

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«НИЖЕГОРОДСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО»

*На правах рукописи*

**Лупов Сергей Юрьевич**

**ЧАСТОТНО - ВРЕМЕННОЙ АНАЛИЗ  
ИНТЕРФЕРОМЕТРИЧЕСКИХ ДАННЫХ  
О ГАЗОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССАХ**

Специальность 01.04.03 - радиофизика

**ДИССЕРТАЦИЯ**  
на соискание учёной степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель –  
кандидат тех. наук,  
доцент В.А. Канаков

Нижний Новгород, 2012

# Содержание

Список сокращений	5
Введение	6
<b>1. Обзор методов частотно-временного анализа и спектрального оценивания сигналов</b>	<b>13</b>
1.1. Алгоритм обработки интерферограмм, основанный на понятии «Мгновенная частота аналитического сигнала» . . . . .	13
1.1.1. Принцип работы интерферометра миллиметрового диапазона . . . . .	13
1.1.2. Описание алгоритма . . . . .	15
1.1.3. Ограничения применимости алгоритма . . . . .	16
1.2. Методы спектрально-временного анализа сигналов . . . . .	16
1.2.1. Оконное (динамическое) преобразование Фурье . . . . .	16
1.2.2. Преобразование Габора . . . . .	17
1.2.3. Вейвлет-преобразование . . . . .	18
1.2.4. Преобразование Вигнера-Виля . . . . .	21
1.2.5. Взаимное преобразование Вигнера-Виля . . . . .	22
1.2.6. Псевдопреобразование Вигнера . . . . .	22
1.2.7. Преобразование Чои-Вильямса . . . . .	23
1.2.8. Достоинства и недостатки классических методов спектрально-временного анализа . . . . .	23
1.3. Методы спектрального оценивания . . . . .	24
1.3.1. Классические методы . . . . .	24
1.3.2. Параметрические методы . . . . .	27
1.3.3. Методы оценивания частоты, основанные на анализе собственных значений (MUSIC, EV) . . . . .	37
1.3.4. Сравнение методов спектрального оценивания . . . . .	39
1.3.5. Применение методов спектрального оценивания . . . . .	40
1.3.6. Выбор метода спектрального оценивания для дальнейшего применения в работе . . . . .	41
1.4. Выводы . . . . .	42

<b>2. Применение метода максимально правдоподобной оценки параметров экспоненциальной модели для анализа ЧМ сигналов</b>	<b>44</b>
2.1. Описание алгоритма . . . . .	44
2.2. Применение алгоритма для оценки частотно-временного распределения энергии ЧМ сигнала . . . . .	48
2.3. Вычисление частотно-временного распределения ЧМ сигналов, смоделированных на компьютере . . . . .	50
2.3.1. Выделение основной компоненты из частотно-временного распределения энергии . . . . .	50
2.3.2. Влияние белого гауссова шума на точность измерений . .	51
2.3.3. Влияние узкополосной помехи на точность измерений . .	71
2.4. Выводы . . . . .	74
<b>3. Модификация преобразования Вигнера-Виля для анализа коротких реализаций широкополосных ЧМ сигналов</b>	<b>76</b>
3.1. Описание алгоритма . . . . .	76
3.1.1. Псевдопреобразование Вигнера . . . . .	76
3.1.2. Модификация псевдопреобразования Вигнера . . . . .	80
3.1.3. Блок-схема алгоритма . . . . .	82
3.1.4. Особенности реализации алгоритма . . . . .	83
3.1.5. Пример вычисления частотно-временного распределения энергии . . . . .	84
3.2. Тестирование модифицированного преобразования Вигнера-Виля на сигналах, смоделированных на компьютере . . . . .	85
3.2.1. Влияние белого гауссова шума на точность измерений . .	85
3.2.2. Влияние узкополосной помехи на точность измерений . .	102
3.3. Выводы . . . . .	105
<b>4. Обработка экспериментальных данных</b>	<b>106</b>
4.1. Проверка работоспособности разработанных методов при анализе данных, полученных при проведении физического эксперимента . . . . .	106
4.1.1. Описание установки . . . . .	106

4.1.2.	Вычисление частотно-временного распределения энергии	108
4.2.	Обработка интерферометрических данных, полученных в опытах по метанию стальной пластины продуктами взрыва заряда из тротила . . . . .	115
4.2.1.	Описание эксперимента . . . . .	115
4.2.2.	Частотно-временное распределение энергии интерферограммы, полученной в первом опыте . . . . .	116
4.2.3.	Частотно-временное распределение энергии интерферограммы, полученной во втором опыте . . . . .	119
4.2.4.	Частотно-временное распределение энергии интерферограммы, полученной в третьем опыте . . . . .	122
4.2.5.	Применение алгоритмов экстраполяции при анализе начальных участков радиоинтерферферограмм . . . . .	125
4.3.	Выводы . . . . .	127
	<b>Заключение</b>	<b>128</b>
	<b>Список литературы</b>	<b>130</b>

## Список сокращений

БПФ – быстрое преобразование Фурье

БГШ – белый гауссов шум

ВВ – взрывчатое вещество

ДПФ – дискретное преобразование Фурье

МПВВ – модифицированное преобразование Вигнера-Виля

МПО – метод максимально правдоподобной оценки параметров экспоненциальной модели

МЧАС – алгоритм обработки радиолокационного сигнала, основанный на понятии «Мгновенная частота аналитического сигнала»

ОМПО – метод максимально правдоподобной оценки параметров экспоненциальной модели в скользящем окне

ООЧ – ошибка оценки частоты

ОСШ – отношение сигнал/шум

ППВ – псевдопреобразование Вигнера

РПВ – распределение плотности вероятности

СПМ – спектральная плотность мощности

РПВООЧ – распределение плотности вероятности ошибки оценки частоты

ЧВРЭ – частотно - временное распределение энергии

# Введение

## Актуальность

При исследовании быстро протекающих газодинамических процессов к числу важнейших характеристик относятся скорости и перемещения границ раздела сред, в которых развивается процесс. В том случае, когда среда является радиопрозрачной, эти характеристики могут быть измерены посредством зондирования среды электромагнитными волнами. Описанный в [1] радиоинтерферометрический метод измерений получил широкое распространение в конце прошлого века [2–18]. Достоинствами метода являются непрерывность измерений и отсутствие возмущений, вносимых измерительными средствами в объект исследования. Весьма высокая точность измерений может быть получена в миллиметровом диапазоне длин волн [19].

Газодинамические эксперименты, проводимые в Институте экспериментальной газодинамики и физики взрыва (ИФВ РФЯЦ ВНИИЭФ), по оценке метательной способности взрывчатых веществ [5, 7, 8, 11], интересны тем, что скорость пластины, метаемой продуктами взрыва заряда из тротила, за несколько микросекунд достигает нескольких километров в секунду. Изменение скорости происходит не плавно, а ступеньками [20]. На интерферограмме этот участок занимает менее 10 периодов, и именно он представляет наибольший интерес исследователей.

По отсчетам интерферограммы можно вычислить мгновенную скорость движущейся пластины, используя алгоритм обработки, основанный на понятии «Мгновенная частота аналитического сигнала» [2]. Однако как показал опыт проведения измерений, этот простой алгоритм обработки далеко не всегда дает удовлетворительные результаты. Причинами этого обычно являются действие шума приемника, нарушение квадратуры канальных сигналов, возникающее при неидеальном согласовании антенны с зондируемой средой, присутствие в спектре входного сигнала компонент, возникающих из-за многократных отражений радиоволн.

Для анализа таких сигналов могут быть использованы различные методы частотно-временного анализа [21, 22], в том числе и вэйвлет-анализ [23], но, т.к. в основе таких методов, в явном или неявном виде, лежит дискретное

преобразование Фурье, то точность анализа зависит от количества периодов [24] на исследуемом участке интерферограммы, которое обычно невелико.

Таким образом, проблема частотно-временного анализа интерферограмм о быстропротекающих процессах, к которым относятся газодинамические, является актуальной и требует своего решения.

**Целью данной работы** является разработка методов частотно-временного анализа коротких реализаций широкополосных ЧМ сигналов, характерных для интерферограмм о газодинамических процессах.

