осуществлять большие расчеты при решении сложных задач. Это видно из работы Блекмана [11].

Историю развития цифровых фильтров можно проследить также по трудам Ланцоша [12], Блекмана и Таки [13], Мартина [14] и Ормсби [15]. Монрое [16] суммирует и описывает в общих чертах много различных методов синтеза фильтров дискретных данных; список литературы в его работе является одним из самых полных для работ, выполненных с 1950 г. С появлением больших ЦВМ и ЦВМ с высоким быстродействием роль цифровых фильтров возрастает. Кроме применения для обработки данных, они используются как очень гибкое и мощное средство при моделировании сложных систем [17, 18]. Это значительно увеличивает необходимость поиска эффективных путей не только для обработки дискретных сигналов, но и для получения осмысленного представления самих дискретных систем. Эта проблема представления является проблемой аппроксимации и далеко не простой.

Первые попытки решения этой проблемы состояли в аппроксимации основных операций непрерывного интегрирования и дифференцирования дискретными процессами. Этот период развития отражен в трудах Тастина [19], Сэлзера [20], Боксера [21, 22], Бэкстера [23, 24]. Другой путь состоял в применении хорошо разработанной теории z-преобразования для дискретных систем управления [3—10]. Тот факт, что z-преобразование или метод подстановки элементарной дроби не всегда удовлетворителен для процесса преобразования непрерывных сигналов в цифровые, вначале был установлен Блэкманом ([11], стр. 72) и Гибсоном [25], однако этот факт зачастую не учитывался авторами современных работ по дискретным системам.

Стейглиц [26, 27] подробно исследовал теорию процесса преобразования аналоговых сигналов в цифровые. Кайзер [28, 29] занимался дальнейшим развитием методов преобразования аналоговых сигналов в цифровые с целью осуществления моделирования сложных аналоговых линейных фильтров и использования таких фильтров инженерами-электриками. О широких возможностях применения этих фильтров в многочисленных случаях обработки данных говорят статистики [30, 31], инженеры и специалисты из других областей науки.

В настоящей работе упор сделан на механизм процесса преобразования аналоговых сигналов в цифровые в основном применительно к частотной области; для временной области эти вопросы хорошо разработаны Блекманом [11], Монрое [16] и др. При моделировании фильтров необходимо, чтобы потребитель полностью понимал характер аппроксимаций, производимых при каждом методе проектирования. Потребитель должен быть также информирован о численных задачах, решаемых как в процессе преобразования аналоговых сигналов в цифровые, так и в процессе работы проектируемого фильтра. Поэтому начнем с рассмотрения процесса дискретизации в применении к сигналам и устройствам обработки сигналов.

П.2. ПРОЦЕСС ДИСКРЕТИЗАЦИИ *)

Линвил [32] показал, что процесс дискретизации можно рассматривать как вид импульсной модуляции. Соответственно, если дискретизация $f(t)$ происходит через каждые T секунд, то дискретное колебание $f^*(t)$ можно представить как последовательность импульсов, заданных выражением

$$f^*(t) = T \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\,\delta(t - nT), \qquad (\text{П.1})$$

где предполагается, что $f(t)$ равняется нулю при $t<0$, и $\delta(t-nT)$ представляет собой единичный импульс *) в момент $t=nT$. Дискретный сигнал $f^*(t)$ является чисто математическим, так как представляет собой ряд импульсных функций. Однако обычно сигнал $f^*(t)$ выражается через последовательность чисел $\{f(nT)\}$, представляющих значения сигнала в моменты дискретизации nT. Производя преобразование Лапласа для обеих частей уравнения (П.1), получим

$$\mathcal{L}[f^*(t)] = F^*(s) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F(s + jn\omega_s) + \frac{T}{2} f(0^+) \qquad (\text{П.2})$$

или эквивалентную форму

$$F^*(z) = T \sum_{n=0}^{\infty} f(nT)\, z^{-n}, \qquad (\text{П.3})$$

где $z=e^{sT}$ — единичный оператор опережения (стандартная переменная z-преобразования) и $\omega_s=2\pi/T$ — угловая частота дискретизации. Из анализа (П.2) видно, что спектр дискретного сигнала периодичен по частоте с периодом ω_s. Далее из (П.2) следует, что начальный сигнал $f(t)$ может быть точно восстановлен по $f^*(t)$ при прохождении $f^*(t)$ через идеальный фильтр нижних частот с шириной полосы $\pm\omega_s/2$ только в том случае, если $F(s)$ тождественно равно нулю за пределами центральной полосы $s=\pm j\omega_s/2$. На рис. П.1 это показано для ограниченного по полосе частот сигнала $F_2(j\omega)$ и показаны проблемы наложения спектров, возникающие, когда полоса сигнала $F_1(j\omega)$ не ограничена в пределах $\pm\omega_s/2$.

*) Ниже используется описание по Уайлтсу [6]. См. также [34].

*) В отличие от сказанного на стр. 187 здесь $\delta(t-nT) = \begin{cases} 1/T, & t=nT, \\ 0, & t \neq nT. \end{cases}$ *Прим. ред.*

Сигнал $f_0(t)$, восстановленный при прохождении $f^*(t)$ через идеальный фильтр нижних частот с полосой $\pm\omega_s/2$, представляется выражением

$$f_0(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f(nT) \frac{\sin[\omega_s(t-nT)/2]}{\omega_s(t-nT)/2}. \qquad (П.4)$$

Напомним, что $f_0(t) = f(t)$ только в том случае, если сигнал $f(t)$ ограничен по частоте в пределах $\pm\omega_s/2$.

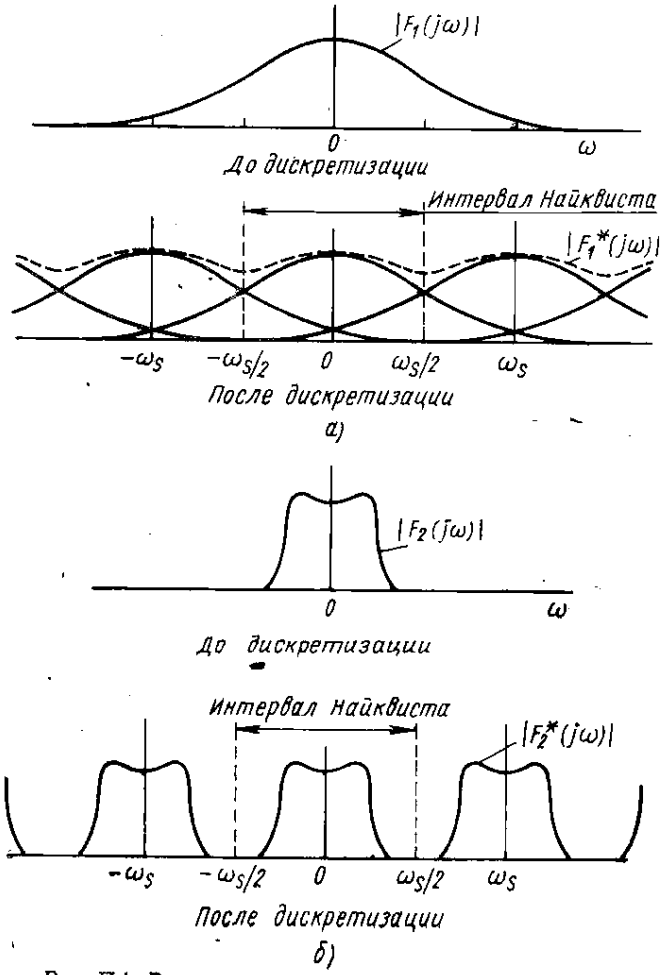


Рис. П.1. Влияние дискретизации на спектр сигнала.

Поэтому, чтобы должным образом подготовить аналоговый сигнал к процессу последовательной дискретизации, вначале сигнал следует ограничить по полосе частот путем фильтрации хорошим фильтром нижних частот. Хороший фильтр нижних частот должен иметь плоскую амплитудную характеристику и линейную фазовую характеристику в большей части интервала Найквиста ($\pm\omega_s/2$) и значительное затухание на частотах,

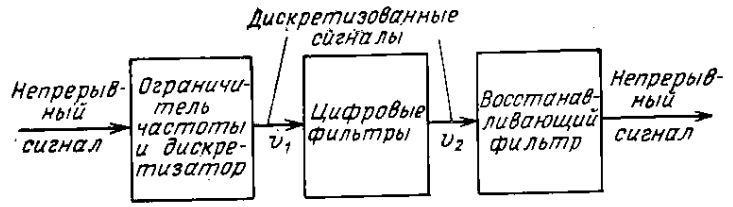


Рис. П.2. Моделирование непрерывной системы с использованием цифровых фильтров.

превышающих $\omega_s/2$. При моделировании это ограничение сигнала по полосе частот наиболее существенно для уменьшения до минимума ошибок, вызванных наложением частотных спектров. На рис. П.2 показана общая схема моделирования динамической аналоговой системы, использующая цифровые фильтры. Моделирование считается *широкополосным*, если полоса пропускания фильтра, ограничивающего спектр сигнала, и используемый частотный диапазон цифрового фильтра соизмеримы с частотой Найквиста (т. е. составляют до 70—80%). Используемая в этом случае частота дискретизации является резким контрастом по сравнению с частотой в системах управления с применением дискретных данных, где она обычно выбирается в 5—12 или более раз выше эффективной ширины полосы частот системы управления, чтобы не вносить чрезмерной задержки в цепь управления. Использование минимальной частоты дискретизации обычно приводит к тому, что для любой операции моделирования или обработки данных требуется минимальное число вычислений, если, конечно, использование этой частоты дискретизации не требует слишком сложных форм реализации цифровых фильтров.

Фильтр, применяемый для восстановления аналогового сигнала по последовательности выходных отсчетов, должен лишь аппроксимировать идеальный фильтр ниж-

них частот в используемом частотном диапазоне моделирования. Таким образом, для моделирования полосы пропускания нижних частот может применяться фильтр нулевого порядка $H_0(s)$, где

$$H_0(s) = (1 - e^{-sT})/s. \qquad (П.5)$$

Частотные характеристики H_0 задаются выражением

$$H_0(j\omega) = \frac{\sin(\omega T/2)}{\omega T/2} e^{-j\omega T/2}, \qquad (П.6)$$

которому соответствует хорошая линейная фазовая характеристика, но относительно плохая амплитудная характеристика. Эффективная ширина полосы этого восстанавливающего фильтра может быть заметно улучшена, если за ним следует аналоговый фильтр нижних частот с линейной фазовой характеристикой и амплитудной характеристикой, которая компенсирует ослабление, вносимое законом $[\sin(\omega T/2)]/(\omega T/2)$ в диапазоне $0<\omega T/2<\pi$.

Рассмотрев основные понятия о процессе дискретизации, перейдем к рассмотрению методов проектирования цифровых фильтров.

П.3. КЛАССИФИКАЦИЯ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Предполагается, что передаточная характеристика $H(s)$ линейной системы, для которой требуется цифровая аппроксимация, может быть представлена в следующем виде:

$$H(s) = \sum_{m=0}^{M} c_m s^m \Big/ \sum_{n=0}^{N} d_n s^n, \qquad (П.7)$$

где $M<N$ для $H(s)$, квазиограниченной по частоте *). Используя хорошо известные соотношения между линейным дифференциальным уравнением и линейным разностным уравнением, мы видим, что соответствующая дискретная передаточная характеристика выражается в общем виде следующим образом:

$$H^*(z) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j z^{-j} \Big/ 1 + \sum_{j=1}^{N} b_j z^{-j}, \qquad (П.8)$$

где z^{-1} — оператор единичной задержки.

*) Исследование легко провести и для случая, когда $M=N$.

Используя (П.8) для определения соотношения между выходным сигналом или последовательностью $v_2(nT)$ и дискретным входным сигналом $v_1(nT)$ и решая это уравнение относительно текущего выходного значения, получаем

$$v_2(kT) = \sum_{j=0}^{N-1} a_j v_1(kT - jT) - \sum_{j=1}^{N} b_j v_2(kT - jT). \qquad (П.9)$$

Если по крайней мере одно значение b_j и одно значение a_j не равны нулю, то фильтр, заданный уравнением (П.8), является фильтром рекурсивного типа, т. е. у него расчет текущего значения выходной величины v_2 зависит не только от настоящего (текущего) и $(N-1)$ предыдущих значений входной величины, но также и от N предыдущих значений выходной величины v_2. Блок-схема рекурсивного фильтра второго порядка показана на рис. П.3.

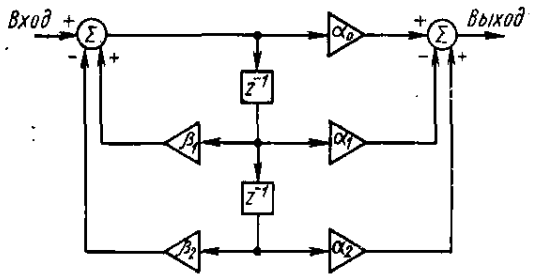


Рис. П.3. Рекурсивный цифровой фильтр второго порядка.

Если все значения b_j равны нулю, то фильтр является фильтром нерекурсивного или трансверсального типа, т. е. у него выход представляет собой простое линейное взвешивание текущего и предыдущих $(N-1)$ входных отсчетов. На рис. П.4 приведен пример нерекурсивного фильтра n-го порядка.

Методы проектирования фильтров каждого из этих двух классов значительно отличаются друг от друга и рассматриваются по отдельности. Каждый класс фильтров имеет свои особенности. Нерекурсивный фильтр имеет *конечную память*, у него могут быть очень хорошие фазовые характеристики. Однако в нерекурсивном фильтре обычно требуется большое количество членов для получения относительно острого среза частотной характери-

стики. Рекурсивный же фильтр обладает *бесконечной памятью* и обычно имеет меньше членов. При такой экономии членов фазовые характеристики, как правило, получаются относительно хуже. Фильтры с острым срезом частотной характеристики значительно легче проектировать, используя рекурсивную структуру.

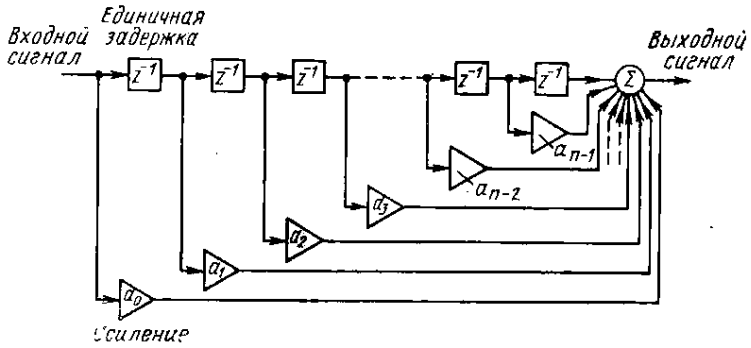


Рис. П.4. Нерекурсивный цифровой фильтр n-го порядка при $a_n=1$.

Цифровым двойником линейной аналоговой системы с сосредоточенными параметрами является рекурсивный фильтр (П. 8). Цифровой фильтр, применяемый для аппроксимации частотных характеристик тригонометрическими полиномами, является нерекурсивным фильтром. Рассмотрим вначале методы проектирования нерекурсивного фильтра.

П.4. МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ НЕРЕКУРСИВНЫХ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ

Существует три метода проектирования нерекурсивных фильтров: метод, связанный с классической интерполяцией и формулой дифференцирования для равноотстоящих данных; метод, вытекающий из приближения рядом Фурье, и, наконец, метод, использующий аппроксимацию по методу наименьших квадратов в какой-либо форме.

П.4.1. Метод классического численного анализа

Классическим формулам интерполяции и дифференцирования [1] для равноотстоящих данных можно непосредственно придать цифровую форму с помощью соответствия между единичным оператором опережения E,

используемым в численном анализе, и оператором z в z-преобразовании. При обычном применении этих формул получают фильтры нижних частот и дифференцирующие фильтры с прекрасными амплитудными характеристиками только на очень низких частотах (относительно узкие полосы частот). Легко видеть, что эти методы соответствуют использованию первых нескольких членов разложения требуемых амплитудных характеристик в степенной ряд вблизи нулевой частоты. Применение этого метода ограничивается в основном фильтрами, функция которых состоит в интегрировании, интерполяции, дифференцировании или в их комбинациях.

П.4.2. Метод ряда Фурье

Ряд Фурье и связанные с ним методы отличаются значительно большей гибкостью. Метод Фурье состоит, в первую очередь, в разложении амплитудно-частотных характеристик требуемого аналогового фильтра $H(s)$ в ряд Фурье в полосе $|\omega|<\omega_s/2$. Выбор синусных или косинусных рядов делается на основании поведения $H(s)$ на очень низких частотах.

