

## Анализ нелинейных волновых процессов при помощи преобразования Вигнера

О. В. Вишневецкий, О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор<sup>1</sup>

*Харьковский национальный университет радиозлектроники,  
пр. Ленина, 14, 61077, г. Харьков, Украина  
E-mail: Oleg-Lazorenko@yandex.ru*

*<sup>1</sup>Харьковский национальный университет имени В. Н. Каразина,  
пл. Свободы, 4, г. Харьков, 61077, Украина  
E-mail: Leonid.F.Chernogor@univer.kharkov.ua*

*Статья поступила в редакцию 11 апреля 2007 г.*

Предложено использовать преобразование Вигнера для анализа нелинейных волновых процессов и сигналов. Аналитическими и численными методами проведен анализ идеальной и реальной ударных волн, кинка и антикинка, ударной волны в диспергирующей среде, классического солитона, солитоноподобного решения модифицированного уравнения Кортевега-де Вриза, солитона огибающей, кноидальной и пилообразной волн. Результаты вигнер-анализа сравнены с результатами фурье-анализа. Рекомендовано совместное применение преобразования Вигнера и спектрограммы Фурье для анализа нелинейных волновых процессов и сигналов. Разработан и рекомендован исследователям специальный формат представления данных.

### Введение

Нелинейные колебания и волны занимают особое место в современной физике и радиофизике [1-7]. Многие физические процессы, сопровождающиеся большим энерговыделением, такие, как, например, землетрясения, извержения вулканов, промышленные взрывы, старты ракет, магнитные бури и т. п., имеют существенно нелинейный характер. Однако нелинейные процессы по сравнению с линейными в целом остаются малоизученными, а потому и недостаточно часто используемыми [8].

Представляется перспективным применение интегральных преобразований для анализа нелинейных волновых процессов. Результаты успешного использования линейных интегральных преобразований, в частности, непрерывного вейвлет-преобра-

зования (НВП) и динамического (оконого) преобразования Фурье (ДПФ) при описании ударных волн и солитонов подробно изложены в работе [9]. Нелинейные интегральные преобразования, в первую очередь, преобразования класса Коэна [10], имеют ряд существенных особенностей по сравнению с линейными преобразованиями. Основными их преимуществами являются хорошее частотно-временное разрешение, инвариантность к сдвигам по времени, частоте и фазе, наличие маргинальных распределений. К тому же такие преобразования, позволяющие осуществлять нелинейную обработку сигнала, эффективны, например, при решении задачи обнаружения сигнала на фоне аддитивной помехи, имеющей негауссов закон распределения [9]. Платой за получаемые преимущества является возникновение интерференционных

членов для многокомпонентных сигналов (см., например, [10, 11]).

Использование преобразования Вигнера как типичного представителя класса Коэна квадратичных время-частотных преобразований [10-15] для анализа нелинейных волновых процессов представляется целесообразным и актуальным.

Цель работы состоит в изучении достоинств и недостатков применения преобразования Вигнера для анализа нелинейных волновых процессов.

### 1. Методы анализа и модели нелинейных волновых процессов

Преобразование Вигнера (ПВ), введенное в 1932 г. Е. Вигнером в задачах квантовой термодинамики [12] и в 1948 г. использованное Дж. Виллем при обработке сигналов [13], имеет вид:

$$P_V[f(t)] \equiv P_V f(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\tau + \frac{t}{2}\right) f^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \exp(-i\omega t) dt. \quad (1)$$

Оно представляет собой преобразование Фурье от произведения  $f(\tau + t/2)f^*(\tau - t/2)$ , где  $f(t)$  – анализируемый сигнал, а символ “\*” обозначает операцию комплексного сопряжения.

Далее будем использовать функцию спектральной плотности (ФСП) ПВ  $P_V f(\omega, \tau)$ , ее хребты (ridges), а также энергограмму ПВ  $E_V f(\omega)$  и среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ  $\sigma_V(\omega)$ , определяемые выражениями:

$$E_V f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_V(\omega, \tau) d\tau,$$

$$\sigma_V(\omega) = \left[ \frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} [P_V(\omega, \tau) - \langle P_V(\omega, \tau) \rangle]^2 d\tau \right]^{1/2},$$

где

$$\langle P_V(\omega, \tau) \rangle = \frac{1}{(\omega_{\max} - \omega_{\min})(\tau_{\max} - \tau_{\min})} \times$$

$$\times \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} P_V(\omega, \tau) d\omega d\tau;$$

$\omega_{\max}$ ,  $\omega_{\min}$ ,  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$  – максимальные и минимальные значения параметров  $\omega$  и  $\tau$ , при использовании которых вычисляется ФСП ПВ  $P_V(\omega, \tau)$ .

Более подробно свойства ПВ описаны, например, в работах [10, 14, 15].

При анализе нелинейных волновых процессов результаты ПВ сравниваются с аналогичными, полученными с помощью спектрограммы Фурье (СФ), которая, как известно, задается следующим выражением (см., например, [10, 11]):

$$P_S f(\tau, \omega) = |Sf(\tau, \omega)|^2 = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) w(t - \tau) \exp(-i\omega t) dt \right|^2,$$

где  $Sf(\tau, \omega)$  – ФСП ДПФ,  $w(t)$  – весовая (оконая) функция.

Далее используем СФ  $P_S f(\omega, \tau)$ , ее хребты (ridges), а также энергограмму СФ  $E_S f(\omega)$  и среднеквадратичное отклонение СФ  $\sigma_S(\omega)$ , задаваемые соотношениями:

$$E_S f(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} P_S(\omega, \tau) d\tau,$$

$$\sigma_S(\omega) = \left[ \frac{1}{\tau_{\max} - \tau_{\min}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} [P_S(\omega, \tau) - \langle P_S(\omega, \tau) \rangle]^2 d\tau \right]^{1/2},$$

где

$$\langle P_S(\omega, \tau) \rangle = \frac{1}{(\omega_{\max} - \omega_{\min})(\tau_{\max} - \tau_{\min})} \times$$

$$\times \int_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \int_{\tau_{\min}}^{\tau_{\max}} P_S(\omega, \tau) d\omega d\tau;$$

$\omega_{\max}$ ,  $\omega_{\min}$ ,  $\tau_{\max}$  и  $\tau_{\min}$  – максимальные и минимальные значения параметров  $\omega$  и  $\tau$ , при использовании которых вычисляется СФ  $P_S(\omega, \tau)$ .

Отметим, что хребты ПВ и СФ в настоящей работе получаются с помощью алгоритма, основанного на соответствующих модифицированных преобразованиях [16].

Результаты анализа представляются в специальном формате, успешно примененном авторами в работе [9].

ПВ позволяет получить информацию о том, в какие моменты времени и на каких частотах сосредоточена энергия, содержащаяся в исследуемом сигнале. При этом ФСП ПВ на частотно-временной плоскости имеет лучшую локализацию, чем ФСП СФ, разрешение которой зависит от выбора параметров оконной функции. Более того, СФ оказывается “дальним родственником” ПВ, поскольку может быть получена из сглаженного псевдопреобразования Вигнера при использовании гауссовых оконных функций (см., например, [16]). Последнее за счет усреднения, разумеется, имеет худшее частотно-временное разрешение, чем обычное ПВ. Сглаженное псевдопреобразование Вигнера задается соотношением (см., например, [16]):

$$P_{SPV} f(\omega, \tau; h, g) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} g(s - \tau) f\left(s + \frac{t}{2}\right) f^*\left(s - \frac{t}{2}\right) ds \exp(-i\omega t) dt,$$

где  $h(t)$  и  $g(t)$  – частотная и временная сглаживающие оконные функции соответственно.