Для достижения поставленной цели в работе были **решены следующие задачи**:

1. Разработаны и реализованы методы частотно-временного анализа коротких реализаций сигналов:
  - основанный на максимально-правдоподобной оценке параметров экспоненциальной модели в скользящем окне (ОМПО);
  - основанный на модификации преобразования Вигнера-Виля (МПВВ);
2. Проведены исследования методов анализа на точность вычисления частотно-временного распределения энергии (ЧВРЭ) ЧМ сигналов;
3. Проведена проверка работоспособности методов на данных, полученных при проведении физического эксперимента;
4. Вычислены ЧВРЭ радиоинтерферограмм, полученных в опытах по метанию стальной пластины продуктами взрыва заряда из тротила;
5. Разработан и реализован алгоритм экстраполяции дополнительных отсчетов, применение которого помогло оценить ЧВРЭ на начальном участке радиоинтерферограммы.

### **Научная новизна работы**

1. Разработан новый метод оценки ЧВРЭ коротких реализаций ЧМ сигналов, основанный на вычислении максимально правдоподобной оценки параметров экспоненциальной модели в скользящем окне;
2. Разработан новый метод оценки ЧВРЭ коротких реализаций широкополосных ЧМ сигналов, основанный на модификации преобразования Вигнера-Виля;
3. Получены оценки точности разработанных методов при анализе ЧМ сигналов;

4. Впервые для увеличения точности ЧВРЭ на начальном участке интерферограммы применен алгоритм экстраполяции, основанный на вычислении параметров экспоненциальной модели методом максимально правдоподобной оценки.

### **Положения, выносимые на защиту**

1. Применение метода максимально правдоподобной оценки параметров экспоненциальной модели в скользящем окне позволило с максимально возможной точностью (по критерию Крамера-Рао) анализировать ЛЧМ сигналы с низкой скоростью изменения частоты.
2. Применение разработанного метода вычисления ЧВРЭ, основанного на модификации преобразования Вигнера-Виля позволило с точностью близкой к максимально возможной (по критерию Крамера-Рао) анализировать ЛЧМ сигналы с произвольной скоростью изменения мгновенной частоты.
3. Эмпирически полученные зависимости смещения оценки частоты от размера окна в МПВВ позволяют компенсировать методические ошибки при анализе ЧМ сигналов с квадратичным законом изменения мгновенной частоты.
4. Разработанный метод экстраполяции позволяет повысить точность оценки ЧВРЭ на начальном участке интерферограммы, полученной в опыте по метанию пластины продуктами взрыва заряда из тротила.

### **Практическая и теоретическая значимости работы**

1. Разработанные методы частотно-временного анализа применимы для анализа коротких реализаций широкополосных ЧМ сигналов, в том числе интерферограмм газодинамических процессов.
2. Создан программный продукт, в котором реализованы разработанные методы частотно-временного анализа, а также наиболее известные методы спектрального оценивания, применимые как для всего сигнала, так и в скользящем окне.
3. Получены экспериментальные данные о зависимости дисперсии ошибки оценки мгновенной частоты от размера окна и соотношения сигнал/шум, возникающие при анализе ЛЧМ сигналов разработанными методами.
4. Эмпирически получена формула смещения оценки частоты разработан-



ного метода МПВВ, которая позволяет компенсировать методическую ошибку при анализе сигнала с квадратичным законом изменения частоты.

**Результаты данного исследования используются** при обработке экспериментальных данных, полученных в ИФВ РФЯЦ-ВНИИЭФ, в научно-исследовательских работах и учебном процессе в Нижегородском государственном университете им. Н.И. Лобачевского (ННГУ).

### **Обоснованность и достоверность результатов диссертации**

Результаты диссертации согласуются с известными положениями статистической радиофизики, статистической радиотехники, цифровой обработки сигналов. Достоверность полученных результатов и выводов подтверждается данными компьютерного моделирования и экспериментальных исследований на лабораторных макетах.

**Апробация работы.** Результаты диссертационной работы представлялись на 5-й, 9-й и 11-й, 14-й научных конференциях по радиофизике (Нижний Новгород, 2001, 2005, 2007, 2010), международных конференциях:

«VII Харитоновские тематические научные чтения. Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны» (Саров, 2005),

«IX Харитоновские тематические научные чтения. Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны» (Саров, 2007),

«VI международная научно - практическая конференция. Образовательные, научные и инженерные приложения в среде LabVIEW и технологии National Instruments» (Москва, 2006),

«VII международная научно - практическая конференция. Образовательные, научные и инженерные приложения в среде LabVIEW и технологии National Instruments» (Москва, 2007),

«IX международная научно - практическая конференция. Образовательные, научные и инженерные приложения в среде LabVIEW и технологии National Instruments» (Москва, 2010),

«X международная научно - практическая конференция. Образовательные, научные и инженерные приложения в среде LabVIEW и технологии National Instruments» (Москва, 2011),

Second International Symposium of Trans Black Sea Region on applied

electromagnetizm (Xanthi Greece, 2000).

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 29 работ, в том числе 10 статей в рецензируемых журналах, рекомендуемых ВАК, 9 – в сборниках трудов международных конференций. Список публикаций по теме диссертации с указанием личного вклада соискателя приведен ниже.

**Личный вклад автора.** 1 работа опубликована соискателем без соавторов, 8 работ в соавторстве со студентами, выполнявшими под его руководством курсовые и дипломные работы. Приведенные в диссертации результаты получены им лично.

**Структура и объем диссертации.** Диссертационная работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы, включающего 156 наименований. Работа содержит 147 страниц, из которых 124 страницы занимает основной текст.

**В первой главе** в разделе 1.1 приведены описание работы радиointерферометра и алгоритм обработки интерферограмм, основанный на понятии «Мгновенная частота аналитического сигнала». Отмечены недостатки данного алгоритма, связанные с затруднением анализа интерферограмм, имеющих аддитивный шум и дополнительные ЧМ компоненты, возникающие из-за многократных отражений радиоволн. Для обработки таких интерферограмм предложено применять спектрально-временные методы анализа.

В разделе 1.2 сделан обзор классических методов спектрально-временного анализа, таких как оконное Фурье преобразование, преобразование Вигнера-Виля, вэйвлет преобразование и др. Все рассмотренные методы при вычислении, в явном или не явном виде, используют преобразование Фурье. Такой подход эффективен в вычислительном отношении и обеспечивает получение приемлемых результатов для большого класса сигнальных процессов, однако ему присущ ряд принципиальных ограничений. Наиболее важное из них – это ограничение частотного разрешения, т.е. способности различать спектральные линии двух и более сигналов. Большинство интерферограмм газодинамических процессов имеет количество периодов, недостаточное для эффективного применения описанных в обзоре методов, поэтому для вычисления частотно-временного распределения разрабатывались методы, основанные на алгоритмах спектрального оценивания высокого разрешения, обзор которых

сделан в разделе 1.3. Проведен численный анализ методов спектрального оценивания, из которого следует, что метод МПО имеет самую высокую точность при работе с короткими гармоническими сигналами.

Учитывая эти факторы, метод МПО положен в основу разрабатываемых методов вычисления ЧВРЭ.

**Во второй главе** описывается метод оценки ЧВРЭ, основанного на МПО. Проведенные исследования метода при анализе ЧМ сигналов с низкой скоростью изменения частоты показали, что ошибка оценки частоты имеет гауссово распределение, независимо от закона изменения частоты и совпадает с нижней границей Крамера-Рао для гармонического сигнала с неизвестными параметрами. При анализе ЛЧМ сигналов с низкой скоростью изменения частоты, ошибка получается несмещенной, при более сложных законах изменения частоты появляется смещение ошибки. В этой же главе показано, что при анализе ЧМ сигналов с высокой скоростью изменения частоты распределение плотности вероятности ООЧ перестает быть гауссовым. Приводится влияние узкополосной помехи на точность оценки ЧВРЭ.

**В третьей главе** описывается метод оценки ЧВРЭ, основанного на модификации преобразования Вигнера-Виля. Проведенные исследования метода при анализе ЧМ сигналов показали, что ошибка оценки частоты имеет гауссово распределение, независимо от закона изменения частоты и почти совпадает с нижней границей Крамера-Рао для гармонического сигнала с неизвестными параметрами. При анализе ЛЧМ сигналов с любой скоростью изменения частоты ошибка получается несмещенной, при более сложных законах изменения частоты появляется смещение ошибки, причем эмпирически полученная формула может помочь в некоторых случаях компенсировать методическую ошибку. Данный метод работает более устойчиво при анализе ЧМ сигналов с высокой скоростью изменения частоты, по сравнению с методом ОМПО. Приводится влияние узкополосной помехи на точность ЧВРЭ модифицированного преобразования Вигнера-Виля.