Если $H(s)\approx Ks^m$, для небольших m, то выбирается ряд косинусов, когда m является четным, и ряд синусов, когда m — нечетное число.

Таким образом,

$$H(\omega)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n\omega T, \quad m \text{ — четное}, \tag{П.10}$$

или

$$H(\omega)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega T, \quad m \text{ — нечетное}. \tag{П.11}$$

Однако, по определению,

$$z^{-1}\equiv e^{-j\omega T}. \tag{П.12}$$

Следовательно, используя экспоненциальную форму для тригонометрических функций, получим характеристики искомых нерекурсивных цифровых фильтров:

$$H^*(z)=a_0+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^n+z^{-n}), \quad m \text{ — четное}, \tag{П.13}$$

и

$$H^*(z)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} b_n'(z^n-z^{-n}),\quad m\text{ — нечетное.} \qquad (П.14)$$

Если сходимость ряда Фурье является недостаточно быстрой, для того чтобы ошибки, вызванные усечением бесконечных рядов (П.13) или (П.14), сделать небольшими, то для удовлетворительной аппроксимации с конечным числом членов следует модифицировать коэффициенты a_n или b_n. Мартин [14] и Ормсби [15] обошли трудности медленной сходимости, вернувшись к начальному $H(\omega)$ и модифицируя эту функцию

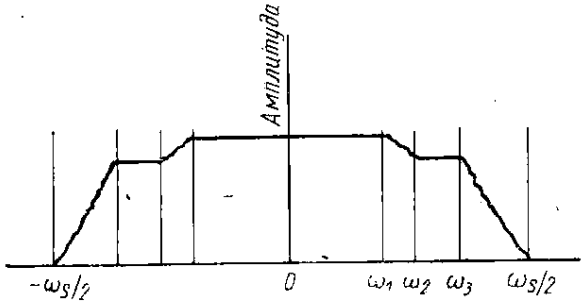


Рис. П.5. Амплитудная характеристика, определяемая покусочно, с неопределенными переходными областями.

так, чтобы исключить разрывы в $H(\omega)$ и ее первой производной $H'(\omega)$. Эта модификация несколько улучшает сходимость, уменьшая источник колебаний Гиббса ([12], стр. 217—219), но в то же время затрудняет определение коэффициентов ряда. Их метод применим к фильтрам с амплитудной характеристикой, которая задается покусочно, и в переходных областях является неопределенной, как показано на рис. П.5.

П.4.3. Модифицированный метод ряда Фурье

Другой подход к методу Ормсби и Мартина состоит в модификации коэффициентов a_n или b_n таким образом, чтобы ошибка, вызванная отбрасыванием малых членов рядов (П.13) или (П.14), значительно уменьшилась. Это можно осуществить путем умножения величины, выражающей временную характеристику $h(nT)$, на ограни-

ченную по времени четную функцию $w(t)$, т. е. $w(t)=w(-t)$ и $w(t)=0$ для $|t|>\tau$. Однако умножение во временной области соответствует свертке в частотной области. Таким образом, если выбрана такая весовая функция $w(t)$, что ее частотный спектр концентрируется в основном в центральном лепестке, т. е. в области

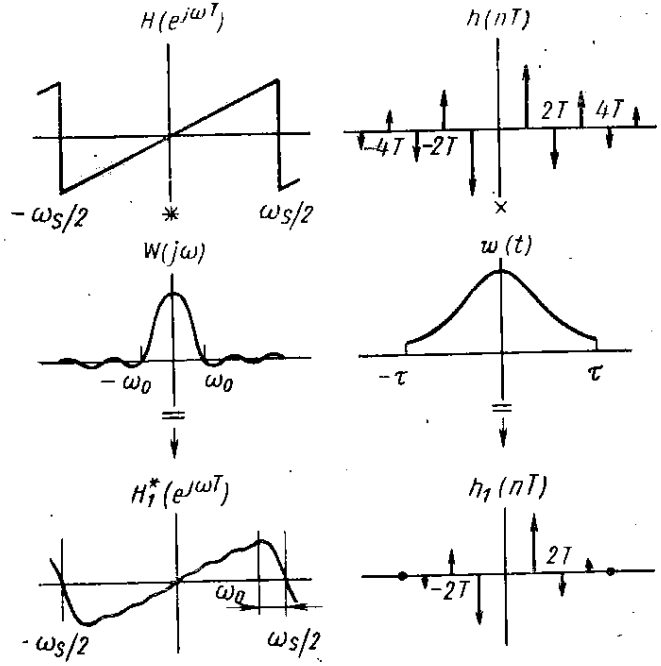


Рис. П.6. Метод весовых функций, примененный для улучшения сходимости.

$|\omega|<\omega_0$, то влияние этой свертки на частотные характеристики $H^*(z)$ будет выражаться в сглаживании резких переходов или разрывов производной в $H^*(z)$. Эта процедура *) изображена на рис. П.6, где требуемый фильтр представляет собой широкополосный дифференциатор.

Таким образом, расчетные уравнения будут иметь следующий вид:

*) Этот метод использовался Россом [34], Кайзером [28], Хейлайгером [35], Грэхемом [36], Андерсом [37] и др.

$$H^*_1(z) = a_0 w(0) + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}[a_n w(nT)][z^n + z^{-n}], \quad m \text{ — четное,} \tag{П.15}$$

или

$$H^*_1(z) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}[b_n w(nT)][z^n - z^{-n}], \quad m \text{ — нечетное,} \tag{П.16}$$

где N — наибольшее целое число в (τ/T).

Особенно простой весовой функцией, которая может применяться, является функция окна Хемминга ([13], стр. 95—99), определяемая следующим образом:

$$w_h(t) = \begin{cases} 0{,}54 + 0{,}46\cos(\pi t/\tau), & |t| < \tau \\ 0, & |t| > \tau. \end{cases} \tag{П.17}$$

Почти вся энергия этой функции, а именно 99,96%, сосредоточена в полосе $|\omega| \leqslant 2\pi/\tau$, причем максимальная пиковая амплитуда боковых лепестков $W_h(j\omega)$ составляет меньше 1% от центрального пика.

Могут с успехом применяться и другие специфические весовые функции [38, 39]. Одно особенно гибкое *семейство* весовых функций с почти оптимальными *) характеристиками определяется парой косинусного преобразования Фурье [40]:

$$w(t) = \begin{cases} \dfrac{J_0[\omega_a\sqrt{\tau^2 - t^2}]}{J_0(\omega_a\tau)}, & |t| < \tau, \\ 0, & |t| > \tau, \end{cases} \tag{П.18}$$

$$W(j\omega) = \frac{2}{J_0(\omega_a\tau)}\,\frac{\sin[\tau\sqrt{\omega^2 - \omega_a^2}]}{\sqrt{\omega^2 - \omega_a^2}}, \tag{П.19}$$

где J_0 — модифицированная функция Бесселя первого рода и нулевого порядка. Изменяя произведение $\omega_a\tau$, можно изменять энергию в центральном лепестке и амплитуды боковых лепестков. Обычный диапазон значений $\omega_a\tau$, равный $4 < \omega_a\tau < 9$, соответствует диапазону

*) Это семейство функций окна было «открыто» Кайзером в 1962 г. после дискуссии с Б. Ф. Логеном.

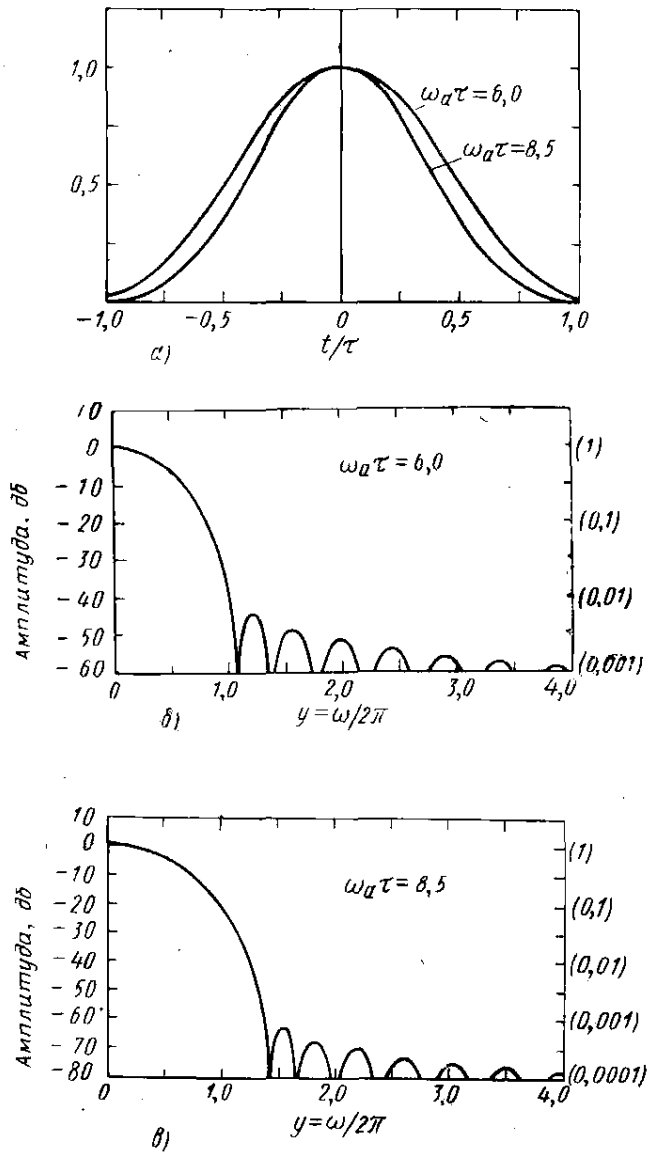


Рис. П.7. *а*) весовая функция Кайзера; *б*) и *в*) преобразование Фурье для нее.

пиковой высоты бокового лепестка от 3,1 до 0,047%. На рис. П.7 показаны $w(t)$ и $W(j\omega)$ для $\omega_a\tau=6{,}0$ и 8,5.

Проиллюстрируем гибкость этого семейства функций окна. При $\omega_a\tau=\pi\sqrt{3}=5{,}4414$ первый нуль $W(j\omega)$ лежит в точке 2π на нормализованной шкале, такое же расположение имеет косинусное преобразование функции окна Хемминга ([13], стр. 95—99). Близость полученных функций окна можно видеть непосредственно. Окно Хемминга, имея несколько более низкую пиковую амплитуду на двух первых боковых лепестках, продолжает колебаться примерно синусоидально с медленно уменьшающейся амплитудой. С другой стороны, окно Кайзера при $\omega_a\tau=\sqrt{3}\pi$ имеет несколько большую амплитуду для двух первых боковых лепестков, но амплитуда синусо-

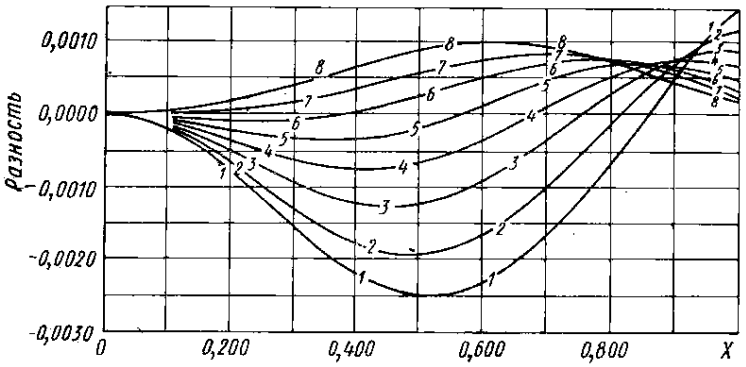


Рис. П.8. Аппроксимация сфероидальной функции $S_{00}(c, x)$ с помощью $J_0(\alpha, x)$. Показана разность $S_{00}(c, x)-J_0(\alpha, x)$:

1) $c=5{,}311$, $\alpha=5{,}000$;
2) $c=5{,}744$, $\alpha=5{,}441$;
3) $c=6{,}292$, $\alpha=6{,}000$;
4) $c=6{,}783$, $\alpha=6{,}500$;
5) $c=7{,}274$, $\alpha=7{,}000$;
6) $c=7{,}765$, $\alpha=7{,}500$;
7) $c=8{,}257$, $\alpha=8{,}000$;
8) $c=8{,}749$, $\alpha=8{,}500$.

идальных колебаний на «хвостах» окна уменьшается намного быстрее. Вне главного лепестка окна Хемминга находится 0,037% его энергии, в то время как вне главного лепестка окна Кайзера при $\omega_a\tau=\sqrt{3}\pi$ находится только 0,012% его энергии.

В качестве второго примера приведем весовую функцию Блекмана ([13], стр. 98), которая имеет первый нуль при 3π и соответствует окну Кайзера при $\omega_a\tau=2\sqrt{2}\pi=8{,}885$. Для сравнения можно использовать почти эквивалентное значение $\omega_a\tau=8{,}50$. Эта функция имеет свой

первый нуль при 2π (т. е. 1,44226), а не при 3π. Близость этих двух функций окна можно видеть из сравнения рис. П.7,*в* с рис. 15,*е* в работе Блекмана и Таки ([13], стр. 97). Легко видеть, что окно Кайзера при $\omega_a\tau=8{,}5$, дает меньшие боковые лепестки, нежели окно Блекмана, несмотря на меньшее значение первого нуля. Здесь справедливы те же общие замечания относительно амплитуды бокового лепестка, что и при рассмотрении окна Хемминга.

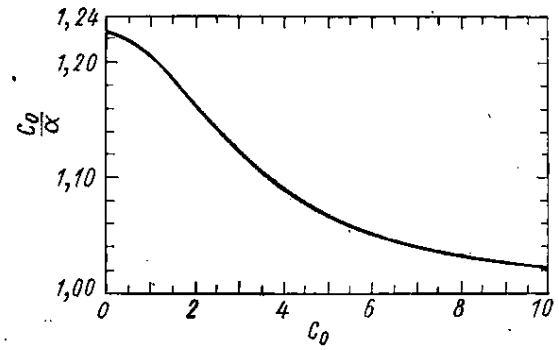


Рис. П.9. Связь между параметрами c_0 и α для сфероидальных функций $S_{00}(c, x)$ и функций $J_0(\alpha, x)$.

Другое ценное свойство этого семейства модифицированных весовых функций бесселевого типа состоит в том, что они также хорошо аппроксимируют [41] сфероидальные волновые функции нулевого порядка, свойства которых в отношении ограничения полосы частот [42] хорошо известны. Большая близость двух классов функций иллюстрируется графиком их разности (рис. П.8) для различных значений $\alpha=\omega_a\tau$ и соответствующего параметра удлинения сфероида c_0. Напомним, что $w(0)=1$ и $S_{00}(c_0, 0)=1$, и, следовательно, разность представляет собой также относительную ошибку. Приближенное соответствие значений параметра α и c_0 для двух классов функций представлено на рис. П.9 в виде графика зависимости отношения c_0/α от c_0.

Вернемся к использованию этих весовых функций для уменьшения амплитуды колебаний Гиббса. В табл. П.1 [41] приведены значения параметра $\omega_a\tau$, необходимые

для заданного уменьшения амплитуды первого выброса Гиббса от ступенчатых разрывов.

Если взглянуть на эти данные с точки зрения ускорения сходимости ряда Фурье в точках, удаленных от разрывов, то станет ясным соотношение между числом членов, требуемых в цифровом фильтре $H^*(z)$, и рабочим

Таблица П.1

$\omega_a\tau$	Амплитуда выброса, %
0	17,898
5,0000	0,329
5,4414	0,250
6,0000	0,140
6,5000	0,083
7,0000	0,050
7,5000	0,029
8,0000	0,017
8,5000	0,010

частотным диапазоном фильтра. Обратимся снова к рис. П.6. Уменьшив наполовину ω_0 и одновременно удвоив τ, получим фильтр, имеющий вдвое больше членов, чем ранее.

Оценка числа членов (единичных задержек), требуемых в нерекурсивном цифровом фильтре, зависит как от возможного допуска на выброс от ступенчатых разрывов, так и от относительной ширины (часть частоты Найквиста) для переходных областей. Эта относительная ширина дается, например, выражением $(\omega_2-\omega_1)/(\omega_s/2)$ для фильтра с характеристикой, приведенной на рис. П.5. Удобное выражение для числа членов n_s при пиковом выбросе 0,3% имеет следующий вид:

$$n_s=\frac{8}{\omega_r}, \qquad (П.20)$$

где ω_r — принятая в качестве единичной ширина переходной области, соответствующая частоте Найквиста (половине частоты дискретизации). Если величину пикового выброса уменьшить до 0,01%, то коэффициент 8 увеличится до 11,5.