В качестве модельных нелинейных волновых процессов, которые будут анализироваться далее, используем решения хорошо известных (эталонных) нелинейных волновых уравнений [2, 4-6, 8]. Это ударные волны, описываемые уравнением Бюргерса и модифицированным уравнением Бюргерса, пилообразные и кноидаль-

ные волны, солитоны, задаваемые уравнением Кортевега-де Вриза и модифицированным уравнением Кортевега-де Вриза (мКдВ), диссипативный солитон, “решение-кентавр”, порождаемое уравнением Бюргерса-Кортевега-де Вриза, солитон огибающей, полученный из нелинейного уравнения Шредингера, солитоноподобные решения уравнения синус-Гордона, называемые кинком и антикинком. Подробный вейвлет-анализ этих нелинейных волн проведен в [9].

Поскольку точное вычисление интеграла (1) аналитическими методами возможно только в самых простых случаях, большая часть результатов в настоящей работе получена с помощью численных методов. С этой целью авторами использовались пакеты прикладных программ TimeFreq ToolBox 0.1 [16] и WaveLab 8.50 [11], а также оригинальное программное обеспечение, разработанное для системы компьютерной математики MATLAB 7.0 (см., например, [17, 18]).

## 2. Результаты применения ПВ для исследования нелинейных волновых процессов

Аналитические расчеты ФСП ПВ  $P_V f(\tau, \omega)$  удастся провести лишь для некоторых нелинейных волновых процессов.

Рассмотрим подробнее солитон мКдВ. Для солитонного решения уравнения мКдВ [4-6, 8]

$$v(\xi) = \frac{v_m}{\text{ch}(\xi/\xi_0)},$$

где  $v_m$  – амплитуда,  $\xi_0$  – ширина солитона,  $\xi = x \pm ut$ ,  $\xi$  – переменная бегущей волны,  $u$  – фазовая скорость волны,  $x$  – координата,  $t$  – время, ФСП ПВ имеет вид:

$$P_V f(\tau, \omega) = \frac{2v_m^2 \xi_0 \sin(2\omega|\tau|)}{\text{sh}(2|\tau|/\xi_0) \text{sh}(\pi\omega\xi_0)}.$$

Видно, что ФСП ПВ описывает на частотно-временной плоскости хорошо локализованную структуру, главный максимум которой расположен в точке с координатами  $\tau = 0$  и  $\omega = 0$  и составляет  $P_V f(0,0) = 2v_m^2 \xi_0 / \pi$ . По мере увеличения  $\tau$  и  $\omega$  ФСП ПВ убывает соответственно пропорционально  $\exp(-2|\tau|/\xi_0)$  и  $\exp(-\pi\omega\xi_0)$ .

Анализ остальных моделей нелинейных волновых процессов проводился численными методами.

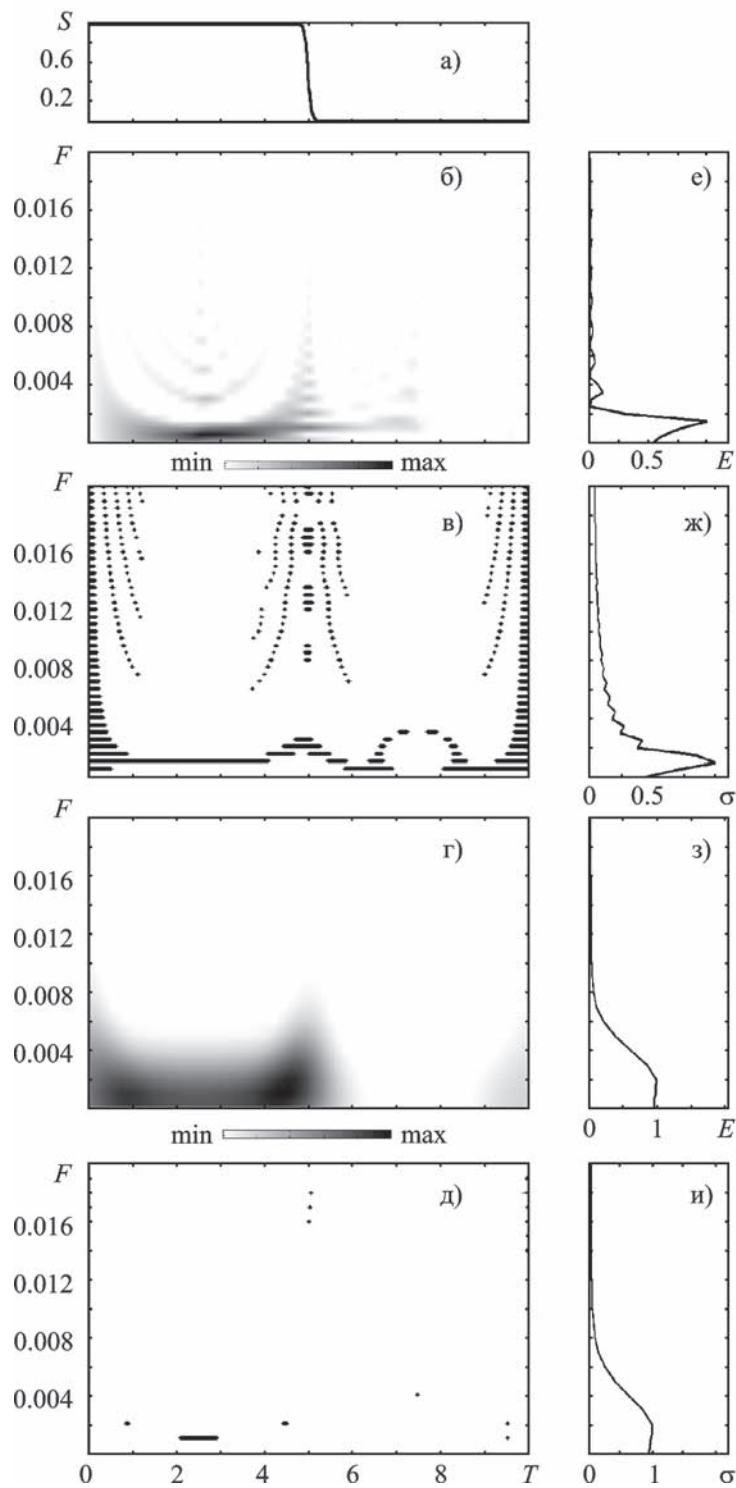
На рис. 1 в специально разработанном авторами формате представлены результаты вигнер-анализа ударной волны (УВ), описываемой уравнением Бюргерса (см., например, [8]). Рассмотрим подробнее особенности этого формата. На рис. 1, а приводится исследуемая функция во временной области. Рис. 1, б и рис. 1, в отражают ФСП ПВ и ее хребты соответственно. Эти же характеристики для СФ показаны на рис. 1, г и рис. 1, д. На рис. 1, е и рис. 1, з представлены энергограммы ПВ и СФ соответственно. Рис. 1, ж и рис. 1, и демонстрируют среднеквадратичные отклонения ФСП ПВ и ФСП СФ. На рис. 1, а-д по горизонтальной оси отложено безразмерное время  $T$ . А на рис. 1, е и рис. 1, з – нормированные на максимум значения энергии  $E$ , на рис. 1, ж и рис. 1, и – нормированные на максимум значения среднеквадратичного отклонения ФСП  $\sigma$ . По вертикальной оси на рис. 1, б-и отсчитывается безразмерная частота  $F$ . Такой же формат используется для представления результатов анализа других моделей нелинейных волновых процессов (рис. 2-9).