**В четвертой главе** в разделе 4.1. приведены результаты тестирования методов на сигнале, полученном в результате физического эксперимента. Показано преимущество МПВВ перед методом ОМПО и алгоритмом обработки, основанном на понятии «Мгновенная частота аналитического сигнала».

ла» (МЧАС). Установленный в третьей главе закон смещения оценки частоты позволил компенсировать методическую ошибку.

В разделе 4.2. приведены результаты частотно-временного анализа радиоинтерферограмм, полученных в опытах по метанию стальной пластины продуктами взрыва заряда из тротила. Приведен алгоритм экстраполяции данных, использующий информацию о половине периода начального отрезка ЧМ сигнала (пока частота меняется незначительно). Применение данного алгоритма позволило оценить ЧВРЭ на начальном участке интерферограммы. Представлено сравнение результатов анализа радиоинтерферограмм быстропротекающих газодинамических процессов модифицированным преобразованием Вигнера-Виля с результатами анализа методом МЧАС.

**В заключении** излагаются основные результаты проведенного исследования.

# 1. Обзор методов частотно-временного анализа и спектрального оценивания сигналов

## 1.1. Алгоритм обработки интерферограмм, основанный на понятии «Мгновенная частота аналитического сигнала»

### 1.1.1. Принцип работы интерферометра миллиметрового диапазона

Интерферометр миллиметрового диапазона – устройство, предназначенное для измерения перемещений и скоростей физических объектов, которые способны отражать радиоволны миллиметрового диапазонов длин волн.

Структурные схемы интерферометров приведены в [2, 25].

Обобщенная структурная схема интерферометра представлена на рис. 1.1. Он состоит из генератора электромагнитных колебаний миллиметрового диа-

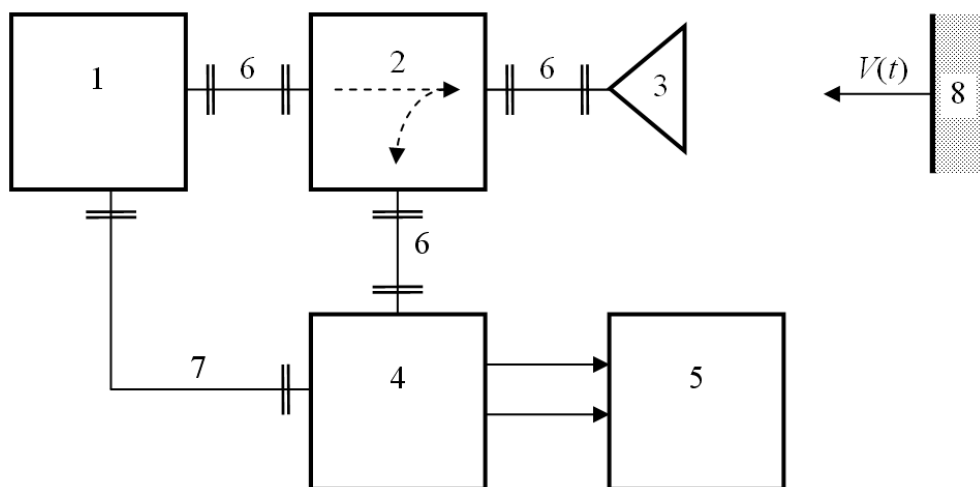


Рис. 1.1. Обобщенная структурная схема радиоинтерферометра

пазона (1), невзаимного развязывающего устройства (2), антенны (3), приемного устройства (4) и блока регистрации данных (5). Высокочастотные элементы схемы соединены волноводным трактом (6, 7). Исследуемый объект (8) может находиться в непосредственном контакте с антенной интерферометра, либо на некотором удалении. Среда между антенной (3) и объектом (8) должна быть радиопрозрачной.

Интерферометр работает следующим образом. Создаваемые генератором (1) непрерывные электромагнитные колебания постоянной мощности на фиксированной частоте через элементы волноводного тракта (6) и развязывающее устройство (2) поступают на антенну (3) и излучаются в окружающую среду. Если на пути излученных интерферометром радиоволн появляется любое препятствие с диэлектрической проницаемостью, отличной от диэлектрической проницаемости среды, имеет место отражение радиоволн. Часть энергии отраженных от препятствия волн возвращается на антенну (3) и через элементы волноводного тракта (6) и развязывающее устройство (2) поступает на вход приемного устройства (4). На другой вход приемного устройства через элементы волноводного тракта (7) с генератора (1) подается опорное колебание, частота которого однозначно связана с частотой излучаемой электромагнитной волны. продуктом которого является квадратурный сигнал с мгновенной частотой В приемном устройстве (4) происходит квадратурное преобразование принятого с антенны (3) сигнала, продуктом которого является квадратурный сигнал с мгновенной частотой равной доплеровскому сдвигу частоты [1, 2]:

$$f(t) = \frac{2\sqrt{\varepsilon}}{\lambda} V(t), \quad (1.1)$$

где  $\lambda$  – длина волны зондирующего сигнала в свободном пространстве,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость невозмущенной среды.

Полученный на интерферометре сигнал называется интерферограммой или радиоинтерферограммой.

Следует заметить, если в движении участвуют несколько объектов или имеются многократные переотражения электромагнитной волны от движущегося объекта и других объектов, в этом случае интерферограмма будет состоять из суммы нескольких ЧМ компонент, мгновенная частота каждой из них определяется выражением (1.2).

Таким образом, задача вычисления мгновенной скорости движущегося объекта по интерферограмме сводится к вычислению мгновенной частоты  $f(t)$  ЧМ компоненты, соответствующей данному объекту, значения которой подставляют в формулу:

$$V(t) = \frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon}} f(t), \quad (1.2)$$

### 1.1.2. Описание алгоритма

По отсчетам интерферограммы вида:

$$z(t) = x(t) + j \cdot y(t), \quad (1.3)$$

где  $x(t)$  и  $y(t)$  – квадратурные составляющие интерферограммы, можно вычислить мгновенные частоту и фазу движущегося объекта с помощью алгоритма, основанного на понятии «Мгновенная частота аналитического сигнала» [2, с. 101].

Мгновенная частота определяется выражением [2, с. 102]:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{x(t) \cdot \dot{y}(t) - y(t) \cdot \dot{x}(t)}{x^2(t) + y^2(t)},$$

где  $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$  – производные по времени квадратурных составляющих интерферограммы.

Если для получения интерферограммы используется только один канал интерферометра, то значения  $y(t)$  можно вычислить аналитически, используя преобразование Гильберта [2, 26]:

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{t - \tau} d\tau.$$

На практике для этого используют алгоритм, основанный на свойствах аналитического сигнала [2, с. 104], который включает следующие действия:

1. Нахождение спектра  $S_x(\omega)$  сигнала  $x(t)$  с помощью алгоритма БПФ.
2. Нахождение спектра аналитического сигнала  $S_z(\omega)$ :

$$S_z(\omega) = \begin{cases} 2S_x(\omega), & \text{при } \omega > 0 \\ S_x(\omega), & \text{при } \omega = 0 \\ 0, & \text{при } \omega < 0 \end{cases} .$$

3. Выполнение обратного преобразования Фурье спектра аналитического сигнала  $S_z(\omega)$ .

Значения реальной части полученной комплексной последовательности будут

соответствовать значениям  $x(t)$ , а мнимая часть –  $y(t)$  выражения (1.3).

### 1.1.3. Ограничения применимости алгоритма

Принципиальным ограничением применимости такого метода обработки сигналов является невозможность его использования в случае многомодовых сигналов, когда в спектре интерферограммы присутствуют несколько частот. В этом случае мгновенная частота сигнала не несёт информации о скорости газодинамического процесса.

Как показал опыт обработки интерферограмм, полученных в гадинамических экспериментах, даже с одной движущейся отражающей поверхностью, данный алгоритм обработки далеко не всегда дает удовлетворительные результаты. Причинами этого являются действие шума приемника, нарушение квадратуры канальных сигналов, возникающее при неидеальном согласовании антенны с зондируемой средой, присутствие в спектре входного сигнала компонент, возникающих из-за многократных отражений радиоволн.