Таким образом, мы имеем способ проектирования, который делает разложение в ряд Фурье действительно *полезным* для точных расчетов. Этот способ проектирования нерекурсивного фильтра больше всего пригоден для фильтров, имеющих довольно хорошие амплитудные характеристики, особенно на очень низких частотах и на частотах, приближающихся к пределу Найквиста. Для проектирования *широкополосных* фильтров этот способ лучше метода стандартного численного анализа. Дополнительное его преимущество состоит в том, что он пригоден как для машинных, так и для ручных расчетов.

П.4.4. Методы наименьших квадратов, Чебышева и другие

Прямой метод Фурье отличается тем, что дает наилучшее среднеквадратическое приближение к требуемой передаточной характеристике при равном весе ошибок во всем частотном диапазоне $-\omega_s/2<\omega\leqslant\omega_s/2$. Однако имеют место нежелательные колебания Гиббса, вызванные разрывами в требуемом $H(j\omega)$ или какой-либо из его производных. Близкий к рассмотренному подход заключается в применении метода наименьших квадратов, но со взвешиванием ошибок только в том частотном диапазоне, где требуется специфическая характеристика. Например, на рис. П.5 частотные диапазоны, представляющие интерес, лежат в пределах от 0 до ω_1 и от ω_2 до ω_3. Другой пример, рис. П.10,*д*, показывает полезность такого подхода. Флейшер [43] использовал этот обобщенный метод наименьших квадратов при проектировании нерекурсивных фильтров.

Еще один метод проектирования состоит в определении чыбешевского или минимаксного приближения к требуемой передаточной характеристике. Мартин [44] довольно успешно применил этот метод. Однако он требует проведения больших расчетов для получения необходимого результата, причем расчеты обычно производятся на машине. Число случаев, когда аппроксимация Чебышева может быть определена аналитически в замкнутой форме, очень мало.

Ряд методов проектирования нерекурсивных или трансверсальных фильтров стимулирован работами по проектированию фазированных антенных решеток для получения требуемых диаграмм направленности [45, 46, 47].

Блекман ([11], стр. 158—159) рассматривает в общих чертах проектирование нерекурсивных фильтров методом трансформирования. В этом методе предполагается, что

передаточная функция задана в форме квадрата амплитуды с помощью тригонометрического полинома.

Блекман и Таки [13] и Блекман [11] показали также те вычислительные преимущества, которые могут быть получены при построении нерекурсивного фильтра в виде последовательного соединения простых суммирующих

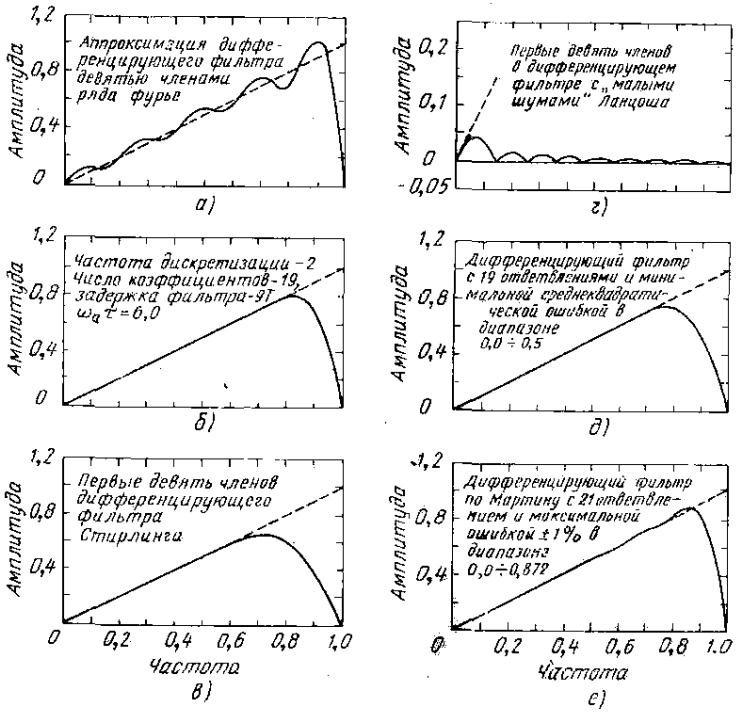


Рис. П. 10. Дифференцирующий фильтр первого порядка, спроектированный в виде нерекурсивных фильтров шестью различными методами.

устройств и дециматоров. Этот метод особенно удобен, когда расчет фильтров производится ручным способом или с помощью простого вычислительного устройства.

П.4.5. Примеры

Для сравнения некоторых методов проектирования нерекурсивных фильтров, упомянутых в этой работе, ниже рассматривается шесть различных методов проектирования дифференцирующего фильтра. Сравнение проводится на основании нормированной амплитудно-частотной характеристики, изображенной на шкале частот, в свою очередь нормированной так, что единица нормированной частоты соответствует частоте Найквиста $\omega_s/2$. Первые пять фильтров имеют по 19 ответвлений каждый, шестой фильтр имеет 21 ответвление. Все фильтры антисимметричны с нулевым центральным ответвлением, т. е.

$$H^*(z) = \frac{\pi}{T} \sum_{n=1}^{9\ (10)} a_n (r^n - z^{-n}), \qquad a_0 = 0. \qquad (\text{П.21})$$

В табл. П.2 и П.3 для каждого фильтра приводятся коэффициенты a_n и амплитудно-частотная характеристика с нормировкой частотной шкалы $T = \pi$ *сек*.

Фильтр, полученный с помощью прямого метода Фурье, показан на рис. П.10,*а* (видны колебания Гиббса). При применении метода весовых функций со значением $\omega_a \tau = 6{,}0$ для взвешивания получен фильтр, характеристика которого приведена на рис. П.10,*б*. У этого фильтра может быть пригодно для взятия производных 80% ширины полосы частот. При использовании в формуле дифференцирования Стирлинга разностей вплоть до девятого порядка получают фильтр рис. П.10,*в*. Этот фильтр сохраняет ошибку по крутизне не более 1% в диапазоне до 60% частоты Найквиста (ясно, что последние два члена a_8 и a_9 пренебрежимо малы).

Ланцошом ([12], стр. 321—322) предложен метод проектирования фильтра, рис. П.10,*г*, для снижения коэффициента передачи шумов (минимум Σa^2_j) при взятии первой производной ($\Sigma j a_j = 1$). Легко видеть, что эффект этого метода оптимизации сводится к тому, что с помощью фильтра пытаются аппроксимировать нулевую частотную характеристику повсюду на действительной оси частот, кроме точки $\omega = 0$, где крутизна должна быть равна единице. Используемый частотный диапазон для такого дифференцирующего фильтра составляет менее 2%; следовательно, он приемлем только для очень медленно изменяющихся сигналов.

Если при проектировании фильтра использовался метод наименьших квадратов с ошибкой (отклонение от точного дифференцирования), взвешенной только в интервале $0 < |\omega| < 0{,}5\omega_s/2$, то частотная характеристика фильтра будет иметь такой вид, как показано на рис. П.10,*д*. Характеристика является почти идеальной до 60% интервала Найквиста, а эффективная ширина полосы частот (1%-ная ошибка) составляет 70% этого интервала, что представляет значительное улучшение по сравнению с фильтром Стирлинга.

Последний фильтр заимствован у Мартина ([44], стр. 77), где критерием проектирования была относительная ошибка минимаксного типа, колеблющаяся в пределах ±1%. Полезная ширина полосы частот составляет примерно 87% и является максимально возможной в пределах однопроцентной относительной ошибки и при общем количестве ответвлений 21.

Таким образом, каждый из методов проектирования нерекурсивного фильтра имеет свои преимущества и недостатки. Выбор метода в конечном счете зависит от требуемых характеристик фильтра.

Из (П.20) видно, что число требуемых ответвлений быстро возрастает при необходимости иметь резкие изменения амплитудно-

Таблица П.2

Коэффициенты дифференцирующего фильтра

Ответвления	(а)	(б)	(в)	(г)	(д)	(е)
1	1,000000	0,967288	0,900000	0,001754	0,939722	0,983896
2	—0,500000	—0,437297	—0,327273	0,003509	—0,389068	—0,468363
3	0,333333	0,245513	0,127273	0,005263	0,187977	0,287290
4	—0,250000	—0,143478	—0,044056	0,007018	—0,088332	—0,191291
5	0,200000	0,081825	0,012587	0,008772	0,037527	0,130620
6	—0,166667	—0,043622	—0,002797	0,010526	—0,013638	—0,088958
7	0,142857	0,020715	0,000450	0,012281	0,003969	0,059197
8	—0,125000	—0,008042	—0,000046	0,014035	—0,000828	—0,038097
9	0,111111	0,001962	0,000002	0,015789	0,000095	0,025113
10	—	—	—	—	—	—0,009885

Таблица П.3

Амплитудно-частотная характеристика дифференцирующего фильтра

Частота	(а)	(б)	(в)	(г)	(д)	(е)
0,00	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000
0,05	0,083424	0,050055	0,050000	0,039774	0,050000	0,050291
0,10	0,105016	0,099960	0,100000	0,035258	0,100000	0,100912
0,15	0,116495	0,149931	0,150000	0,000461	0,150000	0,149672
0,20	0,189713	0,200065	0,200000	0,017187	0,200000	0,198072
0,25	0,283682	0,250056	0,250000	0,003678	0,250000	0,250262
0,30	0,318119	0,299859	0,300000	0,010960	0,300000	0,302910
0,35	0,316002	0,349907	0,349999	0,004562	0,350000	0,349783
0,40	0,377044	0,400182	0,399991	0,007686	0,400000	0,396110
0,45	0,484542	0,450055	0,449937	0,004922	0,450000	0,450285
0,50	0,531527	0,499649	0,499662	0,005584	0,500000	0,504930
0,55	0,514484	0,549930	0,548557	0,005101	0,550018	0,549490
0,60	0,556781	0,600516	0,594923	0,004057	0,600107	0,594200
0,65	0,687432	0,649795	0,634901	0,005200	0,649791	0,651518
0,70	0,761116	0,699105	0,661293	0,002845	0,695820	0,706458
0,75	0,708095	0,751297	0,663135	0,005257	0,728011	0,745921
0,80	0,706175	0,794590	0,627124	0,001814	0,726028	0,808830
0,85	0,906289	0,785264	0,541529	0,005289	0,662477	0,857662
0,90	1,077312	0,659812	0,401698	0,000884	0,515273	0,819302
0,95	0,790293	0,384161	0,214675	0,005303	0,284239	0,528082
1,00	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000	0,000000

частотной характеристики. Рекурсивные фильтры, описанные в следующем разделе, дают возможность решить эту проблему более экономично, чем нерекурсивные фильтры.

П.5. МЕТОДЫ ПРОЕКТИРОВАНИЯ РЕКУРСИВНЫХ ФИЛЬТРОВ

Основная форма рекурсивного цифрового фильтра $H^*(z)$ задается следующим выражением:

$$H^*(z) = \sum_{j=0}^{N} a_j z^{-1} \Big/ 1 + \sum_{j=1}^{N} b_j z^{-1}, \qquad (П.22)$$

где z^{-1} — оператор единичной задержки. Тогда общей задачей проектирования рекурсивного фильтра является определение коэффициентов фильтра a_j и b_j таким образом, чтобы выполнялись требования к фильтру.

Существует два основных метода решения этой задачи проектирования. Первый, и самый прямой, метод состоит в определении коэффициентов цифрового фильтра a_j и b_j с помощью некоторого расчета непосредственно по параметрам фильтра. При этом может применяться теория аппроксимации рациональных функций тригонометрических полиномов, описанная много раз в литературе (см. например, Уолш [48], Чини и Лоеб [49], Стур [50]). Сюда же следует отнести специфические итеративные методы проектирования, а также процедуры, основанные на методе проб и ошибок.

Вторым основным методом определения коэффициентов цифрового фильтра является косвенный метод, состоящий из двух этапов. Сначала рассчитывается подходящий аналоговый фильтр $H(s)$, который соответствует параметрам проектируемого цифрового фильтра. Затем ищется соответствующая дискретная модель рассчитанного аналогового фильтра. Таким образом, этот метод позволяет эффективно использовать обширную литературу по проектированию аналоговых фильтров, тщательно разработанную инженерами-электриками за последние тридцать пять лет. Косвенный метод используется при цифровом моделировании аналоговых фильтров: здесь аналоговый фильтр уже известен и требуется лишь провести его дискретизацию.

В этом разделе рассматриваются (не обязательно в порядке степени важности) три различных способа выполнения дискретизации, требуемой при косвенном ме-

тоде: стандартное z-преобразование, билинейное z-преобразование и метод Боксера и Талера. Затем следует описание некоторых других методов проектирования.

П.5.1. Стандартное z-преобразование *)

Косвенный метод требует дискретизации аналогового фильтра $H(s)$, передаточная характеристика которого имеет следующий вид:

$$H(s)=\sum_{m=0}^{M} c_m s^m \Big/ \sum_{n=0}^{N} d_n s^n. \qquad (П.23)$$

Так как цифровые фильтры должны быть обязательно эффективно *ограничены по полосе* и так как $H(s)$ в (П.23) не строго ограничена по полосе, то в процессе дискретизации должна иметь место некоторая форма аппроксимации.

Характер аппроксимации, присущий стандартному z-преобразованию, можно видеть из определяющих уравнений преобразования. Стандартное z-преобразование [6] этой передаточной характеристики определяется выражением

$$H^*(s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} H(s+jn\omega_s)+\frac{T}{2}h(0^+) \qquad (П.24)$$

или, что эквивалентно,

$$H^*(z)=T\sum_{n=0}^{\infty}[h(nT)z^{-n}. \qquad (П.25)$$

Предполагается, что асимптотическая характеристика для большого s имеет вид

$$\lim_{s\to j\infty}|H(s)|=\lim_{s\to j\infty}|1/(s/\omega_c)^n|, \qquad n>0. \qquad (П.26)$$

Таким образом, из (П.25) z-преобразование определяется так, что импульсная характеристика дискретизованного фильтра идентична дискретизованной импульсной характеристике аналогового фильтра. Далее, $H^*(s)$ периодична по ω с периодом ω_s. Из (П.24) следует, что в основной полосе $(-\omega_s/2\leqslant\omega\leqslant\omega_s/2)$ частотные характеристики полученного дискретизованного фильтра $H(s)$

*) Материал этого раздела близко следует содержанию работ Кайзера [28] и Гоулдена и Кайзера [51].

отличаются от частотных характеристик аналогового фильтра $H(s)$, причем разность представляет собой результат *наложения*, вызванного членами вида $H(s+jn\omega_s)$ при $n\neq 0$. Если $H(s)$ ограничена по полосе, т. е. $|H(s)|=0$ при $|\omega|>\omega_s/2$, то не имеется ошибки, вызываемой наложением, и частотная характеристика дискретного фильтра идентична частотной характеристике аналогового фильтра. Однако если $H(s)$ — рациональная функция от s, то $H(s)$ не ограничена по полосе и, следовательно, $H(s)\neq H^*(s)$ в основной полосе.

Величина ошибки, вызванная наложением, зависит непосредственно от асимптотического поведения $H(s)$ на высокой частоте, определяемого (П.26). Если n велико и $\omega_c\ll\omega_s/2$, то ошибки наложения будут небольшими и стандартное z-преобразование в общем случае будет давать удовлетворительный цифровой фильтр. Однако при широкополосном моделировании ω_c обычно является значительной частью $\omega_s/2$. Кроме того, многие аналоговые фильтры, например эллиптические фильтры или фильтры Чебышева II типа, дают передаточные функции, в которых n не больше единицы. Эти два условия, а именно $\omega_c\approx\omega_s/2$ и $n=1$, могут привести к большим ошибкам, вызванным наложением в частотных характеристиках фильтра, полученного с помощью стандартного z-преобразования, и, таким образом, привести к неприемлемому результату.

Чтобы уменьшить возможность появления ошибки, вызванной наложением, можно модифицировать $H(s)$ путем каскадного подключения широкополосного фильтра нижних частот $G(s)$ с достаточно большим n. Этот *защитный* фильтр $G(s)$ обычно выбирают так, чтобы иметь плоскую амплитудную и линейную фазовую характеристики в том частотном диапазоне, где требуется, чтобы $H^*(s)$ точно аппроксимировал $H(s)$. Защитный фильтр получается при использовании одной из стандартных форм фильтра нижних частот, имеющего только полюсы (например, фильтра Баттерворта или фильтра Чебышева I типа), и, если это необходимо, путем включения после него всепропускающего фильтра для выравнивания фазы.

Процесс состоит в получении $H_m(s)$ в виде

$$H_m(s)=G(s)H(s) \qquad (П.27)$$

и затем в применении стандартного z-преобразования к этой $H_m(s)$.