Видно, что энергия УВ в основном сосредоточена в области низких частот. При этом на интервале времени, соответствующем ее фронту, ФСП ПВ (рис. 1, б) и ФСП СФ (рис. 1, г) “заходят” в область более высоких частот. ФСП СФ, как и ожидалось, по сравнению с ФСП ПВ оказывается размытой вдоль обеих координат. Наличие осциллирующих частотно-временных структур у ФСП ПВ в моменты времени  $T = 2.5$  и  $T = 7.5$  объясняется интерференцией между структурой, соответствующей фронту УВ, и структурами, порождаемыми

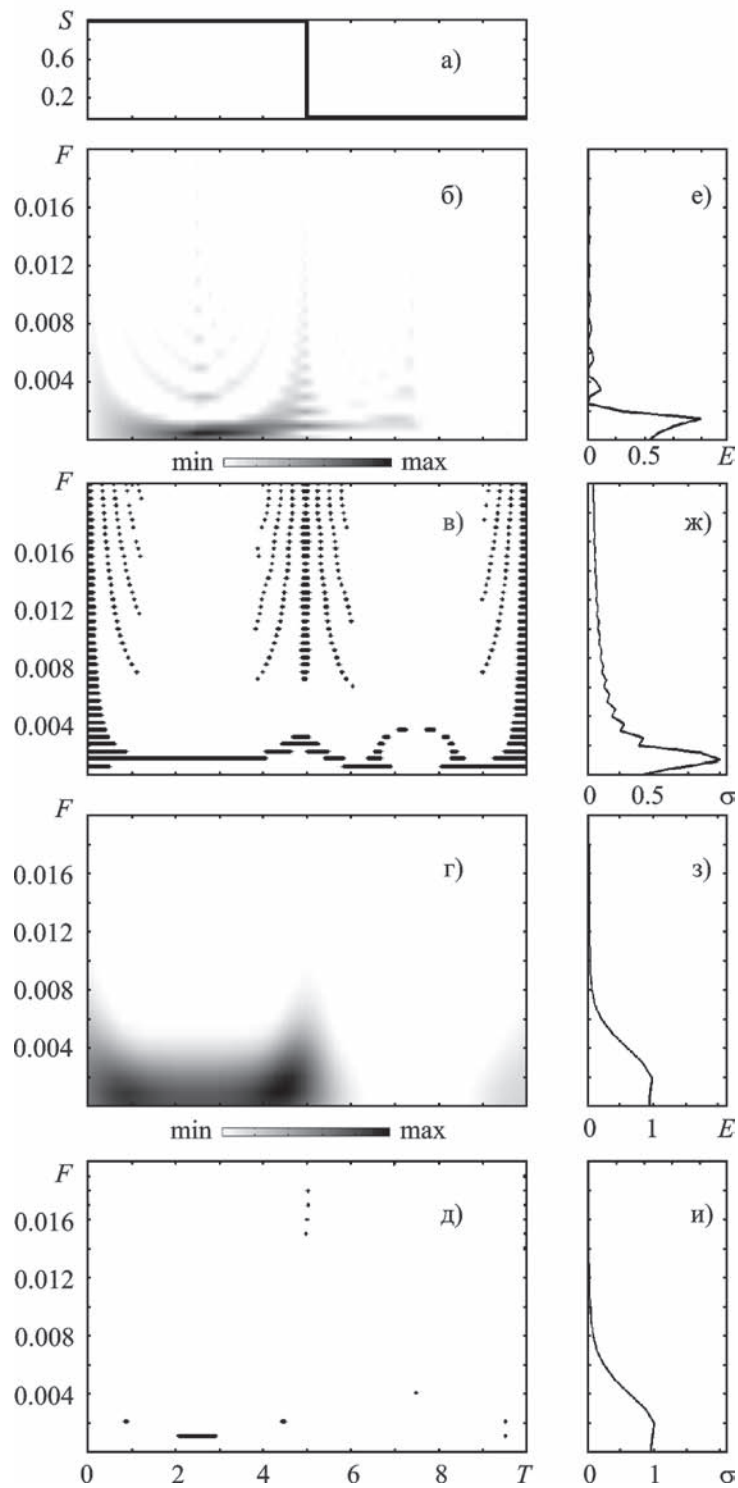
краевыми эффектами, которые хорошо видны на спектрограмме при  $T = 0$  и  $T = 10$ . Осциллирующая форма образования, соответствующего самому фронту УВ, объясняется наложением на него результатов интерференции между теми же частотно-временными структурами, появление которых вызвано краевыми эффектами. На картине хребтов ФСП ПВ (рис. 1, в) фронт УВ сопровождается появлением пучка линий, сходящегося при увеличении  $F$ . По мере увеличения ширины фронта УВ энергия соответствующего частотно-временного образования на ФСП ПВ уменьшается, а линии на картине хребтов исчезают. Предельным случаем идеальной УВ, имеющей нулевую ширину фронта, является функция Хэвисайда, результаты анализа которой приведены на рис. 2. Аналогичная картина получается также для кинка и антикинка, которые показаны на рис. 3, 4.

Во многом похожими на предыдущий случай оказываются и результаты анализа ударной волны (“решение-кентавр”) в диспергирующей среде (рис. 5). Однако следует отметить, что на хребтах ФСП ПВ (рис. 5, в) проявляются и следы затухающих осцилляций, следующих за передним фронтом такой УВ. Это четыре почти вертикальные равноотстоящие линии в диапазоне относительных частот  $F \sim 0.005 \div 0.010$ . Важно, что СФ их наличие выявить не позволяет.