Поэтому для анализа интерферограмм следует применять спектрально-временные методы анализа.

## 1.2. Методы спектрально-временного анализа сигналов

### 1.2.1. Оконное (динамическое) преобразование Фурье

Оконное преобразование Фурье (ОПФ) (short-time Fourier transform) вычисляют с помощью выражений:

$$- S(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) W(t - \tau) e^{-j\omega t} dt \text{ – для непрерывного сигнала [21, 27–38],}$$

$$- S[m, k] = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] W[n - m] e^{-j\frac{2\pi nk}{N}} \text{ – для дискретного сигнала [21, 28–30, 37, 38],}$$

где  $W(t)$  и  $W[n]$  – оконные функции [28, 29, 31, 39, 40].

Зависимость плотности энергии от времени и частоты для ДПФ называется спектрограммой Фурье.

К достоинствам данного метода следует отнести:



- его быстродействие, особенно, если использовать для его вычисления алгоритмы быстрого преобразования Фурье (БПФ) (Fast Fourier transform) [24, 26, 28–30, 32, 36, 39–41];
- линейность преобразования;
- богатый выбор оконных функций [28, 29, 31, 39, 40];
- наличие обратного преобразования

К недостаткам можно отнести тот факт, что разрешение по частоте обратно пропорционально количеству отсчетов в окне, т.е. размер окна необходимо выбирать большего размера, что сказывается на разрешении по времени.

Второе ограничение обусловлено неявной весовой обработкой данных при вычислении БПФ. Взвешивание проявляется в виде «утечки» в частотной области, т.е. энергия главного лепестка спектральной линии «утекает» в боковые лепестки, что приводит к наложению и искажению спектральных линий других присутствующих сигналов. В действительности спектральные линии слабых сигналов могут маскироваться боковыми лепестками спектральных линий более сильных сигналов [24]. Правильный выбор функции окна, значения которой спадают на краях, позволяет ослабить утечку в боковые лепестки, однако лишь за счет снижения разрешающей способности.

Данный метод анализа нашел применение при исследовании сигналов в радиоастрономии [42, 43], системах связи [44, 45], медицине [46], распознавании речи [47] и др.

### 1.2.2. Преобразование Габора

Преобразование Габора (Gabor transform) представляет собой разновидность ОПФ с гауссовским окном [21, 27–29, 35, 37, 38] и определяется соотношением:

$$S(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \exp\left(-\frac{(t - \tau)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \exp(-j\omega t) dt,$$

где  $\sigma$  определяет ширину окна.

Основным достоинством преобразования является то, что оно обладает наилучшей время-частотной локализацией среди всех динамических преобразований Фурье с точки зрения соотношения неопределенностей [24, 28, 29]. Его базисные функции обладают хорошей локализацией, как во временной,

так и в частотной областях.

### 1.2.3. Вейвлет-преобразование

Термин «вейвлет» (wavelet) ввели Гроссман и Морле (А. Grossman и J. Morlet) в середине 80-х г. в связи с анализом свойств сейсмических и акустических сигналов [48].

Сегодня широкое распространение на практике получили различные виды вейвлет-анализа: непрерывные вейвлет-преобразования (НВП) (continuous wavelet transform), вейвлетные ряды (диадное вейвлет-преобразование (dyadic wavelet transform)), вейвлет-фреймы (wavelet frame), аналитическое вейвлет-преобразование (АВП) (analytical wavelet transform), дискретное вейвлет-преобразование (ДВП) (digital wavelet transform), стационарное вейвлет-преобразование (stationary wavelet transform), вейвлет-пакеты (wavelet packet transform) и др. [21, 27–30, 33, 49–65]. Примеры применения вейвлет-преобразования приведены в [23, 27, 52, 59, 60, 66–73].

**Непрерывное вейвлет-преобразование** . Пусть задан вещественный сигнал  $s(t)$ . Тогда НВП сигнала  $s(t)$  определяется соотношением [23, 27–30, 35, 49–66]:

$$S(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \psi \left( \frac{t - b}{a} \right) dt,$$

где  $\psi(t)$  – вещественная вейвлетобразующая функция, часто называемая просто вейвлетом,  $a$  – параметр масштабирования,  $b$  – параметр сдвига,  $S(a, b)$  – вещественный вейвлет-спектр сигнала  $s(t)$ .

Параметр масштабирования  $a$  непосредственно связан с упомянутым выше периодом сигнала  $T = 2\pi/\omega$  соотношением  $T = ka$ , где  $k$  – коэффициент пропорциональности ( $k > 0$ ), зависящий от выбранной функции  $\psi(t)$ . Параметр сдвига  $b$  связан с использовавшейся ранее переменной сдвига по времени простым соотношением:  $b = \tau$ . Тогда с учетом новых переменных имеем:

$$S(T, \tau) = \frac{1}{kT} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \psi \left( \frac{t - \tau}{kT} \right) dt,$$

Достоинством НВП являются локализованность по времени и частоте базисных функций, автомодельность базиса, хорошее время-частотное разрешение, возможность исследования локальных особенностей сигнала, наличие большого набора разнообразных вейвлетобразующих функций. НВП особенно удобно для анализа сигналов, локализованных во временной области. К недостаткам НВП можно отнести зависимость вейвлет-спектра анализируемого сигнала от вида выбранного вейвлета и субъективность выбора вейвлета в каждом конкретном случае.

**Аналитическое вейвлет-преобразование** . Вместо вещественной вейвлетобразующей функции  $\psi(t)$  можно использовать комплексную  $\psi(t)$ . Тогда соответствующее преобразование, называемое АВП вещественного сигнала  $s(t)$ , определяется соотношением [28, 64]:

$$S(a, b) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \psi^* \left( \frac{t - b}{a} \right) dt,$$

где  $\psi^*(t)$  – функция, комплексно сопряженная аналитическому вейвлету  $\psi(t)$ ,  $S(a, b)$  – комплексный вейвлет-спектр сигнала  $s(t)$ . С использованием введенных выше переменных  $T$  и  $\tau$  получаем:

$$S(T, \tau) = \frac{1}{kT} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \psi^* \left( \frac{t - \tau}{kT} \right) dt,$$

Основное отличие АВП от НВП заключается в комплекснозначности используемого вейвлета  $\psi(t)$ , а следовательно, и получаемого вейвлет-спектра  $S(T, \tau)$ . АВП наследует от НВП как все его достоинства, так и недостатки. Кроме того, полезной особенностью АВП является возможность рассмотрения не только реальной части, как при НВП, но и амплитуды и фазы комплексного вейвлет-спектра сигнала, что позволяет получить дополнительную информацию об исследуемом сигнале. Вместе с тем следует отметить, что количество комплексных вейвлетов, необходимых при проведении АВП, значительно меньше количества вещественных вейвлетов, используемых в НВП.

**Дискретное вейвлет-преобразование** . НВП и АВП, в которых переменные  $a$  и  $b$  изменяются непрерывным образом, обладают существенной избыточностью. Уменьшить её позволяет ДВП, использующее дискретные масштабные преобразования ( $a = a_0^{-n}$ ) и сдвиги  $b = ka_0^{-n}$ , где  $a_0 > 1$ ,  $n$  и  $k$  - целые числа [52, 64, 68]. ДВП сигнала  $s(t)$  задается следующей парой соотношений:

$$c_{nk} = (s, \psi_{nk}) = a_0^{-n/2} \int_{-\infty}^{\infty} s(t) \cdot \psi(a_0^{-n}t - k) dt,$$

$$s(t) = C_\psi^{-1} \sum_{n \in Z} \sum_{k \in Z} c_{nk} \cdot a_0^{-n/2} \cdot \psi(a_0^{-n}t - k),$$

где нормирующий коэффициент определяется соотношением:

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(\omega)|^2 \cdot |\omega|^{-1} d\omega < \infty,$$

$\psi(\omega)$  – фурье-образ функции  $\psi(t)$ .

Если  $a_0 = 2$ , то говорят о диадном вейвлет-преобразовании, известном также как вейвлетные ряды.