Если $H(s)$ дана в виде дроби, в числителе которой — полином $N(s)$ порядка n_N, а в знаменателе — полином $D(s)$ порядка n_D, где $n_D > n_N$, то для применения стандартного z-преобразования вначале требуется определить нули полинома $D(s)$, затем найти разложение $H(s)$ на элементарные дроби по этим полюсам и, наконец, произвести z-преобразование каждого члена в отдельности. Все эти преобразования будут иметь вид

$$\frac{1}{s+a} \to \frac{T}{1-e^{-aT}z^{-1}}. \qquad (П.28)$$

Таким образом, легко видеть, что $H^*(z)$ будет рациональным относительно z^{-1} и будет иметь не больше $2n_D$ коэффициентов. Если, кроме того, используется защитный фильтр порядка n_G, то полученное $H^*_m(z)$ окажется более сложным и будет иметь не больше $2(n_D+n_G)$ коэффициентов.

Другим ограничивающим свойством стандартного z-преобразования является то, что моменты $h(t)$ не остаются инвариантными, т. е. в общем случае *)

$$T\sum_{l=0}^{\infty}(lT)^n h(lT) \neq \int_0^{\infty} t^n h(t)\,dt. \qquad (П.29)$$

Однако обычно коэффициенты числителя $H^*(z)$ могут немного изменяться с тем, чтобы обеспечивалось равенство первых нескольких моментов, не оказывая при этом значительного влияния на общий вид частотной характеристики $H^*(z)$.

П.5.2. Билинейное z-преобразование **)

Чтобы избежать проблемы наложения, возникающей при стандартном z-преобразовании, можно воспользоваться преобразованием, которое отображает всю комплексную плоскость s, в горизонтальную полосу в плоскости s_1, ограниченную линиями $s_1=-j\omega_s/2$ и $s_1=j\omega_s/2$. Так как допустимая $H^*(z)$ должна быть также периодичной по ω с периодом ω_s, то в результате этого преобразования $H(s)$ должна идентично отобра-

*) Эта неинвариантность значений моментов была основной причиной, по которой Блекман ([11], стр. 83) отказался от стандартного z-преобразования для своего особого метода сглаживания данных и прогнозирования.

**) Тастин [19] один из первых применил билинейное преобразование для анализа дискретных систем.

жаться в каждой из других горизонтальных полос, ограниченных линиями

$$s_1 = j\left(n-\frac{1}{2}\right)\omega_s \text{ и } s_1 = j\left(n+\frac{1}{2}\right)\omega_s,$$

где n — целое число.

Преобразование с такими свойствами является билинейным z-преобразованием, определяемым следующим образом:

$$s = \frac{2}{T}\,\mathrm{th}\left(\frac{s_1 T}{2}\right), \qquad (П.30)$$

которое после подстановки принимает вид

$$z^{-1} = e^{-s_1 T}, \quad s = \frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}. \qquad (П.31)$$

Таким образом, это алгебраическое преобразование (П.31) отображает левую часть плоскости s на внешнюю относительно единичной окружности часть плоскости z^{-1}. Ошибки, вызываемые наложением, исключаются, так как наложения здесь не происходит.

Передаточной характеристике придается z-форма путем простой подстановки выражения (П.31) в $H(s)$. Следовательно,

$$H^*(z) = H(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}. \qquad (П.32)$$

Эта особенность вызывает нелинейную деформацию частотной шкалы, в чем можно убедиться, взяв $s_1=j\omega_1$ и $s=j\omega$ в (П.30). Тогда получим

$$\frac{\omega T}{2} = \mathrm{tg}\left(\frac{\omega_1 T}{2}\right). \qquad (П.33)$$

Отклонение этой зависимости от линейной показано на рис. П.11.

Из-за этой деформации z-форма является наиболее пригодной при аппроксимациях дискретным фильтром аналоговых фильтров, амплитудные характеристики которых могут быть разделены по частотной шкале на чередующиеся полосы пропускания и затухания с примерно постоянным усилением или затуханием в каждой полосе. Такая частотная характеристика является типичной для многих низкочастотных, полосовых и режектор-

ных фильтров. Компенсация эффекта деформации может осуществляться путем предварительного искажения аналогового фильтра противоположным образом, так чтобы после применения билинейного z-преобразования критические частоты были сдвинуты назад к требуемым значениям [51].

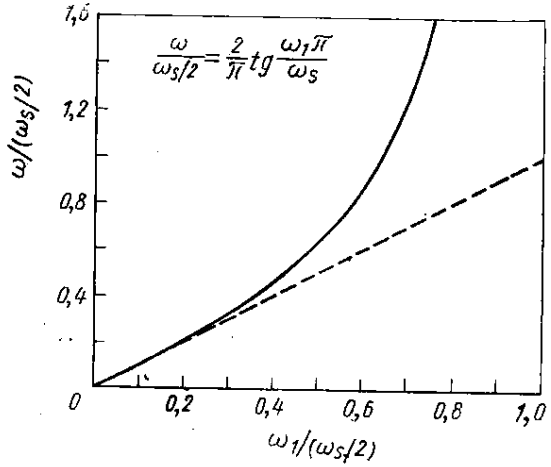


Рис. П.11. Нелинейная деформация частотной шкалы при билинейном z-преобразовании.

В качестве простого примера использования билинейного z-преобразования с компенсацией деформации частотной шкалы рассмотрим дискретизацию фильтров нижних частот $B_n(s)$ типа Баттерворта. Квадрат модуля передаточной функции фильтров этого класса задается уравнением

$$B_n(s)\,B_n(-s)=\left[1+(-1)^n\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^{2n}\right]^{-1}, \qquad (П.34)$$

где ω_0 — частота среза. Дискретизация заключается просто в замене ω_0 ее предварительно деформированным значением, определяемым из (П.33) следующим образом:

$$\omega_0 \to \frac{2}{T}\,\mathrm{tg}\,(\omega_0 T/2). \qquad (П.35)$$

Далее, подставляя (П.30) и (П.35) в (П.34), найдем выражение для квадрата модуля передаточной функции

требуемого цифрового фильтра:

$$B^*_n(s)\,B^*_n(-s)=\frac{1}{1+(-1)^n\,[\mathrm{th}\,(s_1T/2)/\mathrm{tg}\,(\omega_0T/2)]^{2n}}, \qquad (П.36)$$

которая после подстановки $s_1=j\omega$ непосредственно дает

$$|B^*_n(j\omega)|^2=\frac{1}{1+[\mathrm{tg}\,(\omega T/2)/\mathrm{tg}\,(\omega_0T/2)]^{2n}}. \qquad (П.37)$$

Передаточную характеристику требуемого цифрового фильтра найдем, подставляя (П.31) вместе с (П.35) в (П.34),

$$B^*_n(z^{-1})=\frac{1}{\left\{1+(-1)^n\left[\left(\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)\Big/\,\mathrm{tg}\,(\omega_0T/2)\right]^{2n}\right\}^{+}}, \qquad (П.38)$$

где знак + означает, что сохраняются только те n корней полинома по z^{-1} в знаменателе, которые лежат за пределами единичной окружности. (Другие n корней располагаются геометрически симметрично относительно единичной окружности внутри нее.)

Интересно отметить, что этот метод проектирования, особенно в отношении фильтров Баттерворта, время от времени различными авторами открывается заново, хотя и с различной терминологией. Например, у Рэйдера и Голда ([53], стр. 17), Холтца и Леондеса ([54], стр. 270) рассмотрены фильтры вида (П.37) без применения билинейного преобразования или указания на прямую связь с ним. Там же приведены пять других фильтров, относящихся к виду (П.37), один из которых соответствует выражению, обратному выражению (П.31), и по существу является его вариантом для фильтра верхних частот.

Возвращаясь к билинейному z-преобразованию, мы видим, что если амплитудно-частотные характеристики не являются кусочно постоянными в большей части частотного интервала Найквиста, то деформация частоты при методе билинейного z-преобразования не дает удовлетворительного метода расчета фильтров. Это непосредственно видно для широкополосного дифференцирующего фильтра $H(s)=s$, если обратиться к рис. П.11 и интерпретировать его как амплитудно-частотные характеристики этого фильтра.

Таким образом, билинейное z-преобразование имеет два основных преимущества. Во-первых, амплитудно-

частотная характеристика аналогового фильтра переходит в характеристику цифрового фильтра с учетом деформации частотной шкалы, т. е. аналоговые фильтры с равноволновыми амплитудными характеристиками преобразуются в равноволновые дискретные фильтры, у которых необходимо только вычислить и скомпенсировать сдвиг по частоте положений максимумов и минимумов. Во-вторых, применение билинейного z-преобразования является алгебраическим по форме и поэтому может с одинаковым успехом использоваться для рациональных передаточных характеристик аналогового фильтра как в полиномиальной форме, так и в форме произведения.

Что касается моментов $h(t)$, то можно показать ([11], стр. 74), что только два первых ненулевых момента остаются неизменными при использовании билинейного z-преобразования. Как и в случае стандартного z-преобразования, может быть достигнуто согласование для моментов более высоких порядков, если в коэффициентах числителя $H^*(z)$ произвести небольшие изменения. Эта модификация метода некоторым образом соответствует модифицированному методу моментов Блекмана ([11], стр. 75).

При сравнении методов билинейного z-преобразования и стандартного z-преобразования видно, что оба метода приводят к дискретным передаточным функциям, *рациональным по* z^{-1}, *имеющим один и тот же порядок*, равный порядку аналогового фильтра. Далее, когда отношение модулей полюсов аналогового фильтра к частоте дискретизации достигает нуля, то, как и можно было предполагать, два метода дают одинаковые результаты. Для получения широкополосных фильтров при использовании стандартного z-преобразования обычно должны применяться защитные фильтры, которые приводят к увеличению порядка цифрового фильтра. Для получения широкополосных фильтров с применением билинейного z-преобразования вместо этого должна быть скомпенсирована частотная деформация. Хотя и нет необходимости в увеличении порядка фильтра, применение этого метода ограничено фильтрами с кусочно постоянными амплитудными характеристиками.

Гоулден и Кайзер [52] использовали гибкость этих двух методов проектирования при создании программы синтеза цифрового фильтра общего вида. По их программе вначале синтезируется аналоговый фильтр для основных структур фильтров нижних частот*) (Бесселя, Баттерворта, Чебышева, эллиптического и т. д.), затем они преобразуются с помощью одного из четырех преобразований: фильтр нижних частот в фильтр нижних частот, в полосовой фильтр, в режекторный фильтр или в фильтр верхних частот. Наконец, по этой программе используются методы стандартного z-преобразования или билинейного z-преобразования (включая предвари-

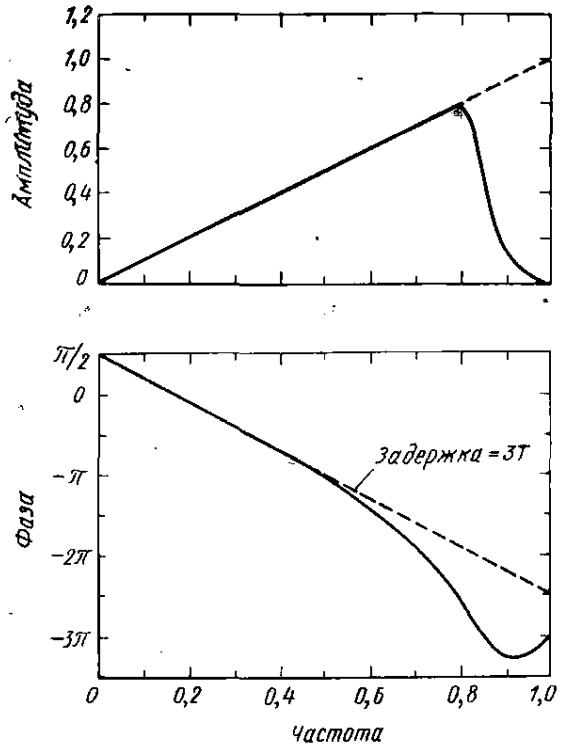


Рис. П.12. Частотная характеристика цифрового дифференцирующего фильтра рекурсивного типа. Фильтр был получен с помощью стандартного z-преобразования с применением последовательно включенного защитного фильтра в виде фильтра нижних частот Чебышева девятого порядка с пульсацией в полосе пропускания 0,1 *дб*, угловой частотой 0,8 *рад/сек*, $T=\pi$.

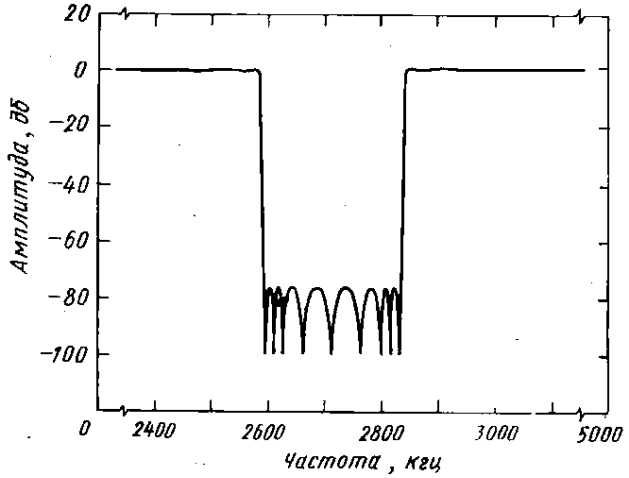
*) Основные структуры этих фильтров подробно рассматриваются Вайнбергом [55], Калаханом [56] и Сторером [57].

тельную деформацию) для получения результирующего цифрового фильтра. Для каждой схемы цифрового фильтра придаются полные графические данные и таблицы.

П.5.3. Два примера рекурсивных фильтров

Чтобы показать области применения и ограничения, связанные со стандартным и билинейным z-преобразованиями, рассмотрим кратко два примера.

Первый пример касается широкополосного дифференцирующего фильтра, амплитудные характеристики которого отклоняются от идеальных не более чем на 0,1 *дб* в диапазоне до 80% частоты Найквиста. Так как амплитудная характеристика не является постоянной, то билинейное z-преобразование не может быть удовлетворительно использовано. Вместо него применяется стандартное z-преобразование. Защитный фильтр необходим для уменьшения ошибки, вызываемой наложением на всех частотах в пределах требований, предъявляемых к фильтру. В качестве защитного применяется фильтр нижних частот Чебышева девятого порядка, имеющий пульсации амплитудно-частотной характеристики не более 0,1 *дб* и обеспечивающий затухание 50 *дб* при 120% частоты Найквиста. Амплитудная характеристика результирующего дискретного фильтра приведена на рис. П.12. Запаздывание в $3T$ *сек* можно сравнить с запаздыванием $9T$ *сек* для нерекурсивных фильтров, как, например, на рис. П.10,*б*.



Затухание в полосе пропускания составляет 0,25 *дб*±0,25 *дб* {0—2,588 *Мгц* и 2,844—5,0 *Мгц*}, в полосе непропускания — больше 75 *дб* {2,596—2,836 *Мгц*}, порядок фильтра — 22.

Рис. П.13. Частотная характеристика дискретного режекторного фильтра эллиптического типа, полученного с применением билинейного z-преобразования с коррекцией путем деформации шкалы частот.

Интересно отметить, что для обоих типов фильтров требуется восемнадцать коэффициентов; запаздывание рекурсивного фильтра составляет лишь одну треть от запаздывания нерекурсивного фильтра за счет фазовой характеристики, которая отклоняется от линейной по мере приближения к частоте Найквиста.

В качестве второго примера рассмотрим синтез цифрового режекторного фильтра, имеющего равноволновые амплитудные характеристики как в полосе пропускания, так и в полосе запрета. Билинейное z-преобразование применяется с предварительной деформацией требуемых граничных частот. Полученный результат приведен на рис. П.13. Этот результат не был бы достигнут ни методом стандартного z-преобразования, ни с помощью какого-либо метода проектирования нерекурсивных фильтров. Так, если бы те же требования были реализованы с помощью нерекурсивного фильтра, то число ответвлений, вычисленное с помощью (П.20), составило бы примерно

$$n_s \approx \frac{11,5}{8/5000} \approx 7200!$$

П.5.4. Метод Боксера—Талера

Другой метод дискретизации аналоговых фильтров, связанный с билинейным z-преобразованием, состоит в применении способа Боксера и Талера [21, 22]. Прекрасное описание применения этого метода для численного определения характеристики аналоговых систем дано Гибсоном [25].