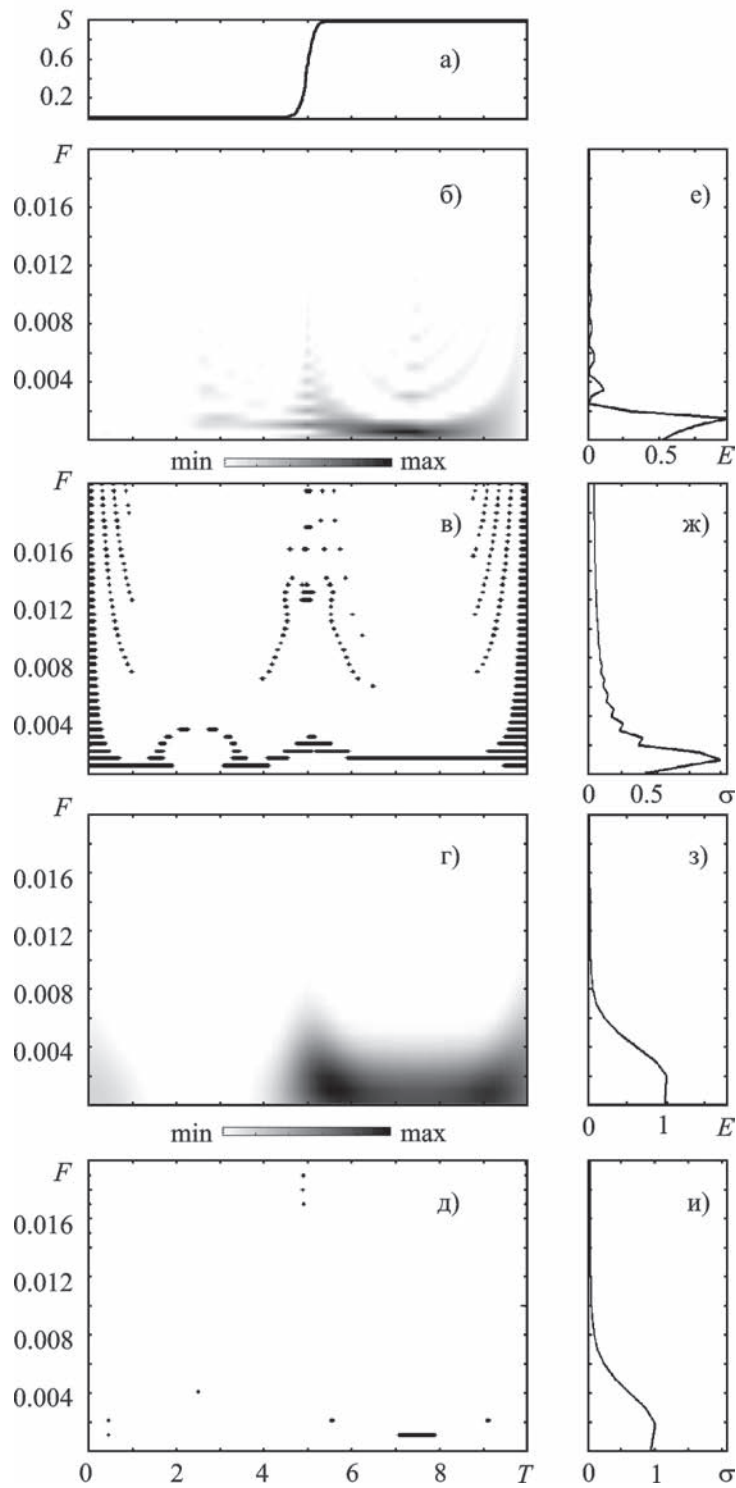
Теперь перейдем к анализу солитонов. В качестве примера рассмотрим солитоноподобное решение уравнения мКДВ (рис. 6, а). Здесь как ФСП ПВ (рис. 6, б), так и ФСП СФ (рис. 6, г) имеют сходную частотно-временную структуру. Отличие состоит в том, что ФСП СФ несколько шире, чем ФСП ПВ, которая не выходит за временные границы анализируемого сигнала. Хребты ФСП ПВ (рис. 6, в) имеют достаточно сложную структуру, которая позволяет судить о локализации солитона во времени. В то же время хребты ФСП СФ (рис. 6, д) состоят всего из двух точек, положение которых примерно соответствует максимуму ФСП СФ.



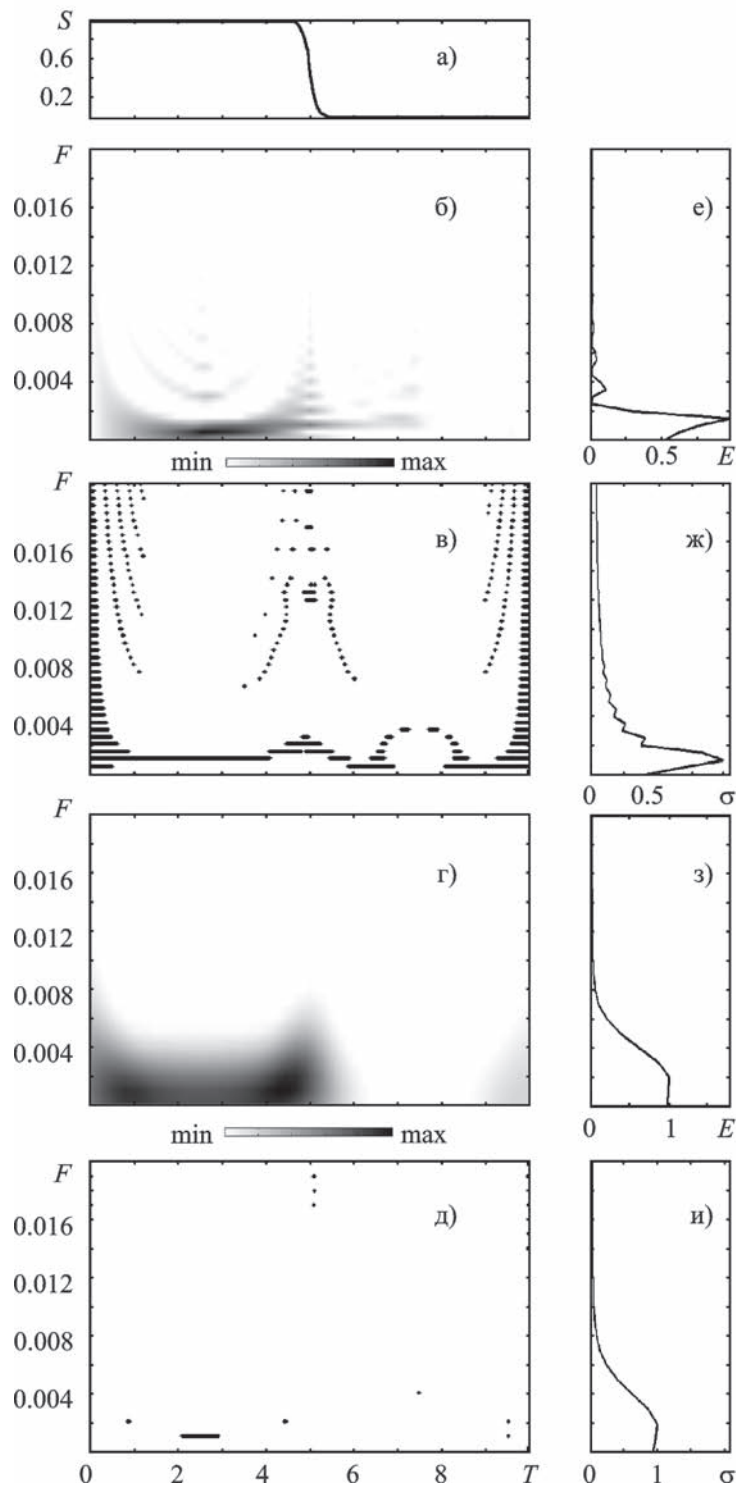
**Рис. 1.** Результаты анализа УВ, описываемой уравнением Бюргера: а) – УВ во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – хребты ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – хребты ФСП СФ, е) – энергограмма ПВ, ж) – среднее квадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма СФ, и) – среднее квадратичное отклонение ФСП СФ



**Рис. 2.** Результаты анализа идеальной УВ: а) – УВ во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – хребты ФСП ПВ, з) – ФСП СФ, д) – хребты ФСП СФ, е) – энергограмма ПВ, ж) – среднев квадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма СФ, и) – среднев квадратичное отклонение ФСП СФ