В работах [52, 68] установлено, что для ортогональных вейвлетов точное восстановление сигнала, именуемое реставрацией, после ДВП возможно только с использованием дополнительной аппроксимации сигнала с помощью скейлинг-функции  $\varphi(t)$ . В противном случае восстановление дает сигнал, близкий к исходному  $s(t)$ , причем близость понимается в смысле обеспечения минимума среднеквадратичной погрешности восстановления. Вейвлет-функция  $\psi(t)$ , часто называемая «материнским вейвлетом», отвечает за детали сигнала  $s(t)$ , а скейлинг-функция  $\varphi(t)$ , называемая «отцовским вейвлетом», – за его грубое приближение, т.е. аппроксимацию. Разработана также специальная разновидность ДВП для стационарных сигналов – стационарное вейвлет-преобразование (СВП). Наиболее часто этот вид вейвлет-преобразования используется для очистки сигналов от шума [68, 74–78].

**Отличие вейвлет-преобразования от оконного преобразования Фурье** . Вейвлет-преобразование можно представить в виде ОПФ у которого меняется размер окна (размер окна обратно пропорционален частоте). Поэтому в плоскости время-частота на низких частотах вейвлет-преобразование имеет высокое разрешение по частоте, но низкое разрешение по времени, а на высоких – наоборот.

#### 1.2.4. Преобразование Вигнера-Виля

Метод Вигнера - Виля (Wigner-Ville transform) [21, 22, 27–30, 35–38, 66, 79–81] позволяет формировать оптимальные спектральные оценки на частотно-временной плоскости. Однако главный его недостаток проявляется в появлении перекрестных паразитных членов при обработке сигналов с нелинейной частотной модуляцией или многокомпонентных сигналов (содержащих сумму нескольких ЛЧМ сигналов). Данные паразитные перекрестные члены приводят к возникновению нежелательных пиков на частотно-временной плоскости, маскирующих истинный характер зависимости мгновенной частоты от времени. Непрерывное распределение Вигнера - Виля описывается формулой [21, 22, 27–30, 35–38, 66, 79–81]:

$$P_{WV}(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s\left(\tau + \frac{t}{2}\right) \cdot s^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

Дискретное распределение Вигнера - Виля для  $N$  отсчетов в сигнале описывается другой формулой [22, 28, 37, 38]:

$$P_{WV}[k, m] = \sum_{n=0}^{N-1} s[k+n] \cdot s^*[k-n] \cdot \exp\left(-j \cdot \frac{4\pi n m}{N}\right),$$

где  $s[n]$  – комплексная последовательность данных,  $m/(2N)$  – цифровая частота,  $k = 0, 1, 2, \dots, N$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots, N$ .

Следует отметить, что дискретное распределение Вигнера-Виля периодическое по цифровой частоте ( $m/(2N)$ ) с периодом 0.5.

Метод Вигнера - Виля показал свою эффективность при анализе сейсмо-разведочных данных [82], при исследовании сигналов в различных об-

ластях (медицина [66, 83], радиоастрономия [42, 43] и др.).

### 1.2.5. Взаимное преобразование Вигнера-Виля

В [28–30, 84] рассмотрена возможность использования частотно-временных распределений сигналов посредством взаимного преобразования Вигнера-Виля (cross Wigner-Ville distribution (XWVD)), в котором опорный сигнал  $s_0(t)$  сконструирован в соответствии со структурой исследуемого сигнала  $s(t)$ :

$$P_{WV}(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s\left(\tau + \frac{t}{2}\right) \cdot s_0^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

В литературе данное преобразование еще называют перекрестным преобразованием Вигнера-Виля [28].

### 1.2.6. Псевдопреобразование Вигнера

Существует несколько методов, позволяющих уменьшить интенсивность интерференционных членов, используя определенные процедуры усреднения. Один из них – использование окна  $h(t)$  во временной области. В результате получается так называемое псевдопреобразование Вигнера (ППВ) (pseudo-Wigner distribution) [21, 35]:

$$P_{PV}(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot s\left(\tau + \frac{t}{2}\right) \cdot s^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

Платой за уменьшение уровня интерференционных членов является ухудшение частотного разрешения. Очевидно, что при  $h(t) = 1$  ППВ переходит в обычное преобразование Вигнера-Виля.

Другой метод является развитием идеи первого, когда вместе с окном  $h(t)$  применяется временное сглаживающее окно  $g(t)$ . Соответствующее преобра-

зование имеет вид [21, 35, 85]:

$$P_{SPV}(\tau, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \int_{-\infty}^{\infty} g(x - \tau) \cdot s\left(x + \frac{t}{2}\right) \cdot s^*\left(x - \frac{t}{2}\right) dx \cdot e^{-j\omega t} dt.$$

и называется **сглаженным псевдо-преобразованием Вигнера (СППВ)** (smoothed pseudo-Wigner distribution). При  $g(t) = \delta(t)$  СППВ переходит в ППВ. Естественно, платой за лучшее подавление интерференции является дальнейшее ухудшение частотно-временного разрешения.

### 1.2.7. Преобразование Чои-Вильямса

Частным случаем СППВ является преобразование Чои-Вильямса (ПЧВ) (Choi-Williams transform) [21, 28, 35, 66, 86], которое задается следующим соотношением:

$$P_{CW}(\tau, \omega) = \sqrt{\frac{\sigma}{4\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\omega t}}{|t|} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - \tau)^2 \sigma}{4t^2}\right) s\left(x + \frac{t}{2}\right) s^*\left(x - \frac{t}{2}\right) dx dt,$$

где  $\sigma$  – положительный масштабный коэффициент.

Изменяя значение  $\sigma$ , можно управлять уровнем возникающих интерференционных членов. При  $\sigma$  стремящемся к бесконечности ПЧВ переходит в преобразование Вигнера-Вилля.

Основное достоинство ПЧВ – возможность управления уровнем интерференционных членов, а следовательно, и возможность выбора оптимального значения параметра  $\sigma$ , при котором время-частотное разрешение остается еще приемлемым в рамках решаемой задачи, а интерференция оказывается достаточно хорошо подавленной.

### 1.2.8. Достоинства и недостатки классических методов спектрально-временного анализа

Все приведенные методы при вычислении частотно-временного распределения сигналов, в явном или не явном виде, используют преобразование Фурье. При анализе дискретных во времени сигналов для этого используют-

ся процедуры БПФ. Такой подход эффективен в вычислительном отношении и обеспечивает получение приемлемых результатов для большого класса сигнальных процессов, однако ему присущ ряд принципиальных ограничений. Наиболее важное из них – это ограничение частотного разрешения, т.е. способности различать спектральные линии двух и более сигналов. Частотное разрешение в герцах примерно равно величине, обратной временному интервалу в секундах, на котором можно получить отсчеты сигнала, и не зависит от вида анализируемого сигнала. Второе ограничение обусловлено неявной весовой обработкой данных при вычислении БПФ. Взвешивание проявляется в виде "утечки" в частотной области, т.е. энергия главного лепестка спектральной линии "утекает" в боковые лепестки, что приводит к наложению и искажению спектральных линий других присутствующих сигналов. Правильный выбор функции окна, значения которой спадают на краях, позволяют ослабить утечку в боковые лепестки, однако лишь за счет снижения разрешающей способности. Указанные ограничения особенно сильно проявляются при анализе коротких записей данных, с которыми чаще всего и приходится иметь дело при анализе интерферограмм газодинамических процессов. Поэтому для вычисления частотно-временного распределения будет произведена замена ДПФ на методы спектрального оценивания коротких отрезков дискретных сигналов [24].

### **1.3. Методы спектрального оценивания**

#### **1.3.1. Классические методы**

К классическим методам относятся методы, основанные на прямом преобразовании Фурье данных с последующим усреднением по нескольким спектрам (периодограммные) [24, 29, 30, 32, 40, 41, 87, 88], и методы, опирающиеся на оценку усредненной автокорреляционной последовательности исходных данных, получаемой Фурье-преобразованием (коррелограммные) [24, 30, 33, 87, 88].



**Периодограммные методы.** Исходная немодифицированная форма периодограммной оценки СПМ определяется соотношением [24, 87, 89, 90]:

$$P(f) = \frac{T}{N} \left| \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot \exp(-2\pi f n T) \right|^2.$$

При вычислении периодограммы по длинному фрагменту случайного сигнала она оказывается весьма изрезанной. Для уменьшения этой изрезанности необходимо применить какое-либо усреднение.

В периодограмме Даньелла (Daniell) предлагается сглаживать быстрые флуктуации выборочного спектра путем усреднения по соседним частотам спектра. Данный метод сводится к вычислению свертки периодограммы со сглаживающей функцией.