Этот метод в применении к проектированию цифровых фильтров состоит, прежде всего, в записи передаточной характеристики аналогового фильтра в степенях s^{-1}, а не в степенях s. Методика преобразования затем включает замену каждой взятой в отдельности степени s^{-1} соответствующим рациональным z-выражением *). Результирующее рациональное выражение относительно z^{-1}, полученное после приведения подобных членов, представляет собой требуемый цифровой фильтр. Как и в случае методов стандартного и билинейного z-преобразований, порядок результирующего фильтра относительно z^{-1} идентичен порядку первоначального аналогового фильтра $H(s)$, т. е., если $H(s)$ имеет порядок M/N по s, где $M \leqslant N$, то результирующий фильтр $H^*(s)$ должен иметь порядок M/N по z^{-1}. Далее, характер подстановки является чисто алгебраическим, и поэтому исходное $H(s)$ не

*) Таблицы соответствующих z-преобразований даются в литературе [21, 22, 25], из которой в [25] приводятся наиболее полные выражения вплоть до 11-го порядка.

должно иметь форму произведения или разложения на элементарные дроби.

Физическая интерпретация этого метода дискретизации в частотной области усложняется тем фактом, что каждая высшая степень s^{-1} аппроксимируется различной и более точной рациональной функцией от z^{-1}. Результатом этого факта является также то, что

$$B(G_1G_2)=B(G_1)B(G_2), \qquad (\text{П}.39)$$

где B — преобразование Боксера — Талера и G_1 и G_2 — аналоговые фильтры порядка больше нулевого.

Таким образом, точный характер аппроксимации зависит от z-формы Боксера — Талера для s^{-n} и от конкретного выражения $H(s)$. Как правило, равноволновые аналоговые фильтры $H(s)$ не преобразуются посредством z-преобразования Боксера — Талера в равноволновые цифровые фильтры.

Другое затрудняющее обстоятельство состоит в том, что по мере увеличения степени s^{-1} сложность z-преобразования возрастает, увеличивая, таким образом, число и требуемую точность (влияние которой будет рассмотрено в П.6) производимых алгебраических действий. То, что этот факт влияет на ошибку, было отмечено Гибсоном ([25], стр. 155—159), который кратко рассмотрел источники и влияние ошибки.

П.5.5. Некоторые другие методы проектирования рекурсивных фильтров

До сих пор методы, предлагавшиеся для проектирования полосовых цифровых фильтров, предусматривали либо проектирование вначале аналогового полосового фильтра, а затем дискретизацию результата, либо последовательное соединение перекрывающихся фильтров верхних и нижних частот. Брум [58] предлагает получить цифровой полосовой фильтр $H^*_1(z)$ непосредственно из фильтра нижних частот $H^*(z)$ с помощью выражения

$$H^*_1(z)=H^*(ze^{j\omega_0T})+H^*(ze^{-j\omega_0T}), \qquad (\text{П}.40)$$

где ω_0 — новая центральная частота. Затем Брум показывает, что если $H^*(z)$ дается в рациональной форме

уравнением (П.22), то $H^*_1(z)$ можно непосредственно записать как

$$H^*_1(z)=\frac{2\sum\limits_{j=0}^{N}\sum\limits_{k=0}^{N} b_ja_kz^{-(j+k)}\cos[\omega_0T(j-k)]}{\sum\limits_{j=0}^{N}\sum\limits_{k=0}^{N} b_jb_kz^{-(j+k)}\cos[\omega_0T(j-k)]}. \qquad (\text{П}.41)$$

Характеристика полосового фильтра $H^*_1(z)$ представляет собой обычную характеристику низкочастотного фильтра $H^*(z)$ с нулевой центральной частотой, смещенную на $+\omega_0$ и отличающуюся только тем, что Брум называет *ошибкой искажения*, созданного перекрытием характеристик $H^*(z)$, смещенных на $+\omega_0$ и $-\omega_0$. Применение хорошего фильтра нижних частот может уменьшить ошибку искажения до очень малого уровня.

Второй и более прямой метод получения цифровых полосовых фильтров состоит в использовании дискретизирующего преобразования аналогового фильтра нижних частот непосредственно в цифровой полосовой фильтр. Рэйдер и Голд [53], стр. 26—28) предлагают для этой цели преобразование второго порядка

$$s\rightarrow\frac{z^2-2z\cos\omega_cT+1}{z^2-1}, \qquad (\text{П}.42)$$

Это преобразование отображает всю мнимую ось плоскости s на верхнюю и нижнюю дуги единичной окружности. При этом начало координат в плоскости s отображается в две точки $e^{\pm j\omega_cT}$. Таким образом, применение (П.42) для фильтра нижних частот $H(s)$ дает цифровой полосовой фильтр со средней частотой ω_c. В своем отчете [53] Рэйдер и Голд кратко описывают процесс проектирования, включая коррекцию деформации, и дают необходимые для расчета уравнения.

Другой довольно удобный метод проектирования рекурсивных фильтров заключается в формировании $H^*(z)$ со знаменателем, полученным путем подстановки (П.28) или (П.31) в знаменатель выражения $H(s)$ для аналогового фильтра, и с числителем, оставленным в виде полинома от z. Затем можно определить неизвестные коэффициенты числителя, чтобы удовлетворить требованиям ограничения моментов, как это делает Блекман в своем

модифицированном методе моментов ([11], стр. 75), или чтобы удовлетворить другим критериям во временной или частотной областях. Мантей [59] подробно исследовал проблемы сходимости, связанные с выбором этих неизвестных коэффициентов числителя при различных критериях.

Блекман и Таки [13] и Блекман [11] показали, что вычислительные преимущества возрастают при выполнении нерекурсивного фильтра с помощью определенной последовательности различных простых операций сложения, вычитания и выборки. Уайтлси [60] развил эти идеи, введя элементарную рекурсивную операцию, и привел ряд комбинаций этих операций со специфическими свойствами фильтров нижних частот и полосовых фильтров.

Янг [61] и позднее Брум [62] спроектировали несколько цифровых фильтров в основном всепропускающего типа, дающих ряд дискретных ортонормированных откликов. Использование таких фильтров при изучении методов представления сигнала ведет к значительному упрощению анализа. В работе Янга имеется, кроме того, много деталей, касающихся применения фильтров.

Хотя рекурсивные цифровые фильтры являются выгодными с точки зрения объема необходимых вычислений, обычно они не имеют линейных фазовых характеристик. Брум тем не менее показывает, что их можно выполнить с линейными фазовыми характеристиками путем фильтрации входных временных последовательностей в прямом и обратном относительно времени направлении и суммировании двух результатов. Этот процесс, естественно, требует наличия прямой и обратной по времени входной последовательности.

Гоулден [17] описывает новый чрезвычайно эффективный путь реализации гребенки из многих смежных цифровых полосовых фильтров. В этом методе используется последовательность рекурсивных фильтров второго порядка и простой гребенчатый или нерекурсивный фильтр. Единственный гребенчатый фильтр является общим для всех полосовых фильтров.

Рассмотрев всевозможные методы проектирования рекурсивных цифровых фильтров, вернемся к вопросам, связанным с физической реализацией этих фильтров. Реализация должна быть схемной или с помощью расчетного алгоритма. В обоих случаях внимание концентрируется на вопросах точности воспроизведения коэффициентов, на эффектах округления результатов и выбора канонической формы реализации. Эти вопросы рассматриваются в следующем разделе.

П.6. ИССЛЕДОВАНИЕ ВОПРОСОВ ТОЧНОСТИ ПРИ ПРОЕКТИРОВАНИИ ЦИФРОВЫХ ФИЛЬТРОВ *)

Возрастающая точность вычислений быстродействующих цифровых вычислительных машин, более широкие динамические диапазоны переменных величин в моделируемых системах по амплитуде и частоте и усложнение самих моделируемых динамических систем делают необходимым более внимательное рассмотрение деталей вычислений и реализации рекурсивных цифровых фильтров. Многие из появившихся теперь проблем не возникали раньше [3, 4, 5, 8, 9, 16], поскольку применялись фильтры низкого порядка с низкими (10^{-2}—10^{-3}) требованиями к точности, или потому, что частоты дискретизации значительно превышали частоту динамической системы и частоту сигналов. Для специалистов, использующих различные методы проектирования рекурсивных цифровых фильтров, представляют особый интерес проблемы вычислений и возможность реализации, так как от них часто зависит успех или неудача практического использования данного фильтра.

Проблемы, рассматриваемые в этом разделе, касаются стабильности цифровых фильтров, точности арифметических устройств, необходимой для проведения требуемой фильтровой операции, численного определения коэффициентов цифрового фильтра для каждого основного метода проектирования фильтра и выбора формы реализации фильтра.

П.6.1. Проблема стабильности и точности коэффициентов

Рассматриваются только рекурсивные цифровые фильтры, так как внутренняя обратная связь в фильтрах такого типа заставляет придавать большее значение вопросам стабильности и точности. Нерекурсивные же фильтры не имеют цепей обратной связи, и, следовательно, для них по существу не возникает проблема стабильности, а точность их коэффициентов можно быстро оценить, рассмотрев относительные величины коэффи-

*) Материал этого раздела в основном взят из работы Кайзера [29].

циентов, образующих взвешенную последовательность. Для рекурсивных фильтров задача не является такой простой.

Остановимся на двух основных моментах проектирования рекурсивных фильтров — билинейном и стандартном z-преобразованиях, — применяя, где это возможно, полученные результаты и для других методов проектирования рекурсивных фильтров.

Рассмотрим сначала проблему стабильности.

Вспомним, что билинейное z-преобразование является по существу алгебраическим и состоит из замены или изменения переменной в передаточной характеристике непрерывного фильтра $H(s)$. Таким образом, если преобразование (П.32) проводится *точно*, то $H^*(z^{-1})$ будет стабильным, если стабильно $H(s)$. Далее, $H^*(z^{-1})$ будет точно такого же порядка, как $H(s)$. Билинейное z-преобразование теоретически можно использовать непосредственно для любой рациональной передаточной характеристики $H(s)$, имеющей полиномиальную форму или форму произведения. Позже будет показано, какая форма является более предпочтительной.

Метод стандартного z-преобразования состоит в разложении $H(s)$ на элементарные дроби в ее полюсах и затем в z-преобразовании каждой элементарной дроби с использованием пары преобразований

$$\frac{1}{s+a} \to \frac{T}{1-e^{-aT}z^{-1}} \qquad (П.28)$$

или других пар преобразований, выведенных отсюда. Таким образом, стандартное z-преобразование при применении его к стабильной передаточной характеристике $H(s)$ всегда дает фильтр $H^*(z^{-1})$, который также является стабильным при условии, что арифметические расчеты проводятся с бесконечной точностью.

Для обоих преобразований результирующая $H^*(z^{-1})$ для линейных аналоговых фильтров с сосредоточенными параметрами имеет общую форму

$$H^*(z^{-1}) = \frac{\sum_{k=0}^{n} a_k z^{-k}}{1+\sum_{k=1}^{n} b_k z^{-k}} = \frac{N_d(z^{-1})}{D_d(z^{-1})}, \qquad (П.43)$$

где b_0 взято равным единице без потери общности.

Прежде всего следует рассмотреть, с какой точностью должны быть известны коэффициенты b_k, чтобы все нули $D_d(z^{-1})$ лежали за пределами единичной окружности (требование для стабильного цифрового фильтра). Вначале нужно грубо установить пределы, затем более точно оценить чувствительность коэффициентов.

Полином $D_d(z^{-1})$ можно записать в виде произведения следующим образом:

$$D_d(z^{-1}) = \prod_{k=1}^{n} (1 - z^{-1}/z_k). \qquad (П.44)$$

Ради простоты представления предполагаем наличие у основной передаточной характеристики фильтра нижних частот $H(s)$ только простых полюсов, затем анализ нетрудно распространить на случай кратных полюсов и не низкочастотных фильтров.

Если применяется стандартное z-преобразование, то $D_d(z^{-1})$ принимает вид

$$D_d(z^{-1}) = \prod_{k=1}^{n} (1 - e^{p_k T} z^{-1}), \qquad (П.45)$$

где p_k выражает k-й полюс $H(s)$ и может быть комплексным. Для билинейного z-преобразования получим

$$D_d(z^{-1}) = \prod_{k=1}^{n} \left[1 - \frac{(1+p_k T/2)}{(1-p_k T/2)} z^{-1}\right]. \qquad (П.46)$$

Если предположить, что частота дискретизации $1/T$ выбрана по крайней мере вдвое больше максимальной критической частоты в $H(s)$ и в сигналах, обрабатываемых фильтром $H(s)$, то интересно рассмотреть поведение $D_d(z^{-1})$ при дальнейшем увеличении частоты дискретизации.

Из-за ограничений, накладываемых пределом Найквиста для стандартного z-преобразования, справедливо следующее выражение:

$$|\mathrm{Im}[p_k T]| \leqslant \pi, \qquad (П.47)$$

где Im обозначает мнимую часть. Критические частоты нормированы относительно половины частоты дискретизации следующим образом:

$$\mu_k = \frac{p_k T}{\pi} = p_k/\omega_n, \qquad (П.48)$$

где ω_n — частота Найквиста или половина частоты дискретизации. Обычно

$$|\mu_k| < 1. \qquad (П.49)$$

Таким образом, когда частота дискретизации возрастает, μ_k уменьшается от единицы и достигает нуля. Далее, для стандартного z-преобразования можно написать

$$[1 - e^{p_k T} z^{-1}] \xrightarrow[\text{при } T \to 0]{} [1 - (1 + \mu_k \pi) z^{-1}] \qquad (П.50)$$

и для билинейного случая

$$\left[1 - \frac{(1 + p_k T/2)}{(1 - p_k T/2)} z^{-1}\right] \xrightarrow[\text{при } T \to 0]{} [1 - (1 + \mu_k \pi) z^{-1}], \qquad (П.51)$$

откуда видно, что два метода проектирования дают в основном одни и те же характеристические полиномы $D_d(z^{-1})$ в пределе, когда T взято малым.

Исследование (П.50) и (П.51) показывает, что нули $D_d(z^{-1})$ стремятся сгруппироваться относительно точки $z^{-1} = +1$ в плоскости z^{-1}, т. е.

$$z_k \approx \frac{1}{1 + \mu_k \pi} \approx 1 - \mu_k \pi, \qquad (П.52)$$

где для стабильной системы μ_k имеет отрицательную действительную часть. Фильтр $H^*(z^{-1})$ становится нестабильным, если какой-либо из его полюсов перемещается внутрь единичного круга в результате некоторого возмущения или изменения коэффициентов b_j. Чтобы оценить порядок этого эффекта, вычисляют изменение, необходимое для того, чтобы нуль $D_d(z^{-1})$ оказался в точке $z^{-1} = 1$. Тогда из (П.44) и (П.52) следует:

$$D_d(z^{-1})|_{z^{-1}=1} \approx \prod_{k=1}^{n} (\mu_k \pi) = \prod_{k=1}^{n} (p_k T). \qquad (П.53)$$

Однако

$$D_d(z^{-1})|_{z^{-1}=1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k z^{-k}|_{z^{-1}=1} = 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k. \qquad (П.54)$$

Правая часть этого выражения является важной величиной и потому обозначается

$$F_0 = 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k. \qquad (П.55)$$

Таким образом, комбинируя (П.53) и (П.54), непосредственно видим, что если любое из b_k изменить на величину, заданную (П.55), то $D_d(z^{-1})$ будет иметь нуль при $z^{-1} = 1$ и, таким образом фильтр $H^*(z^{-1})$ будет иметь особенность на границе стабильности. При нуле $D_d(z^{-1})$, когда $z^{-1} = 1$, поведение $H^*(z^{-1})$ становится таким, как в том случае, когда в $H(s)$ присутствует интегрирование. Любое дальнейшее изменение величин в любом наборе коэффициентов b_k, приводящее к изменению знака $D_d(z^{-1})|_{z^{-1}=1}$, даст нестабильный фильтр, т. е. фильтр с некоторыми нулями $D_d(z^{-1})$, лежащими внутри единичного круга. Следовательно, (П.53) дает грубую оценку точности коэффициентов.

Из уравнения (П.53) следует, что для малого μ_k (большая частота дискретизации) предел точности коэффициентов зависит от порядка n фильтра и от шага дискретизации нормированных местоположений полюсов фильтра. Таким образом, переход от фильтра n-го порядка к фильтру порядка $2n$ при той же самой нормированной частоте потребует примерно вдвое большей точности разрядов для представления b_k. Подобным же образом удвоение частоты дискретизации для фильтра n-го порядка требует дополнительно $n \times \log_{10} 2$ или $0{,}3 \times n$ десятичных разрядов при представлении каждого b_k.