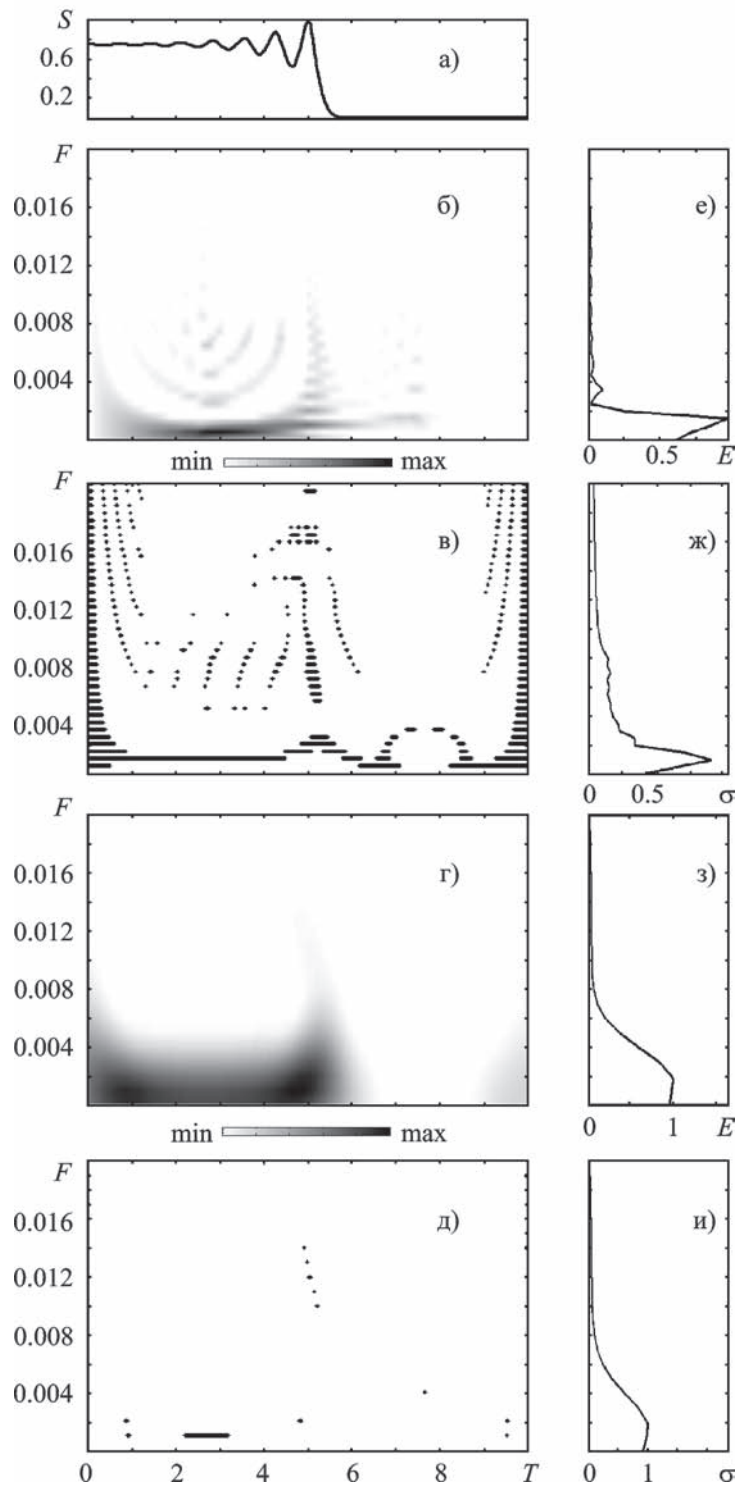


**Рис. 3.** Результаты анализа кинка: а) – кинк во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – хребты ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – хребты ФСП СФ, е) – энергограмма ПВ, ж) – среднее квадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма СФ, и) – среднее квадратичное отклонение ФСП СФ

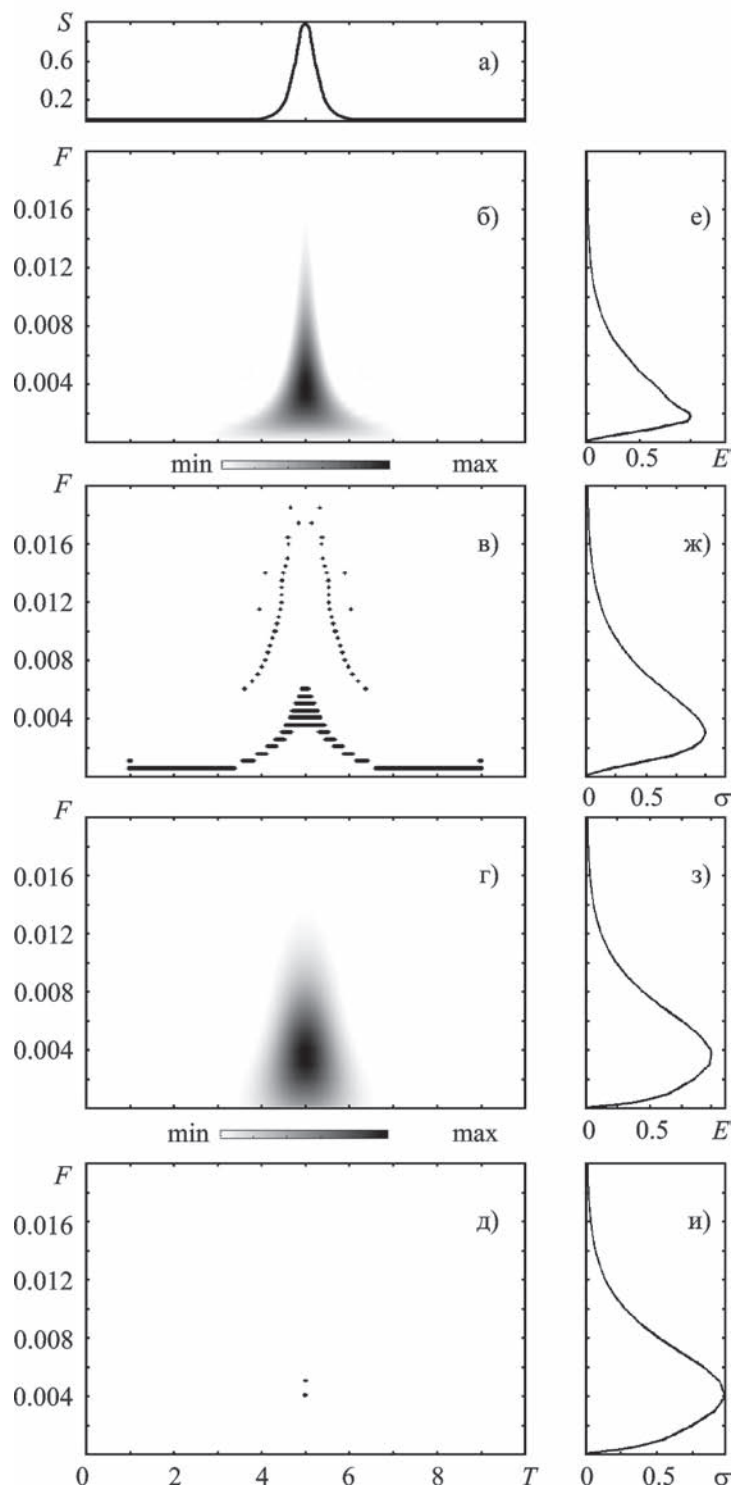


**Рис. 4.** Результаты анализа антикинка: а) – антикинк во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – хребты ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – хребты ФСП СФ, е) – энергограмма ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ

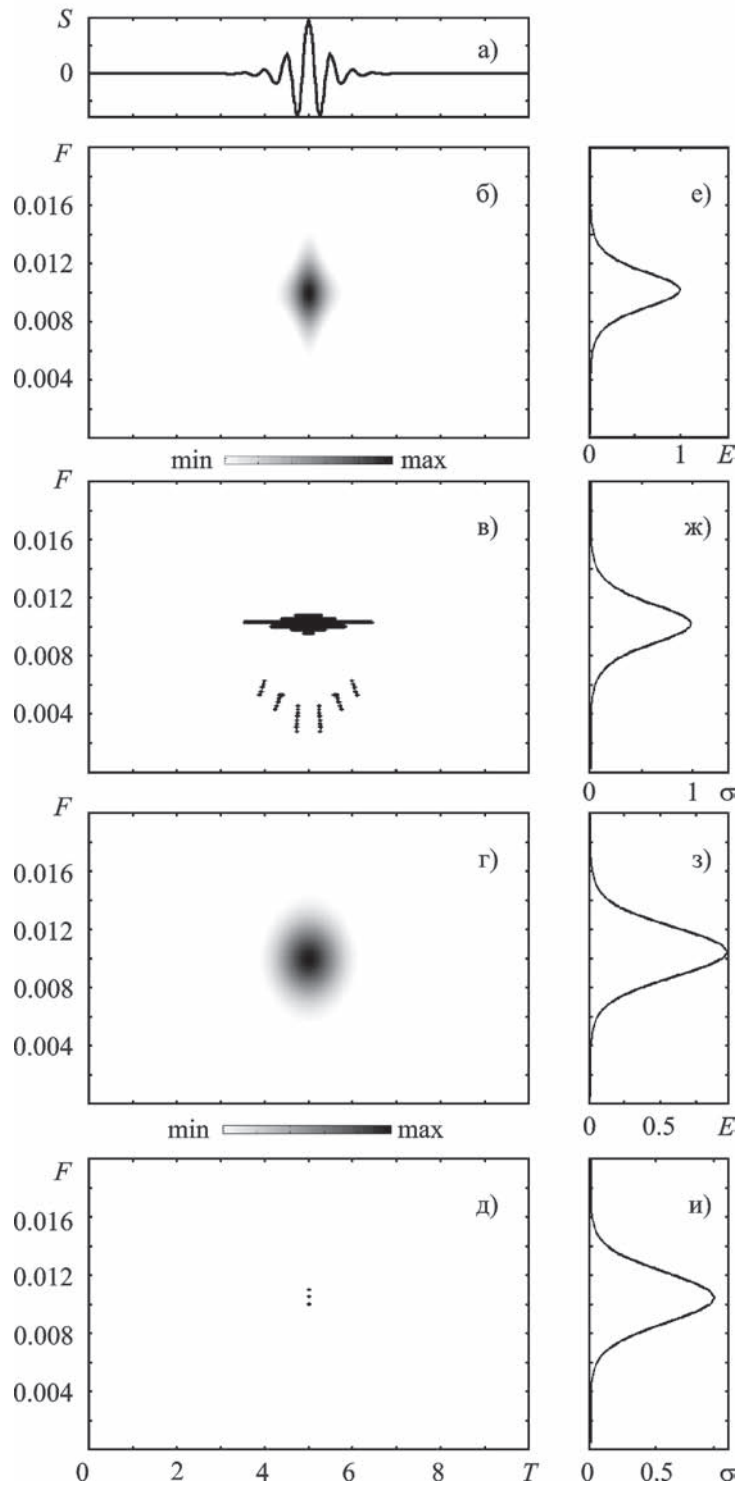




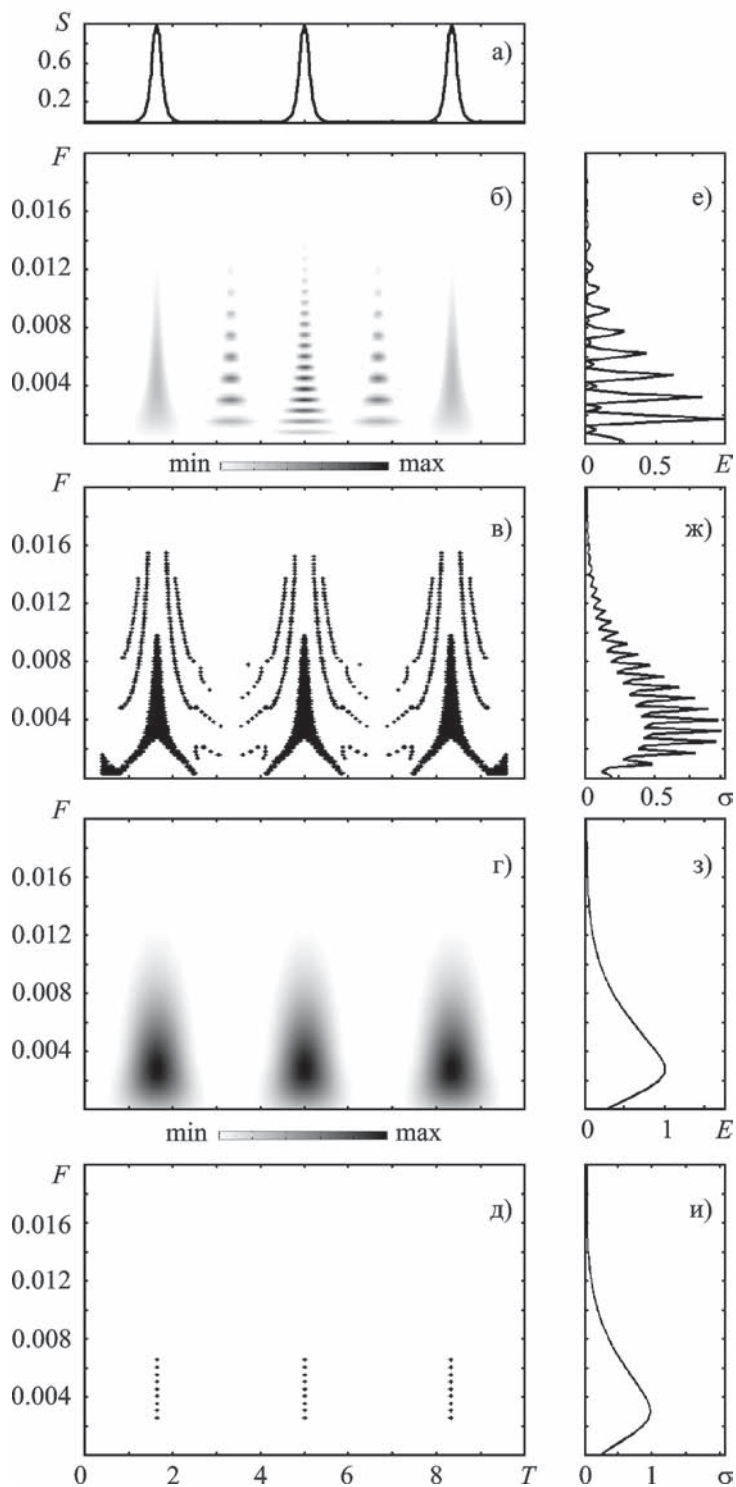
**Рис. 5.** Результаты анализа УВ в диспергирующей среде: а) – УВ во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – хребты ФСП ПВ, з) – ФСП СФ, д) – хребты ФСП СФ, е) – энергограмма ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ



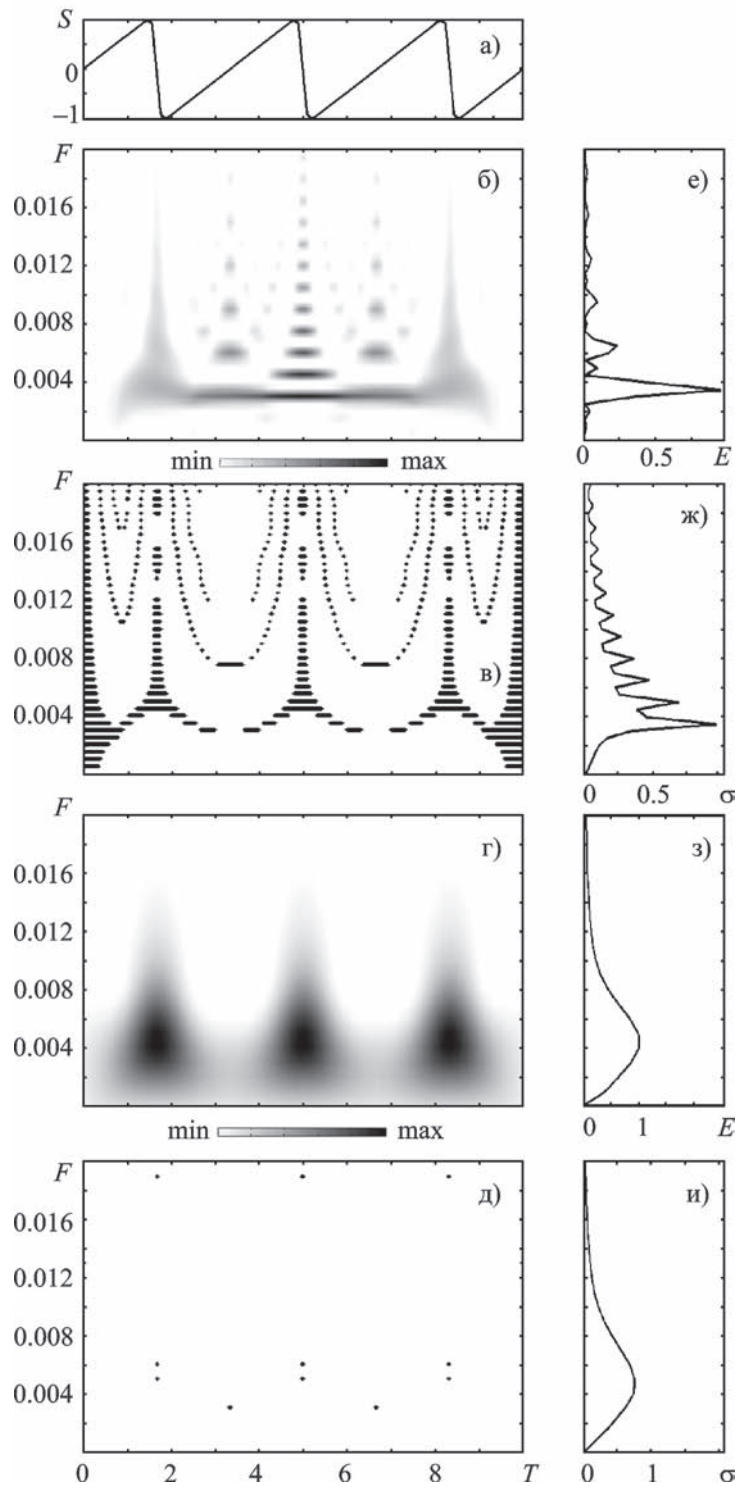
**Рис. 6.** Результаты анализа солитоноподобного решения уравнения мКдВ: а) – солитоноподобное решение во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – хребты ФСП ПВ, з) – ФСП СФ, д) – хребты ФСП СФ, е) – энергограмма ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ



**Рис. 7.** Результаты анализа солитона огибающей: а) – солитон огибающей во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – хребты ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – хребты ФСП СФ, е) – энергограмма ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ



**Рис. 8.** Результаты анализа кноидальной волны: а) – кноидальная волна во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – хребты ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – хребты ФСП СФ, е) – энергограмма ПВ, ж) – среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма СФ, и) – среднеквадратичное отклонение ФСП СФ



**Рис. 9.** Результаты анализа пилообразной волны: а) – пилообразная волна во временной области, б) – ФСП ПВ, в) – хребты ФСП ПВ, г) – ФСП СФ, д) – хребты ФСП СФ, е) – энергограмма ПВ, ж) – среднее квадратичное отклонение ФСП ПВ, з) – энергограмма СФ, и) – среднее квадратичное отклонение ФСП СФ

На рис. 7 представлен результат анализа солитона огибающей. Отметим, что солитон огибающей является хорошей моделью нового класса сверхширокополосных сигналов – нелинейных сверхширокополосных сигналов [19]. Как видно, энергия таких волновых процессов сосредоточена в ограниченном временном интервале и диапазоне частот. Здесь также наблюдается лучшая локализация ФСП ПВ (рис. 7, б) по сравнению с ФСП СФ (рис. 7, г). Хребты ФСП ПВ (рис. 7, в) позволяют одновременно определить частотную и временную протяженность сигнала. С помощью же хребтов ФСП СФ (рис. 7, д) о последней судить невозможно.

На рис. 8 показаны результаты анализа кноидальной волны. На ФСП СФ (рис. 8, г) отчетливо видны три локализованные частотно-временные образования, а на ФСП ПВ (рис. 8, б) наблюдаются пять таких образований. Реально несуществующие второе и четвертое слева (рис. 8, б) образования являются результатами интерференции, возникающей между первым и третьим, а также третьим и пятым образованиями. Отсеять эти ложные образования позволяют как ФСП СФ (рис. 8, г) и ее хребты (рис. 8, д), так и хребты самой ФСП ПВ (рис. 8, в). Осциллирующая структура центрального (третьего) образования является результатом наложения на него интерференции, возникающей между первым и пятым образованиями. “Ежеобразная” структура энергограммы ПВ (рис. 8, е) и среднеквадратичного отклонения ФСП ПВ (рис. 8, ж) объясняется не только наличием интерференции. Следует помнить, что  $P_{\nu}f(\tau, \omega)$  может принимать и отрицательные значения, а следовательно, она не является функцией спектральной плотности в полном смысле этого определения (см., например, [10, 11]).

Во многом похожая картина наблюдается на рис. 9, где приведены результаты анализа пилообразной волны. ФСП СФ этой волны (рис. 9, г) похожа на несколько размытое представление ФСП СФ кноидальной

волны (рис. 8, г), тогда как на ФСП ПВ (рис. 9, б), в отличие от ФСП ПВ кноидальной волны (рис. 8, б), наблюдается сплошная горизонтальная линия, позволяющая определить частоту следования максимумов волны. Это дает возможность сделать вывод о том, что исследуемый сигнал периодический, частоту которого легко определить. Платой за такую возможность является наличие интерференции, которая появляется между каждыми двумя компонентами пилообразной волны. По мере укрупнения фронта пилообразной волны ФСП ПВ и ФСП СФ заходят в область все больших частот.

### 3. Обсуждение результатов

В результате проведенных исследований установлено, что применение ПВ оказывается полезным и перспективным для анализа нелинейных волновых процессов и сигналов. По виду ФСП ПВ удобно судить о частотно-временном составе исследуемого процесса, достаточно точно определять его временную и частотную локализации. Последнее важно, поскольку в большинстве случаев нелинейные волновые процессы являются нестационарными и непериодическими. Полезную информацию удается также получить по виду хребтов ФСП ПВ. Так, при анализе УВ в диспергирующей среде только хребты ФСП ПВ отражают ее тонкую осциллирующую структуру (рис. 5, в). Дополнительную информацию о распределении энергии по разным масштабам дают энергограмма ПВ и среднеквадратичное отклонение ФСП ПВ.

Тем не менее ПВ не следует противопоставлять традиционной СФ. Хотя последняя, с одной стороны, имеет заметно худшее частотно-временное разрешение, с другой стороны, у нее нет интерференционных членов, которые могут привести к обнаружению реально несуществующих сигналов. Поэтому ФСП СФ и построенные на ее основе хребты, энергограмма и среднеквадратичное отклонение оказы-

ваются весьма полезными при отсеивании интерференционных частотно-временных структур, неизбежно возникающих в ФСП ПВ для многокомпонентных сигналов, какими в данном случае являются кноидальная и пилообразная волны. При селектировании интерференционных членов полезными оказываются также хребты ФСП ПВ.