В периодограмме Бартлетта (Bartlett) анализируемый сигнал делится на неперекрывающиеся сегменты, для каждого сегмента вычисляется периодограмма и затем эти периодограммы усредняются. Если корреляционная функция сигнала на длительности сегмента затухает до пренебрежимо малых значений, то периодограммы отдельных сегментов можно считать независимыми. В этом случае дисперсия периодограммы Бартлетта обратно пропорциональна числу используемых сегментов, однако с ростом числа сегментов при фиксированном общем числе отсчетов сигнала падает спектральное разрешение (за счет того, что сегменты становятся короче).

Уэлч (Welch) внес в метод Бартлетта два усовершенствования: использование весовой функции и разбиение сигнала на перекрывающиеся фрагменты. Применение весовой функции позволяет ослабить растекание спектра и уменьшить смещение получаемой оценки спектра плотности мощности ценой незначительного ухудшения разрешающей способности. Перекрывание сегментов введено для того, чтобы увеличить их число и уменьшить дисперсию оценки.

Так же как и для периодограммы Бартлетта, дисперсия оценки, получаемой методом Уэлча, уменьшается примерно пропорционально числу сегментов. Благодаря перекрытию в методе Уэлча используется больше сегментов, поэтому дисперсия оценки спектра плотности мощности оказывается меньше,

чем для метода Бартлетта.

**Коррелограммный метод.** Альтернативным методом является коррелограммный метод, который основан на использовании бесконечной последовательности значений данных для расчета автокорреляционной последовательности (АКП)  $r_{xx}[m]$ , преобразование Фурье которой дает искомую СПМ [24, 87, 89]:

$$P_{xx}(f) = T \sum_{m=-\infty}^{\infty} r_{xx}[m] \cdot e^{-j2\pi fmT}, \quad -\frac{1}{2T} \leq f \leq \frac{1}{2T},$$

где

$$r_{xx}[m] = \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^M x[n+m] \cdot x^*[n].$$

На практике СПМ может быть оценена по конечной записи данных следующим образом [24, 87, 89]:

$$\hat{P}_{xx}(f) = T \sum_{m=-L}^L \hat{r}_{xx}[m] \cdot e^{-j2\pi fmT}, \quad -\frac{1}{2T} \leq f \leq \frac{1}{2T},$$

где

$$\hat{r}_{xx}[m] = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m] \cdot x^*[n] \quad \text{— несмещенная оценка} \quad (1.4)$$

$$\hat{r}_{xx}[m] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-m-1} x[n+m] \cdot x^*[n] \quad \text{— смещенная оценка} \quad (1.5)$$

$$-\frac{1}{2T} \leq f \leq \frac{1}{2T}$$

Максимальный индекс временного сдвига  $L$  обычно ограничивают величиной  $L > N/10$ . Причина выбора такого максимального значения — стремление устранить большие значения дисперсии, связанные с оценками автокорреляции при больших временных сдвигах.

При отрицательных значениях индекса  $m$  значения АКП получаются из свойства сопряженной симметрии  $\hat{r}_{xx}[-m] = \hat{r}_{xx}^*[m]$ . Таким образом,  $(2N-1)$

значений АКП могут быть оценены по  $N$  отсчетам данных.

Для типичных приложений средний квадрат ошибки будет, как правило, больше для несмещенной оценки, чем для смещенной. По этой и ряду других причин [24] предпочтение часто отдается смещенной оценке АКП.

Эффект неявно присутствующего окна из-за конечности данных приводит к свертке истинной спектральной плотности с преобразованием Фурье дискретно-временного прямоугольного или треугольного (как в случае со смещенными оценками) окна. Для уменьшения этого эффекта используется корреляционное окно и коррелограммная оценка спектральной плотности мощности в общем виде выглядит следующим образом:

$$\hat{P}_{xx}(f) = T \sum_{m=-L}^L W[m] \cdot \hat{r}_{xx}[m] \cdot e^{-j2\pi f m T}, \quad -\frac{1}{2T} \leq f \leq \frac{1}{2T},$$

Такая форма оценки была предложена Блэкманом и Тьюки (Blackman-Tukey Correlogram) [24, 87].

Окно здесь нормируется так, чтобы  $W[0] = 1$ , поэтому оценка АКП будет несмещенной, мощность отсчетов сохраняется, а следовательно, оценка СПМ будет правильно промасштабирована. Правильный выбор окна  $W[m]$  позволит уменьшить растекание спектра и его смещение.

**Особенности использования классических методов спектрального оценивания.** При использовании классических методов оценивания спектра приходится принимать множество компромиссных решений в целях получения спектральных оценок с максимально возможным разрешением. К таким решениям относятся выбор соответствующих функций окна для взвешивания данных и корреляционных функций и параметров усреднения во временной и частотной областях.

### 1.3.2. Параметрические методы

Получение более точных оценок спектральных характеристик (по сравнению с классическими методами) сигнала, заданного на ограниченном промежутке времени, потенциально возможно при использовании параметрических

методов.

К данной категории относят методы, в которых задается некоторая математическая модель с известной частотной характеристикой и спектральный анализ сводится к решению оптимизационной задачи, то есть поиску таких параметров модели, при которых она наиболее близка к исследуемому сигналу.

**Авторегрессионная модель.** Среди возможных параметрических методов спектрального анализа наибольшее распространение получили методы, основанные на авторегрессионной (АР) (Autoregressive) модели формирования сигнала [24, 33, 36, 40, 87, 89, 90]. Это обусловлено простотой модели, удобством расчетов на ее основе и тем, что данная модель хорошо соответствует многим реальным задачам.

Согласно авторегрессионной модели, дискретный сигнал  $x[n]$  формируется путем пропускания дискретного белого шума  $u[n]$  с нулевым средним и дисперсией  $\rho$  через чисто рекурсивный фильтр  $p$ -го порядка. Линейное разностное уравнение определяется соотношением:

$$x[n] = - \sum_{k=1}^p a[k] \cdot x[n - k] + u[n].$$

Коэффициенты  $a[k]$ , называются авторегрессионными параметрами (АР-параметрами).

Спектральная плотность мощности АР( $p$ )-процесса определяется соотношением [24, 33, 36, 41, 87, 89, 91]:

$$P_{AP}(f) = \frac{T\rho}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k \cdot e^{-j2\pi f \cdot kT} \right|^2},$$

где  $T$  – период дискретизации.

Таким образом, для оценки СПМ необходимо лишь оценить значения АР-параметров  $a_k$  и дисперсию белого шума  $\rho$ .

**Алгоритм Юла-Уолкера.** Один из подходов к вычислению АР-параметров  $a[k]$  и оценке дисперсии мощности белого шума  $\rho$  состоит в решении уравнений Юла-Уолкера<sup>1</sup> (Yule-Walker) [24, 40, 87, 90–92]:

$$\begin{pmatrix} r_{xx}[0] & r_{xx}[-1] & \dots & r_{xx}[-p] \\ r_{xx}[1] & r_{xx}[0] & \dots & r_{xx}[-p+1] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}[p] & r_{xx}[p-1] & \dots & r_{xx}[0] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ a[1] \\ \vdots \\ a[p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

в которые вместо значений неизвестной автокорреляционной функции подставляются их оценки (1.5). Такая процедура оценивания СПМ будет называться алгоритмом Юла - Уолкера.

Следует заметить, что при использовании несмещенных автокорреляционных оценок (1.4) автокорреляционная матрица может оказаться неположительно-определенной, а это означает, что АР-фильтр будет неустойчивым. При использовании смещенных автокорреляционных оценок эта матрица всегда будет положительно-полуопределенной, что гарантирует устойчивость АР-фильтра. В случае длинных записей данных метод Юла - Уолкера может давать вполне приемлемые спектральные оценки, однако в случае коротких записей данных получаемые с его помощью спектральные оценки имеют более низкое разрешение по сравнению с оценками, получаемыми другими авторегрессионными методами.

**Алгоритм Левинсона для решения системы уравнений Юла-Уолкера.** Решение системы уравнений Юла-Уолкера (1.6) возможно с помощью эффективной рекуррентной процедуры, получившей название алгоритм Левинсона<sup>2</sup> (Levinson algorithm) [24, 33, 40, 87, 90, 91]. Согласно этому алгоритму систему уравнений решают для последовательно увеличивающихся (начиная с 1) порядков АР-модели.