Выражение (П.54) дает разность [64], возвращающую к нулевой частоте, когда фильтр $H^*(z^{-1})$ реализуется в виде одиночной петли обратной связи. Это выражение можно также интерпретировать просто как величину, обратную множителю «мертвой» зоны λ у Блекмана ([11], стр. 75—76). Таким образом, для сложных фильтров с очень большими частотами дискретизации величина F_0 обычно очень мала. Например, фильтр Баттерворта нижних частот пятого порядка с частотой

среза, равной 1/10 частоты дискретизации, дает $H^*(z^{-1})$, имеющее $F_0=7{,}9\times10^{-5}$.

Проблема точности коэффициентов в дальнейшем несколько обостряется тем, что по мере уменьшения T b_k стремится по величине достигнуть биномиальных коэффициентов $\binom{n}{k}$ [65] и изменить свой знак. Таким образом, оценка $D^*_d(z^{-1})$ связана с вечной проблемой вычисления разности больших чисел. Лучшую оценку предела точности коэффициентов получают делением F_0, полученным из (П.55), на величину наибольшего b_k. Самая большая величина b_k задается приближенно выражениями

$$\text{макс}\, b_k \approx \binom{n}{[n/2]} \approx \frac{2^n}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{2}{\pi}},$$

$$\text{макс}\, b_k \approx \frac{4}{5}\cdot\frac{2^n}{\sqrt{n}}. \qquad (\text{П.56})$$

Следовательно, из (П.53), (П. 55) и (П.56) абсолютно минимальный предел числа десятичных разрядов m_d, требуемых для представления b_k, находят следующим образом:

$$m_d \geqslant 1 + \left[-\log_{10}\left(\frac{5\sqrt{n}}{2^{n+2}}\prod_{k=1}^{n} p_k T\right)\right], \qquad (\text{П.57})$$

где [ ] — обозначает целую часть числа.

Хотя предыдущий анализ дал легко вычисляемый предел абсолютной точности коэффициентов знаменателя рекурсивного цифрового фильтра, этот предел не обязательно является наилучшим возможным пределом, и нельзя ничего сказать о том, что будет с нулями $D_d(z^{-1})$ при внесении небольших возмущений (меньших F_0) в значения b_k. Недостаточно сказать, что цифровой фильтр $H^*(z^{-1})$ является стабильным; необходимо еще, чтобы получаемый цифровой фильтр имел частотные характеристики, близкие в некотором смысле к частотным характеристикам аналогового фильтра, который он аппроксимирует. Это означает, что следует определить чувствительность нулей $D_d(z^{-1})$ к изменениям в b_k. Самый прямой путь определения этой зависимости заключается в приравнивании двух форм знаменателя (П.43) и в по-

следующем расчете $\partial z_i/\partial b_k$. Для фильтров только с простыми полюсами это дает

$$\left.\frac{\partial z_i}{\partial b_k}\right|_{z^{-1}=z_i} = \frac{z_i^{k+1}}{\prod\limits_{l=1,\, l\neq i}^{n}(1-z_i/z_l)}, \qquad (\text{П.58})$$

откуда оценку общего дифференциального изменения в любом нуле можно произвести следующим образом:

$$dz_i = \sum_{k=1}^{n}\left.\frac{\partial z_i}{\partial b_k}\right|_{z^{-1}=z_i} db_k. \qquad (\text{П.59})$$

Эти результаты распространяются непосредственно на случай полюса любой кратности [66].

Используя тот факт, что полюс p_k у выражения $H(s)$ преобразуется в нуль $D_d(z^{-1})$ при e^{-p_kT} для стандартного z-преобразования и что при T, обеспечивающем $p_kT \ll 1$, нуль становится примерно равным $1-p_kT$ (ранее это же было получено с помощью (П.52)), относительное изменение δ_i в местоположении нуля z_i можно выразить в значениях относительного изменения e_k в коэффициенте b_k полинома $D_d(z^{-1})$. Применяя (П.58), найдем

$$e_k \approx \left[\prod_{\substack{l=1\\ l\neq i}}^{n}(z_l - z_i)\times\frac{\delta_i}{b_k}\right], \qquad (\text{П.60})$$

где

$$e_k = \Delta b_k/b_k, \qquad \delta_i = \Delta z_i/z_i$$

и $|1-z_i| \ll 1$, т. е. предполагается плотное группирование нулей. Для быстрой оценки значения, требуемого для e_k, произведение $(n-1)$ сомножителей может быть грубо аппроксимировано произведением (П.53), которое представляет собой просто F_0. Таким образом, из (П.60) видно, что требуемая точность для b_k увеличивается на коэффициент $\log_{10}(1/\delta_i)$ по сравнению с точностью, вытекающей из (П.57).

Возвратившись снова к (П.58) и (П.59), можно увидеть, что смещение нулей, вызванное изменениями в b_k, представляет собой в общем случае комплексную функцию, так как z_i может быть комплексным. Смещения в b_k могут появиться в результате неточности арифметических устройств, используемых при их вычислении,

или как результат усечения или округления полученных значений коэффициентов b_k до меньшего числа значащих разрядов.

Качественную оценку уравнения (П.58) можно также выполнить с помощью хорошо разработанной теории корневого годографа [67]. Например, изменения местоположения всех нулей в $D_d(z^{-1})$ в результате изменения ρ_k и b_k находят из соотношения

$$\left(1+\sum_{i=1}^{n} b_i z^{-1}\right)+\rho_k z^{-k}=0 \qquad (П.61)$$

или

$$\prod_{i=1}^{n}(1-z^{-1}/z_i)+\rho_k z^{-k}=0. \qquad (П.62)$$

Это выражение характерно для задачи стандартного корневого годографа с одиночной петлей обратной связи и полюсами передачи петли z_i, нулем k-го порядка в начальной точке и коэффициентом усиления петли ρ_k. Параметр F_0 просто есть усиление ρ_k, необходимое для того, чтобы корневой годограф проходил через точку $z^{-1}=1$. Таким образом, метод корневого годографа и интуиция, основанная на нем, могут применяться для решения рассматриваемой задачи.

При рассмотрении проблемы коэффициентов с позиций корневого годографа легко выявить влияние увеличения порядка фильтра и особенно увеличения частоты дискретизации. Влияние увеличения частоты дискретизации сказывается в тенденции группировки полюсов $H^*(z^{-1})$ еще более компактно относительно точки $z^{-1}=1$, чем это показано на рис. П.14 для фильтра третьего порядка. Когда порядок фильтра возрастает, увеличивается возможный порядок k нуля в начальной точке плоскости z^{-1}. Все n разветвлений корневых годографов начинаются в корнях z_i, когда ρ_k увеличивается, k ветвей сходятся к нулю k-го порядка в начальной точке и $n-k$ разветвлений отодвигаются в сторону бесконечности, приобретая в конце концов радиальную симметрию. Углы, образуемые годографами при их уходе с z_i, представляют собой значения угла, полученные при оценке (П.58) в каждом z_i. Значение ρ_k, при котором ветвь годографа впервые пересекает единичную окружность (граница стабильности), определяет пределы полного изменения,

которое может быть внесено в b_k без нарушения стабильности фильтра. Ясно, что, чем ближе к единичной окружности располагаются корни z_i вначале, тем меньше будет значение ρ_k, необходимое для перемещения их на границу. Таким образом, варьируя ρ_k (изменения в b_k), можно рассмотреть степень стабильности.

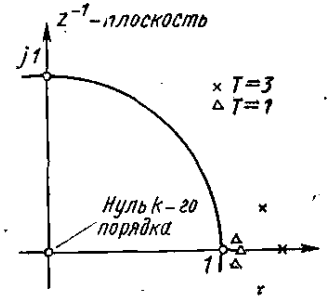


Рис. П.14. Влияние изменения частоты дискретизации на расположение нулей и полюсов.

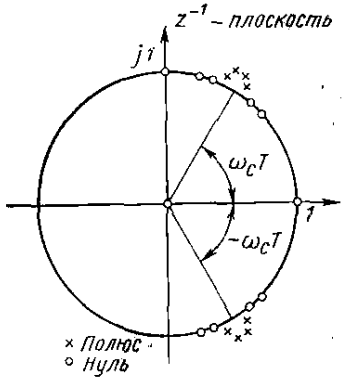


Рис. П.15. Расположение нулей и полюсов для цифрового полосового фильтра.

До этого момента в основном предполагалось, что $H(s)$ — характеристика фильтра нижних частот с простыми полюсами. Распространение ее на фильтры высоких частот, полосовые или режекторные фильтры и фильтры с полюсами более высокого порядка не представляет особых трудностей, если при этом использовать идеи метода корневого годографа. Например, цифровой вариант узкополосного полосового фильтра с центральной частотой ω_c будет иметь полюсы и нули, расположенные, как это показано на рис. П.15, около радиальных линий под углами $\pm\omega_c T$ радиан. Анализ влияния точности коэффициентов проводится так же, как было указано выше, за исключением того, что теперь при расчетах стабильности точки на единичной окружности вблизи $z^{-1}=\cos\omega_c T\pm j\sin\omega_c T$ заменяют точку $z^{-1}=1$. Это легко видеть для стандартного z-преобразования, где непрерывный полюс фильтра $H(s)$ при $p_k=\sigma_k+j\omega_k$ преобра-

зуется в нуль $D_d(z^{-1})$ при $e^{-p_k T}$, т. е. при $e^{-\sigma_k T} e^{-j\omega_k T}$, если использовать запись в полярной форме.

Таким образом, в основном благодаря малости действительных частей полюсов фильтра $H(s)$ полюсы в плоскости z^{-1} оказываются очень близки к единичной окружности и в результате ощутимо влияют на точность коэффициентов и поэтому должны учитываться, когда рассматривается влияние коэффициентов на параметры фильтра. Можно показать, что выражения, подобные (П.53) и (П.57), могут быть составлены для цифровых полосовых и режекторных фильтров. Выражения отличаются в основном тем, что для фильтра n-го порядка только $n/2$ членов в произведении $\prod_{k=1}^{n} p_k T$ будут в общем случае малы и, следовательно, только они будут оказывать влияние.

В этом разделе были установлены некоторые соотношения между порядком фильтра, местоположением полюсов, частотой дискретизации и точностью коэффициентов цифрового фильтра. Логически возникает вопрос, каким образом эти результаты влияют на выбор метода проектирования фильтра и выбор формы реализации цифрового фильтра? Эти вопросы рассматриваются в двух следующих разделах.

П.6.2. Вычислительные аспекты методов проектирования рекурсивных фильтров

Результаты предыдущего раздела, особенно выражения (П.55) и (П.53), устанавливающие, что

$$F_0 = 1 + \sum_{k=1}^{n} b_k \approx \prod_{k=1}^{n} p_k T, \qquad (\text{П.63})$$

имеют важное значение для выбора метода проектирования фильтра. Если дискретизируемый аналоговый фильтр имеет низкий порядок, его полюсы не очень быстро затухают с ростом k и имеют примерно одинаковые модули, и если частота дискретизации превышает не более чем в 5—10 раз средний модуль полюса, то большая часть приемов проектирования, описанных в разделе П.5, может с успехом применяться. Однако если порядок

фильтра высок, т. е. n велико и T таково, что $p_k T \ll \pi$, то надо быть осторожным при выборе метода проектирования. Основное правило, которому необходимо следовать, состоит в применении метода, включающего в себя (или по крайней мере допускающего) разложение фильтра высокого порядка на группу субфильтров низкого порядка и дальнейшую дискретизацию этих субфильтров.

Таким образом, необходимо прежде всего попытаться произвести непосредственную дискретизацию передаточной характеристики вида

$$H(s) = \sum_{m=0}^{M} c_m \Big/ \sum_{n=0}^{N} d_n s^n, \qquad (\text{П.23})$$

где N велико. Этот подход является характерным для метода Боксера — Талера и метода билинейного z-преобразования. Для повышения точности лучше разбить фильтр $H(s)$ на ряд субфильтров, соединенных последовательно или параллельно,

$$H(s) = \prod_{k=1}^{N} \frac{s - r_k}{s - p_k} = \sum_{j=1}^{N} \frac{k_j}{s - p_j}, \qquad (\text{П.64})$$

и затем произвести дискретизацию субфильтров, причем так, чтобы в результате образовался ряд цифровых субфильтров.

Разложение выражения $H(s)$ на элементарные дроби присуще методу стандартного z-преобразования и при его применении обычно выполняется в первую очередь [68, 69]. Хотя метод билинейного z-преобразования не требует разложения на множители знаменателя $H(s)$, он намного точнее, и, следовательно, ему должно быть отдано предпочтение в том случае, если произведено разложение (П. 64) на элементарные дроби. Такой подход используется в программе Гоулдена и Кайзера [52], которая была применена для синтеза фильтра с характеристикой, изображенной на рис. П.13. При другом способе, если он вообще применим, результаты проектирования были бы менее точными.

В тех случаях, когда не требуется особо высокая точность, как общее правило, неразумно получать или преобразовывать полиномы высокого порядка относительно

z. Точно разложить на множители полиномы относительно z обычно трудно из-за плотного группирования корней на средних и высоких относительных частотах дискретизации. Таким образом, все манипуляции с полиномом и разложение на множители должны проводиться в области s до дискретизации.

К применению итеративных методов проектирования или определения коэффициентов [11, 59] в общем случае цифровых фильтров рациональной формы (П.22) следует подходить с осторожностью. Лучше задаться цифровой формой в виде произведения или суммы членов первого и второго порядков, чем в виде частного двух полиномов высоких степеней по z.

Если предположить, что процесс дискретизации произведен должным образом, то следующим будет вопрос о том, какую форму физической реализации (аппаратура или вычислительный алгоритм) следует выбрать для цифрового фильтра или субфильтров. Рассмотрим этот вопрос.

П.6.3. Схемы реализации цифрового фильтра

Существует три основные формы реализации линейных цифровых фильтров рекурсивного типа: непосредственная (прямая), последовательная и параллельная, как показано на рис. П.16. В отношении стабильности два варианта прямой формы, рис. П.16,*а*, П.16,*б* полностью эквивалентны, но схема на рис. П.16,*а* содержит меньше элементов задержки. Результаты исследования стабильности, приведенные в разд. П.6.1, показывают, что проблема точности коэффициентов является, несомненно, самой острой при реализации прямой формы. Для любого достаточно сложного фильтра с крутыми переходами между полосами затухания и пропускания следует избегать применения прямой формы.

Целесообразность использования последовательной (рис. П.16,*в*) или параллельной (рис. П.16,*г*) формы трудно строго обосновать, но она зависит некоторым образом от исходной формы непрерывного фильтра и от используемого способа дискретизации. В любом случае знаменатель выражения для $H(s)$ должен быть известен в форме произведения.

Если требуется реализация в параллельной форме, то вначале следует произвести разложение $H(s)$ на элементарные дроби. Это вытекает из непосредственного применения выражений (П.32) или (П.28), если используется билинейное или стандартное z-преобразование соответственно. Для полосовых или режекторных фильтров усиление на средней частоте отдельных параллельных секций может значительно изменяться по величине, создавая тем самым проблему вычитания больших чисел.

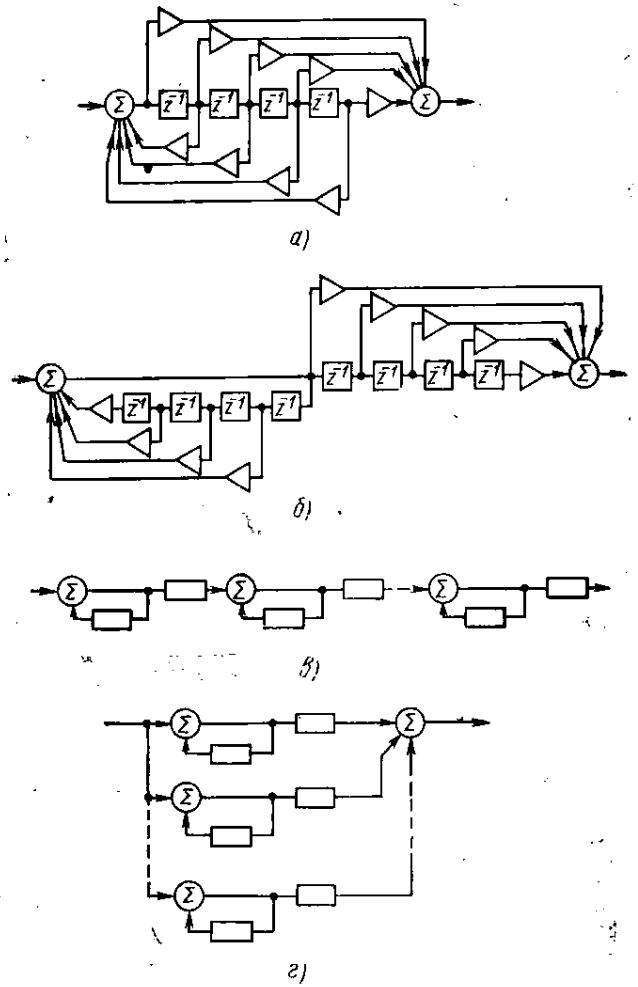


Рис. П.16. Канонические формы цифровых фильтров:
а) и *б)* **прямая форма;** *в)* **последовательная форма;** *г)* **параллельная форма.**

Пожалуй, параллельная форма является самой широко используемой.