Представляет интерес сравнение полученных результатов с результатами применения НВП и ДПФ для описания этих же модельных нелинейных волновых процессов, изложенными в [9]. Следует отметить, что при описании УВ, кинка и антикинка НВП позволяет достаточно точно оценить ширину фронта волны, а ПВ – его положение на временной оси. Период осцилляций при анализе УВ в диспергирующей среде (“решение-кентавр”) удобно определять, используя НВП и ПВ одновременно.

Во время исследования солитонов и солитоноподобных волн НВП хорошо показывает себя при определении положения максимума, а ПВ – частотно-временной локализации волны, а также кажущейся частоты заполнения, если такая имеется (например, для солитона огибающей).

Аналогичным образом проявляют себя НВП и ПВ при анализе пилообразной и кноидальной волн. К сожалению, здесь достаточно ярко проявляется основной недостаток ПВ – возникновение интерференции, что снижает, в определенной степени, ценность энергограммы ПВ и среднеквадратичного отклонения ФСП ПВ. Интересно также отметить, что НВП позволяет определить направление наклона “зубьев” пилообразной волны.

Таким образом, ПВ целесообразно применять для анализа нелинейных волновых процессов совместно с СФ. Результаты анализа удобно представлять в специальном формате, который рекомендуется исследователям. Представляет также интерес сравнение результатов ПВ, являющегося нелинейным, с аналогичными результатами НВП, представляющего класс

линейных преобразований, что позволяет получить подробную и разнообразную информацию о нелинейных волновых процессах.

## Выводы

1. Показано, что применение ПВ является перспективным для анализа нелинейных волновых процессов.

2. Продемонстрировано, что частотно-временное разрешение ФСП ПВ лучше, чем у ФСП СФ, однако наличие интерференции усложняет интерпретацию полученных результатов.

3. Установлено, что ПВ целесообразно применять для обнаружения сигналов совместно со СФ. Первое преобразование позволяет более точно определять частотно-временное содержание сигналов, а второе – эффективно отсеивать интерференционные члены.

4. Показано, что НВП успешно дополняет и уточняет сведения, полученные с помощью ПВ, наилучшим способом описывая локальные особенности исследуемого процесса.

## Литература

1. Скотт Э. Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. – М.: Сов. радио, 1977. – 368 с.
2. Виноградова М. В., Руденко В. О., Сухорук А. П. Теория волн. – М.: Наука, 1990. – 432 с.
3. Солитоны / Под редакцией Р. Буллефа, Ф. Кодри. – М.: Мир, 1983. – 408 с.
4. Рабинович М. И., Трубецков Д. И. Введение в теорию колебаний и волн. – М.: Наука, Физматлит, 1984. – 432 с.
5. Заславский Г. М., Сагдеев Р. З. Введение в нелинейную физику. – М.: Наука, 1988. – 368 с.
6. Рыскин Н. М., Трубецков Д. И. Нелинейные волны. – М.: Наука, Физматлит, 2000. – 272 с.
7. Кравченко В. Ф., Лазоренко О. В., Пустойт В. И., Черногор Л. Ф. Вейвлет-анализ нелинейных волновых процессов // ДАН РАН. – 2006. – Т. 410, №6. – С. 744-748.

- English Version: Kravchenko V. F., Lazorenko O. V., Pustovoyt V. I., and Chernogor L. F. Study of the Structure of Solutions to Nonlinear Wave Equations Based on Continuous Wavelet Analysis // *Doklady Mathematics*. – 2006. – Vol. 74, No. 2. – P. 767-770.
8. Черногор Л. Ф. Нелинейная радиофизика. – Харьков: ХНУ имени В. Н. Каразина, 2004. – 200 с.
  9. Лазоренко О. В., Лазоренко С. В., Черногор Л. Ф. Вейвлет-анализ нелинейных волновых процессов // *Успехи современной радиоэлектроники*. – 2005. – № 10. – С. 3-21.
  10. Коэн Л. Время-частотные распределения: Обзор // *ТИИЭР*. – 1989. – Т. 77, №16. – С. 72-120.
  11. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов / Пер. с англ. – М.: Мир, 2005. – 671 с.
  12. Wigner E. P. On the quantum correction for thermodynamic equilibrium // *Phys. Rev.* – 1932. – Vol. 40. – P. 749-759.
  13. Ville J. Theorie et applications de la notion de signal analytique // *Cebles. et Transm.* – 1948. – Vol 2A. – P. 61-74.
  14. Вишневецкий О. В., Кравченко В. Ф., Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Преобразование Вигнера и атомарные функции в цифровой обработке сигналов // *Электромагнитные волны и электронные системы*. – 2006. – Т. 11, №6. – С. 26-38.
  15. Кравченко В. Ф., Лазоренко О. В., Пустовойт В. И., Черногор Л. Ф. Преобразование Вигнера в обработке сигналов // *ДАН РАН*. – 2006. – Т. 410. – С. 38-41.  
English Version: Kravchenko V. F., Lazorenko O. V., Pustovoyt V. I. and Chernogor L. F. Wigner transformation in digital processing of signals // *Doklady Physics*. – 2006. – Vol. 51, No. 9. – P. 461-464.
  16. Auger F., Flandrin P., Goncalves P., Lemoine O. *Time-Frequency Toolbox Reference Guide*. – Newton: Rice University. – 2005. – 180 p.
  17. Дьяконов В. П. *МАТЛАВ 6: учебный курс*. – Санкт-Петербург: Питер, 2001. – 592 с.
  18. Дьяконов В. П., Абраменкова И. В. *МАТЛАВ. Обработка сигналов и изображений. Специальный справочник*. – Санкт-Петербург: Питер, 2002. – 608 с.
  19. Chernogor Leonid F., Kravchenko Viktor F., Lazorenko Oleg V. Ultra wideband signals: theory, simulation and digital processing // *In Proc. Ultrawideband and Ultrashort Impulse Signals*, 19 – 22 September, 2006, Sevastopol, Ukraine. – Sevastopol (Ukraine). – 2006. – P. 32-37.

## Аналіз нелінійних хвильових процесів за допомогою перетворення Вігнера

**О. В. Вишневецкий, О. В. Лазоренко, Л. Ф. Черногор**

Пропонується використовувати перетворення Вігнера у аналізі нелінійних хвильових процесів та сигналів. Аналітичними та чисельними методами проаналізовано ідеальну та реальну ударні хвилі, кінк, антикінк, ударну хвилю у диспергуючому середовищі, класичний солітон, солітоноподібний розв'язок модифікованого рівняння Кортевега-де Вріза, солітон обвідної, кноїдальної та пилкоподібної хвилі. Результати вігнер-аналізу порівняно з результатами фур'є-аналізу. Рекомендовано одночасне застосування перетворення Вігнера та спектрограми Фур'є у аналізі нелінійних хвильових процесів та сигналів. Розроблено та рекомендовано дослідникам спеціальний формат подання даних.

## Analysis of Non-Linear Wave Processes Using Wigner Transform

**O. V. Vishnivetsky, O. V. Lazorenko, and L. F. Chernogor**

The Wigner transform is proposed to use in the analysis of non-linear wave processes and signals. The ideal and natural shock waves, the kink and the antikink, the shock wave propagating in a dispersive medium, the classical soliton, the soliton-like solution of the modified Kortevæg-de Vries equation, the soliton of envelope, the cnoidal and sawtooth waves are analyzed analytically and numerically. The Wigner analysis results are compared with those of the Fourier analysis. The Wigner transform and Fourier spectrogram are recommended to use simultaneously in the analysis of non-linear wave processes and signals. A special data format developed is recommended for the researchers.