Так рекурсивное решение уравнений Юла-Уолкера методом Левинсона связывает АР-параметры порядка  $p$  с параметрами порядка  $(p - 1)$  соотно-

<sup>1</sup>В [33] данный метод называется автокорреляционным

<sup>2</sup>В [33, 92] данный алгоритм называется алгоритмом Дарбина, в [91] – Levinson-Durbin Recursion

шением:

$$a_p[n] = a_{p-1}[n] + K_p \cdot a_{p-1}^*[p-n], \quad n = 1, 2, \dots, p-1.$$

Коэффициент  $K_p = a_p[p]$ , получивший название коэффициента отражения, определяется по значениям автокорреляции (1.5):

$$K_p = a_p[p] = -\frac{1}{\rho_{p-1}} \sum_{n=0}^{p-1} a_{p-1}[n] \cdot r_{xx}[p-n],$$

где  $a_{p-1}[0] = 1$ .

Рекурсивное уравнение для оценки дисперсии белого шума имеет вид [24, 87]:

$$\rho_p = \rho_{p-1}(1 - |K_p|^2)$$

с начальным условием  $\rho_0 = r_{xx}[0]$ .

Преимущества решения уравнений Юла-Уолкера методом Левинсона заключаются в следующем:

1. Поскольку параметры вычисляются по рекуррентным формулам, до определения параметров АР-модели заданного порядка рассчитываются параметры АР-моделей более низких порядков. Это обстоятельство весьма существенно в тех случаях, когда заранее значение порядка неизвестно.
2. В ходе вычислений легко контролировать необходимое и достаточное условие устойчивости АР-модели порядка  $p$  [24, 40]:  $K_p < 1$ .
3. Для параметров АР-модели порядка  $p$  с помощью алгоритма Левинсона требуется выполнить примерно  $p^2$  арифметических операций, в то время как при решении системы (1.6) методом Гаусса необходимо выполнить примерно  $p^3$  арифметических операций [40].

Алгоритм Левинсона также используется в оценках АР параметров с помощью метода Берга, геометрического алгоритма и метода максимального правдоподобия АР параметров, которые отличаются друг от друга оценками коэффициента отражения  $K_p$  и дисперсии шума  $\rho_p$ .

**Метод Берга.** Метод Берга (Burg method) (иногда называют метод максимальной энтропии) использует алгоритм Левинсона, в котором вместо коэффициента отражения, вычисляемого по известной автокорреляционной функции, используется его оценка [24, 33, 87, 90, 92]:

$$K_p = \frac{-2 \sum_{n=p+1}^N e_{p-1}^f[n] \cdot e_{p-1}^{b*}[n-1]}{\sum_{n=p+1}^N |e_{p-1}^f[n]|^2 + \sum_{n=p+1}^N |e_{p-1}^{b*}[n-1]|^2},$$

где  $e_p^f[n]$  и  $e_p^b[n]$  – ошибки линейного предсказания вперёд и назад [24, 87]:

$$e_p^f[n] = e_{p-1}^f[n] + K_p \cdot e_{p-1}^b[n-1],$$

$$e_p^b[n] = e_{p-1}^b[n-1] + K_p^* \cdot e_{p-1}^f[n],$$

которые связывают ошибки предсказания порядка  $p$  с ошибками предсказания порядка  $p-1$ , вычисления по которым начинаются с рекурсии нулевого порядка:

$$e_0^f[n] = e_0^b[n] = x_n.$$

Рекурсивное уравнение для оценки дисперсии белого шума имеет вид:

$$\rho_p = \frac{1}{2N} \left[ \sum_{n=p+1}^N |e_p^f[n]|^2 + \sum_{n=p+1}^N |e_p^b[n]|^2 \right].$$

Коэффициент отражения  $K_p$  не может превысить 1, что говорит об устойчивости АР модели вычисленной методом Берга.

**Геометрический алгоритм.** Отличие геометрического алгоритма<sup>1</sup> [24, 33, 87] от метода Берга состоит в вычислении оценок коэффициента отражения и дисперсии ошибки.

---

<sup>1</sup>В [33] данный метод называется методом на основе лестничного фильтра

Коэффициент отражения определяется соотношением:

$$K_p = \frac{-2 \sum_{n=p+1}^N e_{p-1}^f[n] \cdot e_{p-1}^{b*}[n-1]}{\left( \sum_{n=p+1}^N |e_{p-1}^f[n]|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left( \sum_{n=p+1}^N |e_{p-1}^{b*}[n-1]|^2 \right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Дисперсия ошибки линейного предсказания вычисляется рекурсивным выражением:

$$\rho_p = \rho_{p-1} \cdot (1 - |K_p|^2).$$

В качестве начального значения используется оценка:

$$\rho_p = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^N |x[n]|^2.$$

### Метод максимально правдоподобной оценки АР параметров.

Принцип оценивания по методу максимального правдоподобия АР параметров [24, 90] отличается от предыдущих 3-х алгоритмов в вычислении оценок коэффициента отражения и дисперсии ошибки. Данный метод оценивания параметров работает только в случае действительных данных. Оценка коэффициента отражения получается как решение кубического уравнения:

$$K_p^3 + \left( \frac{N-2p}{N-p} \right) \cdot \left( \frac{\alpha_p}{\beta_p} \right) \cdot K_p^2 - \left( \frac{p \cdot \delta_{p-1} + N\alpha_p}{(N-p) \cdot \beta_p} \right) \cdot K_p - \left( \frac{N}{N-p} \right) \cdot \left( \frac{\alpha_p}{\beta_p} \right) = 0,$$

для которого определяется действительный корень на интервале от  $-1$  до  $1$ .

Коэффициенты уравнения вычисляются с помощью соотношений:

$$\delta_p = \delta_{p-1} - 1 + 2\alpha_p K_p + \beta_p K_p^2,$$

$$\alpha_p = \sum_{k=0}^{p-1} a_{p-k-1} \cdot \sum_{m=0}^{p-1} a_m \cdot \sum_{n=p+1}^{N-p+k+m} x[n-k] \cdot x[n-m],$$

$$\beta_p = \sum_{k=0}^{p-1} a_{p-k-1} \cdot \sum_{m=0}^{p-1} a_{p-m-1} \cdot \sum_{n=p+1}^{N-p+k+m} x[n-k] \cdot x[n-m-1],$$



где  $\delta_0 = \sum_{n=1}^N x^2[n]$ .

Дисперсия ошибки оценивается по формуле:  $\rho_p = \delta_p/N$ .

**Ковариационный метод оценки АР параметров.** Для оценки АР параметров ковариационным методом (covariance method) [24, 33, 87, 90] необходимо решить линейную систему из  $(N - p)$  уравнений:

$$\begin{pmatrix} x[p] & x[p-1] & \dots & x[1] \\ x[p+1] & x[p] & \dots & x[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N-1] & x[N-2] & \dots & x[N-p] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \vdots \\ a[p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x[p+1] \\ -x[p+2] \\ \vdots \\ -x[N] \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

Решение данной системы методом наименьших квадратов сводится к решению линейной системы из  $P$  уравнений:

$$\begin{pmatrix} r[1,1] & r[1,2] & \dots & r[1,p] \\ r[2,1] & r[2,2] & \dots & r[2,p] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r[p,1] & r[p,2] & \dots & r[p,p] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \vdots \\ a[p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r[1,0] \\ -r[2,0] \\ \vdots \\ -r[p,0] \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

где

$$r[m,k] = \sum_{n=p+1}^N x^*[n-m] \cdot x[n-k].$$

Дисперсия ошибки оценивается по формуле:

$$\rho_p = \sum_{k=0}^p a_k \cdot \sum_{n=p+1}^N x^*[n] \cdot x[n-k],$$

где  $a_0 = 1$ .