При последовательной реализации билинейное z-преобразование требует, чтобы кроме знаменателя был представлен в виде произведения также числитель $H(s)$. Далее разбиение на простые формы, соединенные последовательно, можно производить произвольно, так как билинейный z-оператор имеет следующее свойство:

$$Z(G_1G_2)=Z(G_1)Z(G_2). \qquad (П.65)$$

Если применяется стандартное z-преобразование, то вначале следует произвести разложение на элементарные дроби, затем осуществить почленное z-преобразование. Далее, дроби должны быть приведены к общему знаменателю для того, чтобы получить $N_d(z^{-1})$, которое для реализации последовательной формы должно быть затем представлено в виде произведения. Этот более сложный процесс необходим потому, что стандартное z-преобразование не обладает свойством билинейного преобразования (П.65). Чтобы получить приемлемый результат, это приведение дробей к общему знаменателю с целью получения полинома в знаменателе $N_d(z^{-1})$ и сопутствующее разложение на множители для фильтров высоких порядков должны производиться с большой тщательностью.

До сих пор рассмотрение было сосредоточено на способах получения коэффициентов цифрового фильтра, необходимых для требуемой формы реализации. При применении цифрового фильтра для реальной обработки потоков данных на свойства фильтра влияет также квантование данных и округление результатов при умножении и сложении. Эти факторы кратко рассматриваются в следующем разделе.

П.6.4. Ошибки округления и эффекты квантования в цифровых фильтрах

При реализации цифрового фильтра в аппаратурном исполнении или в виде программы цифровой вычислительной машины появляются ошибки за счет ограничения, наложенного конечной длиной слова. В основном существует три типа ошибок. К первому типу относятся ошибки, вызванные конечной точностью представления коэффициентов фильтра. Этот тип ошибок уже подробно

был рассмотрен в разделе П.6.1. Ко второму типу относятся ошибки, вызванные квантованием входных данных до определенного числа бит. Если квантование достаточно точное и квантуемый сигнал достаточно хорошо согласован с частотой дискретизации, то квантование можно рассматривать как источник дополнительных случайных шумов на входе со средним квадратичным значением $q^2/12$, где q — величина кванта [70, 71, 72]. Результирующий выходной сигнал, вызванный только шумами квантования, может быть вычислен аналитически или определен с помощью фактического моделирования цифрового фильтра с применением генератора случайных шумов.

К третьему типу относятся ошибки, вызванные округлением результатов при операциях умножения и сложения в цифровом фильтре. Хилс [73] кратко рассмотрел эти ошибки для систем первого и второго порядков. Ноулис и Эдвардс довольно подробно рассмотрели общую проблему [74, 75, 76, 77] теоретически и экспериментально с совпадающими результатами. По существу, приведенные ими результаты показывают, что ошибки округления, вызванные конечными арифметическими операциями в рекурсивном фильтре, можно подсчитать статистически путем замены реального фильтра бесшумовым фильтром с некоторым числом дополнительных источников белого шума на входе. Их результаты также указывают на то, что последовательная форма реализации дает несколько меньшую ошибку, чем параллельная форма, и что прямая форма определенно хуже последовательной и параллельной форм.

Голд и Рейдер [78] применили подобный метод к оценке влияния ошибок из-за округления. Они детально разработали способ анализа ошибок систем первого и второго порядка и дали подтверждающие экспериментальные результаты.

Уилкинсон [79] рассмотрел влияние ошибок, вызванных квантованием в нерекурсивных фильтрах численными методами.

П.6.5. Методы быстрого преобразования Фурье

Рассмотрим еще один *эффективный* метод реализации сложных цифровых фильтров. Фильтрация сигналов сложными нерекурсивными фильтрами, содержащими

пятьдесят или более членов в описывающих их выражениях, включает в себя большое число повторных вычислений. Если входной сигнал имеет M отсчетов, а нерекурсивный фильтр имеет N ответвлений (где $M>N$), то, чтобы оценить частотную характеристику фильтра, требуется NM умножений. Используя в качестве отправного метод Кули и Таки [80], Стокхем [81] предложил метод уменьшения числа умножений, требуемых при оценке частотной характеристики фильтра. Он показал, что если N является составным числом (например, в форме 2^n), то при правильно организованных вычислениях требуется примерно $M \log_2 N$ умножений. Хелмс [82] рассмотрел детали вычислений в этом методе и показал меру улучшения эффективности вычислений. Стокхем назвал $N=28$ в качестве приблизительной критической точки. Это значит, что для фильтров, имеющих более 28 ответвлений, начинают сказываться преимущества метода быстрого преобразования Фурье по объему вычислений, которые возрастают с увеличением N примерно как $(\log_2 N)/N$.

П.7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

После краткого вступления о раннем развитии области проектирования и применения цифровых фильтров описывается широкий круг методов проектирования цифровых фильтров рекурсивного и нерекурсивного типов. Приводятся примеры проектирования, показывающие возможность применения ряда наиболее важных методов. Подробно рассматриваются некоторые вычислительные проблемы, связанные с физической реализацией цифровых фильтров, а также целесообразность расчета точности.

Ввиду многочисленности применений методов цифровой фильтрации смогли быть приведены только избранные из наиболее важных работ. Многие из описанных здесь методов, несомненно, были открыты совместно представителями различных отраслей науки, так как в области цифровых фильтров можно встретить специалистов по теории цепей и по передаче дискретных данных, инженеров, занимающихся управлением, математиков, специализирующихся в численном анализе, аппроксимации, статистике и т. д. Все они трудятся, чтобы получить новые и более полезные методы цифровой фильтрации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Jordan C., «Calculus of Finite Differences», Chelsea, 1960.
2. Джеймс Х., Никольс Н., Филлипс Р., «Теория следящих механизмов». Изд-во иностранной литературы, 1953.
3. Ragazzini J. R., Franklin G. F., «Sampled-Data Control Systems», McGraw-Hill, 1958.
4. Jury E. I., «Sampled-Data Control Systems», John Wiley and Sons, Inc., 1958.

5. Tou J. T., «Digital and Sampled-Data Control Systems», McGraw-Hill, 1959.
6. Wilts C. H., «Principles of Feedback Control», Addison-Weslev. Reading, Massachusetts, 1960, pp. 195—220.
7. Мишкин Э., Браун Л., мл., «Приспосабливающиеся автоматические системы». Изд-во иностр. лит-ры, 1963.
8. Jury E. I., «Theory and Application of the z-Transform Method». John Wiley, New York, 1964.
9. Freeman H., «Discrete-Time Systems», John Wiley, 1965.
10. DeRusso P. M., Roy R. J., Close C. M., «State Variables for Engineers», John Wiley, 1965, pp. 158—186.
11. Blackman R. B., «Linear Data-Smoothing and Prediction in Theory and Practice», Addison-Wesley, Reading Massachusetts, 1965.
12. Ланцош К., «Практические методы прикладного анализа», пер. с англ. Кайтнера М. З., под ред. Лопшица А. Физматгиз, 1961.
13. Blackman R. B., Tukey Y. W., «The Measurement of Power Spectra from the Point of View of Communication Engineering», Dover, 1959.
14. Martin M. A. «Frequency domain applications to data processing», IRE Transactions on Space Electronics and Telemetry, 1959, v. SET-5, № 1, pp. 31—41.
15. Ormsby J. F. A., «Design of numerical filters with applications to missle data processing», Jour. ACM, 1961, v. 8, № 3, pp. 440—466.
16. Monroe A. J., «Digital Processes for Sampled Data Systems», John Wiley and Sons. Inc., New York, 1962.
17. Golden R. M., «Digital computer simulation of a sampled-data voice-excited vocoder», Jour. Acous. Soc. Amer., 1963, v. 35, pp. 1358—1366.
18. Golden R. M., «Digital computer simulation of communication systems using the block diagram compiler: BLODIB, Third Annual Allerton Conference on Circuit and System Theory, Monticello, Illinois, October, 1965, pp. 690—707.
19. Tustin A., «A Method of analysing the behavior of linear systems in terms of time series», Jour. IEE, 1947, v. 94, Part IIA, pp. 130—142.
20. Salzer J. M., «Frequency analysis of digital computers operating in real time», Proc. IRE, 1954, v. 42, pp. 457—466.
21. Boxer R., Thaler S., «A simplified method of solving linear and nonlinear systems», Proc. IRE, 1956, v. 44, pp. 89—101.
22. Boxer R., «A note on numerical transform calculus», Proc. IRE, 1957, v. 45, № 10, pp. 1401—1406.
23. Baxter D. C., «The Digital Simulation of Transfer Functions», National Research Laboratories, Ottawa, Canada, DME Report № MK-13, April 1964.
24. Baxter D. C., «Digital Simulation Using Approximate Methods», National Research Council, Ottawa, Canada, Report MK-15, Division of Mechanical Engineering, July 1965.
25. Gibson J. E., «Nonlinear Automatic Control», McGraw-Hill, New York, 1963, pp. 147—159.
26. Steiglitz K., «The General Theory of Digital Filters with Applications to Spectral Analysis», AFOSR Report № 64-1664, New York University, New York, May 1963.
27. Steiglitz K., «The Equivalence of Digital and Analog Signal Processing», Information and Control, October 1965, v. 8, № 5, pp. 455—467.

28. Kaiser J. F., «Design methods for sampled-data filters», Proceedings First Allerton Conference on Circuit and System Theory, November 1963, pp. 221—236.
29. Kaiser J. F., «Some practical considerations in the realization of *linear digital filters*», *Proceeding Third Allerton Conference on Circuit and System Theory*, Monticello, Illinois, October 1965, pp. 621—633.
30. Jenkins G. M., «A survey of spectral analysis», Applied Statistics, 1965, v. XIV, № 1, pp. 2—32.
31. Robertson H. H., «Approximate design of digital filters» Technometrics, August 1965, v. 7, № 3, pp. 387—403.
32. Linvill W. K., «Sampled-data control systems studied through comparison of sampling with amplitude modulation», Trans. AIEE, 1951, Part II, v. 70, pp. 1779—1788.
33. Susskind A., «Notes on Analog — Digital Conversion Techniques», John Wiley, New York, 1957, особенно Chapter II, «Sampling and Quantization» by D. Ross.
34. Ross D. T., «Improved Computational Techniques for Fourier Transformation», Servomechanisms Laboratory Report, № 7138-R-5, Massachusetts Institute of Technology, Gambridge, Massachusetts, June 25, 1954.
35. Heyliger G. E., «The Scanning Function Approach to the Design of Numerical Filters», Report R-63-2, Martin Co., Denver, Colorado, April 1963.
36. Graham R. J., «Determination and Analysis of Numerical Smoothing Weights», NASA Technical Report № TR-R-179, December, 1963.
37. Anders E. B. et al., «Digital Filters», NASA Contractor Report CR-136, December 1964.
38. Watts D. G., «Optimal Windows for Power Spectra Estimation», Mathematics Research Center, University of Wisconsin, MRC-TSR-506, September 1964.
39. Parzen E., «Notes on Fourier Analysis and Spectral Windows», Applied Mathematics and Statistical Laboratories, Technical Report № 48, 1963, 15 May, Stanford University, California.
40. Campbell G. A., Foster R. M., «Fourier Integrals for Practical Applications», D. Van Nostrand, 1948, p. 113.
41. *Kaiser J. F., «A family of window functions having nearly ideal* properties», November 1964, неопубликованная работа.
42. Slepian D., Pollak H. O., «Prolate spheroidal wave functions, Fourier analysis and uncertainty—I and II», B. S. T. J., 1961, v. 40, № 1, pp. 43—84.
43. Fleischer P. E., «Digital realization of complex transfer functions», Simulation, 1966, March, v. 6, № 3, pp. 171—180.
44. Martin M. A., «Digital Filters for Data Processing», General Electric Co., Missile and Space Division, Tech. Info. Series Report № 62-SD484, 1962.
45. Schelkunoff S. A., «A mathematical theory of linear arrays», B. S. T. J., Januar 1943, v. 22, pp. 80—107.
46. Mark Tsu-Han Ma, «A New Mathematical Approach for Linear Array Analysis and Synthesis», диссертация, Syracuse University, 1961, University Microfilms, № 62-3050.
47. Drane C. J., «Directivity and Beamwidth Approximations for Large Scanning Dolph — Chebyshev Arrays», AFCRL Physical Science Research Papers № 117, AFCRL-65-472, June 1965.

48. Garabedian H. L. (ed.), «Approximation of Functions», Elsevier Publishing Co., 1965, особенно Walsh pp. 1—16 and Cheney pp. 101—110.
49. Cheney E. W., Loeb H. L., «Generalized rational approximation», J. SIAM, Numerical Analysis, B, v. 1, 1964, pp. 11—25.
50. Stoer, Josef, «A direct method for Chebyshev approximation by rational functions», JACM, January 1964, v. 11, № 1, pp. 59—69.
51. Golden R. M., Kaiser J. F., «Design of wideband sampled-data filters», BSTJ, v. 43, Part 2, July 1964, pp. 1533—1546.
52. Golden R. M., Kaiser J. F., «A Computer program for the design of continuous and sampled-data filters», to be published.
53. Rader C. M., Gold B., «Digital Filter Design Techniques», Lincoln Laboratory Report, M. I. T., Preprint JA2612, September 1962.
54. Holtz H., Leondes C. T., «The Synthesis of recursive filters», Jour. ACM, 1966, v. 13, № 2, pp. 262—280.
55. Weinberg L., «Network Analysis and Synthesis», McGraw-Hill, 1962.
56. Calahan D. A., «Modern Network Synthesis», Hayden, New York, 1964.
57. Storer J. E., «Passive Network Synthesis», McGraw-Hill, New York, 1957, pp. 287—302.
58. Broome P., «A frequency transformation for numerical filters», Proc. IEEE, 1966, v. 52, № 2, February 1966, p. 326—327.
59. Mantey P. E., «Convergent Automatic-Synthesis Procedures for Sampled-Data Networks with Feedback», Stanford Electronics Laboratories, Technical Report № 6773-1, SU-SEL-64-142, Stanford University, October 1964.
60. Whittlesey J. R. B., «A rapid method for digital filtering», Comm. ACM, September, 1964, v. 7, № 9, pp. 552—556.
61. Young T. Y., «Representation and Analysis of Signals», Part X. Signal Theory and Electrocardiography. Department of Electrical Engineering, John Hopkins University, May 1962.
62. Broome P. W. «Discrete orthonormal sequences», Jour. ACM, April 1965, v. 12, № 2, pp. 151—168.
63. Аршамбо, Брэдфорд, Брум и др., «Методика обработки данных с целью обнаружения и интерпретации телесейсмических сигналов», *ТИИЭР, 1965, т. 53, № 12, стр. 2071—2095.*
64. Боде Г., «Теория цепей и проектирование усилителей с обратной связью». Пер. с англ. и ред. А. А. Колосова и Л. А. Мееровича. Изд-во иностр. лит-ры, 1948.
65. Mansour M., «Instability criteria of linear discrete systems», Automatica, January 1965, v. 2, № 3, pp. 167—178.
66. Maley C. E., «The effect of parameters on the roots of an equation system», Computer Journal, 1961—2, v. 4, pp. 62—63.
67. Truxal J. G., «Automatic Feedback Control System Synthesis», McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, 1955, pp. 223—250.
68. Kuo F. F., «Network Analysis and Synthesis», John Wiley, New York, First Edition, 1962, pp. 136—137 (Second Edition, pp. 148—155).
69. Pottle C., «On the partial-fraction expansion of a rational function with multiple poles by digital computer», IEEE Trans. Circuit Theory, March 1964, v. CT-11, pp. 161—162.
70. Bennett W. R., «Spectra of quantized signals», BSTJ, July 1948, v. 27, pp. 446—472.

71. Widrow B., «A study of rough amplitude quantization by means of Nyquist sampling theory», Trans. IRE on Circuit Theory, December 1956, v. CT-3, № 4, pp. 266—276.
72. Widrow B., «Statistical analysis of amplitude quantized sampled-data systems», Trans. AIEE Applications and Industry», January, 1961, № 52, p. 555—568.
73. Hills F. B., «A Study of Incremental Computation by Difference Equations», Servomechanisms Laboratory Report № 7849-R-1, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, May 1958.
74. Knowles J. B., Edwards R., «Effect of finite-wordlength computer in a sampled-data feedback system», Proc. IEE, June 1965, v. 112, № 6, pp. 1197—1207.
75. Knowles J. B., Edwards R., «Simplified analysis of computational errors in a feedback system incorporating a digital computer», S. I. T. Symposium on Direct Digital Control, April 1965, London.
76. Knowles J. B., Edwards R., «Complex cascade programming and associated computational errors», Electronics Letters, August 1965, v. 1, № 6, pp. 160—161.
77. Knowles J. B., Edwards R., «Finite word-lenght effects in multirate direct digital control systems», Proc. IEE, December 1965, v. 112, № 12, pp. 2376—2384.
78. Gold B., Rader C., «Effects of quantization noise in digital filters», Proceedings Spring Joint Computer Conference, 1966, v. 28, pp. 213—219.
79. Wilkinson J. H., «Rounding Errors in Algebraic Processes», Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1963.
80. Cooley J. W., Tukey J. W., «An algorithm for the machine calculation of complex Fourier series», Mathematics of Computation, April 1965, v. 19, № 90, pp. 297—301.
81. Stockham T. G., мл., «High speed convolution and correlation», Proceedings Spring Joint Computer Conference, 1966, v. 28, pp. 229—233.
82. Helms H. D., «Fast Fourier transform method for computing difference equations and simulating filters», IEEE Transactions on Audio and Electroacoustics, 1967, VI, v. AU-15.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Автоковариация 143
Анализ спектральный 18—21
Выборка частотная 66, 96, 99, 102
Вычисление с замещением 209—210, 219—220
Генератор цифровой 169—176
— — гласных звуков 150
— — линейно нарастающего колебания 169—170
— — пилообразного колебания 170—171
— — прямоугольных колебаний 171
— — случайных чисел 171—172
— — синусно-косинусный 172.
Герцеля алгоритм 201—203
Гиббса явление 255, 314, 321, 323
Гильберта преобразование 287—290
Гипотеза эргодическая 149
Годограф корневой 348
Граф направленный сигнальный 207
Дискретизация 32, 39, 162, 311
—, интервал 32, 311
Дисперсия спектральных измерений 146—147

Задержка, влияние на кепстр 292
— при неправильном выполнении программы 176—180
Измерение спектра 146—150
— шума 141—144
Инверсия двоичная 212, 219, 229
Искажение частной шкалы 89
Интерполяция с помощью БПФ 231—232
Квантование в генераторах 173—176
— в резонаторах 126—127
— в фильтрах с частотной выборкой 102—103
—, влияние 134—136, 354
— за счет округления 117—119, 354
— за счет усечения 117
—, ошибка 118, 354
— параметров 117—120
—, плотность вероятности 118—119
— при моделировании систем 121
— при перемножении 128—136
— сигнала 116—119
Кепстр 285, 300
—, вычисление 293
— импульсной характеристики голосового тракта 300
— комплексный 285—287
— рациональных z-преобразований 292—293
—, рекурсивное вычисление 288
Корреляция высокоскоростная 234—269
Коши теорема 40
Логарифм комплексной функции 279—280
Мертвой зоны эффект 167—176
Множители поворачивающие 225—226
Моделирование генераторов 169—176
— задержки 176—180
— нелинейных элементов 164
— последующего состояния 154—186
— систем обработки сигнала 154—185
— элементов 167
Набор фильтров 70, 105
Наложение спектров 32, 69, 294, 311, 329
Найквиста частота 162—167
Обработка изображения 296—299
Ограничитель полосовой 162—165
Окно (см. функция весовая) 262—264, 317—321
— Блекмана 264, 268, 320
— для спектральных измерений 148—149
— Кайзера 264, 318
— прямоугольное 262
— треугольное 262
— Хемминга 264, 318
— Хеннинга 264
Отображение конформное 66, 82
Периодограмма 146
Полином зеркально-симметричный 112—115
Преобразование линейное 272—273
— полосы 94—96
Программа исходная 157, 180—185
— конечная 157
— —, элементы 167—176
— компилирующая 180—185
Развертка сигналов 271, 282—285
Расчет цифровых фильтров 13—18
— — —, метод Боксера и Талера 337
— — —, — билинейного преобразования 66, 89, 105, 330
— — —, — наименьших квадратов 323
— — —, — инвариантной импульсной характеристики 66
— — —, — квадрата модуля передаточной функции 83
— — —, — Фурье 315
— — —, — частотной выборки 66, 96
— — —, — Чебышева 323
— — —, — численного анализа 314
— — —, — z-преобразования 328

Расщепитель фазы эллиптический 108—110
Резонатор цифровой 71—72
— —, анализ шумов 126—127
— — без потерь 99
— —, время вычисления алгоритма 19—21
— —, коэффициент передачи 71
— —, нули 72
— —, усиление 72
Рекурсия как алгоритм фильтрации 14

Свертка апериодическая 237—239
— высокоскоростная 234—269
— как алгоритм фильтрации 16
— как гомоморфная система 274
— комплексная 43
— круговая (периодическая) 16, 195—197, 236
— линейная 16
— при оценке шумов 123
Сжатие динамического диапазона звука 295
— — — изображения 296
Система без памяти 275
— гомоморфная 273—274
— исходная 157, 161—167
— конечная 157—167
— линейная 31, 272
— нелинейная 270—271
— с конечной памятью 313
— с бесконечной памятью 313
Спектр гласных звуков 300
Стабильность 15, 341
— системы второго порядка 47
— системы первого порядка 41
Суперпозиция 14, 272
— обобщенная 272—274

Теорема кругового смещения 197
— о комплексной свертке 43—45

Уравнения разностные 15, 33
— —, время для решения 19—21
— — второго порядка 33—36
— — m-го порядка 45—48
— — первого порядка 53—57
Фаза, вычисление 294
— линейная 69, 101
— минимальная 287—290
— максимальная 290—292
Фильтр Баттерворта 73, 75, 82, 89, 90, 96, 332
— Бесселя 73, 75
— гребенчатый 98—103, 340
— для измерения шума 143—144
— Лернера 68
— на основе равномерного приближения 76—83
— непрерывный 63
— нерекурсивный 313
— полосовой 93—94, 103—105
—, реализуемость 65
— рекурсивный 31, 63, 313
— с переменными коэффициентами 65
—, структура 16—17, 59—61
— Файера 260
— цифровой 63, 306
— —, синтез 65
— Чебышева 73, 75, 82, 89, 91
— Чезаро 260
— четвертого порядка 132
— элементарный 97, 102
— эллиптический 75, 82, 93, 105—110

Форма линейной цепи каноническая 51, 121
— — — каскадная 53
— — — параллельная 52, 352
— — — последовательная 52, 352
— — — прямая 50, 121, 352
— — — связанная 51, 121
Фильтрация двумерная 14
— инверсная 282
— линейная 273
— — обобщенная 272—279
— оптимальная 279
— перемноженных сигналов 279—281
— свернутых сигналов 282—285
— цифровая 6, 14, 306
— — методом быстрой свертки 252—268
— — полосовая 95—96
— —, преимущества 63—64
— — при моделировании 154—157, 167—169
— —, проблема синтеза 65
— —, реализуемость 87, 112—115
— —, точность реализации 116—124, 341

Функция весовая 49, 317
— интерполирующая 99
— ковариационная 144—147
— корреляционная 142
— передаточная 37, 46, 71, 312
— —, квадрат модуля 83—88
— —, нули 50, 58, 286
— —, — в фильтрах с частотной выборкой 99—100
— —, — на бесконечности 73—75
— —, полюсы 56—81, 286
— системная 46, 55, 57
Фурье преобразование 14
— — быстрое 17, 203—204, 355
— — —, смешанная система счисления 214—215, 220—222
— — —, прореживание по времени 204—215
— — —, прореживание по частоте 216—222
— — дискретное 16
— — — двух действительных последовательностей 231
— — — действительных или мнимых последовательностей 197—198
— — — искусственно удлиненных последовательностей 198
— — — как произведение сдвинутых последовательностей 246—252
— — — комплексной синусоидальной последовательности 192—193
— — — нечетных или четных последовательностей 197—198
— — —, обратное преобразование 194, 227
— — —, определение 190—191
— — — последовательностей с переставленными отсчетами 199—201
— — —, связь с круговой сверткой 194—195
— — —, связь с z-преобразованием 191—192
— — как метод фильтрации 14, 238—239
— — последовательности 189—190
— —, свойства 187—190
— ряд 314
Характеристика импульсная 55, 63, 67, 101
— — глотки 299
— — голосового тракта 282, 299
— — низкочастотного фильтра 49—50
— переходная системы 34—35
— частотная 36, 71
— —, геометрическая интерпретация 38
Цепь фазорасщепляющая 108—110
— цифровая 2-го порядка 50—53
— — m-го порядка 56, 59—61
— — первого порядка 35
Шум преобразователя аналог-цифра 122—127
—, дисперсия 122—123
— цифровых фильтров 7, 122—123
— цифровой обработки 142—143
z-преобразование 39, 328
— билинейное 66, 89, 330, 354
— двухстороннее 48
— обратное 40
— произведения 43
—, решение разностных уравнений 44, 45, 53
— свертки 41
—, сходимость 39

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редактора перевода 5
Предисловие 10

ГЛАВА ПЕРВАЯ

О проблеме обработки сигналов

1.1. Введение 12
1.2. Литература по цифровой обработке сигналов . . . 12
1.3. Основные расчетные алгоритмы для цифровых фильтров 13
1.4. Спектральный анализ 18
1.5. Реализация алгоритмов цифровой обработки сигналов 19
1.6. Дополнительные замечания о вычислительных устройствах 21
1.7. Роль индикаторных устройств вычислительной машины при цифровой обработке сигналов 23
1.8. Заключение 28
Список литературы 30

ГЛАВА ВТОРАЯ

Дискретные линейные системы

2.1. Модель дискретной линейной системы 31
2.2. Линейное разностное уравнение первого порядка . . 33
2.3. Частотная характеристика цепи первого порядка . . 36
2.4. Геометрическая интерпретация частотной характеристики 38
2.5. z-преобразование 38
2.6. Обратное z-преобразование 40
2.7. Теорема о свертке 41
2.8. Теорема о комплексной свертке 43
2.9. Решение разностных уравнений первого порядка с помощью z-преобразования 44
2.10. Решение разностного уравнения второго порядка с помощью z-преобразования 45
2.11. Двустороннее z-преобразование 48
2.12. Цепи для разностного уравнения второго порядка . 50
2.13. Решение разностного уравнения m-го порядка с помощью z-преобразования 53
2.14. Представление и геометрическая интерпретация системной функции 57
2.15. Дискретные цепи с ненулевыми начальными условиями 58
2.16. Другая реализация систем m-го порядка 59
2.17. Заключение 61
Задачи 61
Список литературы 62

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

Расчет цифровых фильтров в частотной области

3.1. Введение 63
3.2. Синтез цифровых фильтров 65
3.3. О различных методах расчета цифровых фильтров . 66
3.4. Метод 1. Применение принципа инвариантности импульсной характеристики 67
3.5. Расчет цифрового фильтра Лернера с инвариантной импульсной характеристикой 68
3.6. Коэффициент передачи цифровых резонаторов . . 71
3.7. Расчет цифровых фильтров на основе непрерывных фильтров с нулями на бесконечности 73
3.8. Обзор методов расчета фильтров Баттерворта, Чебышева и эллиптических фильтров 75
3.9. Метод 2. Определение цифрового фильтра с помощью квадрата модуля передаточной функции 83
3.10. Метод 3. Расчет цифровых фильтров путем билинейного преобразования функций непрерывного фильтра 89
3.11. Фильтры на основе частотной выборки . . . 96
3.12. Метод 4. Метод частотной выборки 99
3.13. Примеры расчета 105
3.14. Заключение 111
Приложение. Реализуемость цифровых фильтров с квадратом модуля передаточной функции определенного вида 112
Список литературы 115

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

Эффекты квантования в цифровых фильтрах

4.1. Постановка задачи 116
4.2. Ошибки, вызываемые неточными значениями постоянных параметров 120
4.3. Ошибки, вызываемые аналого-цифровым преобразованием 122
4.4. Анализ шумов в фильтре первого порядка, вызванных преобразователем аналог—цифра 124
4.5. Анализ цифрового резонатора с двумя полюсами и без нулей 126
4.6. Анализ цифрового резонатора с двумя полюсами и одним нулем 127
4.7. Ошибки, вызываемые квантованием произведений . 128
4.8. Эффект мертвой зоны 134
4.9. Формулы для шума округления при различных реализациях цифровых цепей 137
4.10. Пример. Различные структуры цепи с двумя полюсами и одним нулем 138
4.11. Измерение шумов 141
4.12. Оценка среднего значения шума 142
4.13. Автоковариация и спектральная плотность . . . 144
4.14. Оценка функции ковариации и спектральной плотности 146
4.15. Пример. Измерение шума при каскадном соединении резонаторов 150

4.16. Заключение 152
Список литературы 153

ГЛАВА ПЯТАЯ

Представление вычислительных программ в виде блок-схемы

5.1. Введение 154
5.2. Конечная система 157
5.3. Сравнение исходной и конечной систем 161
5.4. Элементы конечных систем 167
5.5. Порядок выполнения подпрограмм при моделировании последующего состояния 176
5.6. Компилирующая программа *PATSI* 180
5.7. Заключение 185
Список литературы 186

ГЛАВА ШЕСТАЯ

Дискретные преобразования Фурье

6.1. Теория непрерывного преобразования Фурье . . . 187
6.2. Дискретное преобразование Фурье 190
6.3. Алгоритм Герцеля 201
6.4. Быстрое преобразование Фурье 203
6.5. Соотношение между прореживанием по времени и прореживанием по частоте 222
6.6. Применение алгоритмов быстрого преобразования Фурье 228
6.7. Заключение 232
Список литературы 233

ГЛАВА СЕДЬМАЯ

Высокоскоростная свертка и корреляция с приложениями к цифровой фильтрации

7.1. Введение 234
7.2. Произведение дискретных преобразований Фурье Периодическая свертка 236
7.3. Апериодическая свертка 237
7.4. Определение части апериодической свертки и секционирование 239
7.5. Спаривание в действительной свертке 243
7.6. Выбор длины секции 244
7.7. Влияние большого N 245
7.8. Дискретные преобразования Фурье, выраженные как свертки или корреляции 246
7.9. Расчет высокоскоростного цифрового фильтра . . . 252
7.10. Заключение 268
Список литературы 269

ГЛАВА ВОСЬМАЯ

Обобщенная линейная фильтрация

8.1. Введение 270
8.2. Обобщенная суперпозиция 272
8.3. Обобщенная линейная фильтрация 276
8.4. Гомоморфная фильтрация перемноженных сигналов . 279
8.5. Гомоморфная фильтрация свернутых сигналов . . . 282
8.6. Свойства комплексного кепстра 285
8.7. Минимально-фазовые последовательности и преобразования Гильберта 287
8.8. Последовательности с рациональными z-преобразованиями 292
8.9. Вычисление комплексного кепстра 293
8.10. Применение гомоморфной фильтрации 295
8.11. Гомоморфная обработка изображений 296
8.12. Гомоморфная обработка речи 299
8.13. Заключение 304
Список литературы 304

ПРИЛОЖЕНИЕ

Д. Кайзер

Цифровые фильтры

Введение 306
П.1. Раннее развитие теории цифровой фильтрации . . . 307
П.2. Процесс дискретизации 308
П.3. Классификация цифровых фильтров 312
П.4. Методы проектирования нерекурсивных цифровых фильтров 314
П.4.1. Метод классического численного анализа . . 314
П.4.2. Метод ряда Фурье 315
П.4.3. Модифицированный метод ряда Фурье . . . 316
П.4.4. Методы наименьших квадратов, Чебышева и другие 323
П.4.5. Примеры 324
П.5. Методы проектирования рекурсивных фильтров . . 327
П.5.1. Стандартное z-преобразование 328
П.5.2. Билинейное z-преобразование 330
П.5.3. Два примера рекурсивных фильтров . . . 336
П.5.4. Метод Боксера — Талера 337
П.5.5. Некоторые другие методы проектирования рекурсивных фильтров 338
П.6. Исследование вопросов точности при проектировании цифровых фильтров 341
П.6.1. Проблема стабильности и точности коэффициентов 341
П.6.2. Вычислительные аспекты методов проектирования рекурсивных фильтров 350
П.6.3. Схемы реализации цифрового фильтра . . 352
П.6.4. Ошибки округления и эффекты квантования в цифровых фильтрах 354
П.6.5. Методы быстрого преобразования Фурье . . 355
П.7. Заключение 356
Список литературы 361
Предметный указатель 367