**Ковариационный модифицированный метод оценки АР параметров.** Для оценки АР параметров ковариационным модифицированным методом (modified covariance method) [24, 33, 87, 90] необходимо решить линейную

систему из  $2 \cdot (N - p)$  уравнений:

$$\begin{pmatrix} x[p] & x[p-1] & \dots & x[1] \\ x[p+1] & x[p] & \dots & x[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N-1] & x[N-2] & \dots & x[N-p] \\ x^*[2] & x^*[3] & \dots & x^*[p+1] \\ x^*[3] & x^*[4] & \dots & x^*[p+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^*[N-p+1] & x^*[N-p+2] & \dots & x^*[N] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \vdots \\ a[p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x[p+1] \\ -x[p+2] \\ \vdots \\ -x[N] \\ -x^*[1] \\ -x^*[2] \\ \vdots \\ -x^*[N-p] \end{pmatrix}$$

Решение данной системы методом наименьших квадратов сводится к решению линейной системы из  $P$  уравнений:

$$\begin{pmatrix} r[1,1] & r[1,2] & \dots & r[1,p] \\ r[2,1] & r[2,2] & \dots & r[2,p] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r[p,1] & r[p,2] & \dots & r[p,p] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a[1] \\ a[2] \\ \vdots \\ a[p] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r[1,0] \\ -r[2,0] \\ \vdots \\ -r[p,0] \end{pmatrix}$$

где

$$r[m, k] = \frac{1}{2} \sum_{n=p+1}^N x^*[n-m] \cdot x[n-k] + x[n-p+m] \cdot x^*[n-p+k].$$

Дисперсия ошибки оценивается по формуле:

$$\rho_p = \sum_{k=0}^p a_k \cdot \sum_{n=p+1}^N x^*[n] \cdot x[n-k] + x[n-p] \cdot x^*[n-p+k],$$

где  $a_0 = 1$ .

**Выбор оптимального порядка АР модели.** Основной трудностью реализации данных алгоритмов спектрального оценивания является неопределенность в выборе оптимального порядка АР модели. Поэтому решение о выборе того или иного порядка принимается заданием критерия ошибки, сравнением с которым определяется требуемый порядок модели. Малый по-

рядок модели приводит к сильно сглаженным спектральным оценкам, излишне большой – к появлению ложных пиков. Следовательно, выбор порядка модели, определяющий разрешение спектра и его дисперсию, эквивалентен выбору между разрешением и дисперсией для классических методов спектрального оценивания. Для выбора порядка модели предложено несколько критериев, подробно обсуждаемых в [24, 87], поэтому ограничимся их кратким упоминанием:

1. Окончательная ошибка предсказания (ООП) (выбор порядка АР-процесса выбирается из требования минимизации средней дисперсии ошибки).
2. Информационный критерий Акаике (ИКА) (порядок модели определяется посредством минимизации некоторой теоретической информационной функции).
3. Авторегрессионный передаточной функции критерий (АПФК) (порядок модели выбирается равным порядку, при котором оценка разности среднего квадрата ошибки между истинным фильтром предсказания ошибки и оцениваемым фильтром минимальна).

Результаты оценивания спектра при использовании критериев ООП, ИКА, АПФК близки в случае реальных данных. Однако в случае коротких записей данных ни один из критериев не обеспечивает удовлетворительных результатов [24]. Точного аналитического решения задачи о выборе порядка модели в настоящее время нет, поэтому необходимо проведение численных экспериментов с имитационным радиоинтерферометрическим сигналом для выбора оптимального порядка модели [2].

**Метод наименьших квадратов Прони.** В отличие от стохастических параметрических АРСС-моделей, в методе Прони (Prony method) [24, 87, 92] для аппроксимации данных используется детерминированная экспоненциальная модель, вычисление спектральной плотности энергии (СПЭ) которой и составляет суть спектральной интерпретации метода Прони. Предположим, что имеется  $N$  комплексных отсчетов данных  $x[n]$ . Пусть мы хотим оценить  $x[n]$  с помощью набора из  $p$  экспоненциальных функций с произвольными

амплитудами  $A_k$ , частотами  $\omega_k$ , фазами  $\varphi_k$  и коэффициентами затухания  $\alpha_k$ :

$$\tilde{x}[n] = \sum_{k=1}^p h_k z_k^{n-1}, \quad p \leq \frac{N}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (1.9)$$

где  $h_k = A_k e^{j\phi_k}$  – комплексная амплитуда, представляющая собой независимый от времени параметр,  $z_k = e^{\alpha_k} \cdot e^{j\omega_k}$  – комплексная экспонента, которая описывает параметр, зависящий от времени.

Отыскание параметров  $A_k$ ,  $\omega_k$ ,  $\varphi_k$  и  $\alpha_k$ , минимизирующих

$$\rho = \sum_{n=0}^p |\varepsilon(n)|^2,$$

где

$$\varepsilon[n] = x[n] - \tilde{x}[n] = x[n] - \sum_{k=1}^p z_k^{n-1}$$

представляет трудную нелинейную задачу аппроксимации. Следует заметить, что такая постановка задачи в точности соответствует статистической формулировке задачи нахождения максимально правдоподобной оценки неизвестных параметров модели сигнала (1.9) (МПО) в аддитивной смеси его с белым гауссовым шумом [92–95]. Для ее решения [92, 96–98] могут быть использованы различные итеративные алгоритмы оптимизации, требующие больших вычислительных затрат, что затрудняет использование этого подхода в реальном времени. Альтернативное субоптимальное решение, в котором используются решения двух систем линейных уравнений и процедура нахождения корней полинома, основано на методе наименьших квадратов Прони [24, 87, 92]:

1. с помощью выражений (1.7) или (1.8) вычисляются вспомогательные коэффициенты  $a_1, a_2, \dots, a_p$ ;
2. подставив найденные значения в уравнение:

$$z^p + \sum_{m=1}^p a_m z^{p-m} = 0$$

и решив его, найдём комплексные экспоненты  $z_k$  модели Прони;

3. подставив найденные значения  $z_k$  в систему из  $N$  линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} z_1^0 & z_2^0 & \dots & z_p^0 \\ z_1^1 & z_2^1 & \dots & z_p^1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_p^{N-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ \vdots \\ h_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x[1] \\ x[2] \\ \vdots \\ x[N] \end{pmatrix}$$

и решив её методом наименьших квадратов, найдём комплексные амплитуды  $h_k$  метода Прони;

4. найдем значения амплитуд  $A_k = |h_k|$ , цифровых частот  $\omega_k = \arg z_k$ , фаз  $\phi_k = \arg h_k$  и коэффициентов затухания  $\alpha_k = \ln z_k$ .

Спектральная плотность энергии Прони для данной модели определяется соотношением:

$$P_{prony}(f) = \left| T \sum_{k=1}^p \frac{h_k}{1 - z_k \cdot e^{j\omega T}} \right|^2,$$

где  $T$  - период дискретизации. Здесь полагается, что  $|z_k| < 1$ .

В [24, 87] также рассмотрен алгоритм модифицированного метода наименьших квадратов Прони (modified Prony method) для случая незатухающих экспонент.

В [99] приводится модификация метода Прони при аппроксимации двумерных сигналов на фоне помех.

### 1.3.3. Методы оценивания частоты, основанные на анализе собственных значений (MUSIC, EV)

Методы MUSIC (MULTiple Signal Classification) ) и EV (EigenVectors) [24, 41, 87, 89, 92] предназначены для спектрального анализа сигналов  $x[n]$ , представляющих собой сумму комплексных экспонент с белым шумом. Целью анализа является не расчет спектра, а определение частот и уровней (амплитуд или мощностей) гармонических составляющих. Получаемая с помощью данных методов зависимость уровня сигнала от частоты называется псевдоспектром (pseudospectrum). Ключевой операцией в этих методах

является разделение информации, содержащейся в ковариационной матрице:

$$\begin{pmatrix} x[p] & x[p-1] & \dots & x[1] \\ x[p+1] & x[p] & \dots & x[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N-1] & x[N-2] & \dots & x[N-p] \end{pmatrix}$$

или модифицированной ковариационной матрице данных:

$$\begin{pmatrix} x[p+1] & x[p] & \dots & x[1] \\ x[p+2] & x[p+1] & \dots & x[2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x[N] & x[N-1] & \dots & x[N-p] \\ x^*[1] & x^*[2] & \dots & x^*[p+1] \\ x^*[2] & x^*[3] & \dots & x^*[p+2] \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x^*[N-p] & x^*[N-p+1] & \dots & x^*[N] \end{pmatrix}$$

на два векторных подпространства – подпространство сигнала и подпространство шума. Такое разделение наиболее эффективно, если есть априорная информация о числе синусоидальных компонент, присутствующих в сигнале, либо собственные значения сигнальных векторов больше собственных значений шумовых векторов.

Псевдоспектр сигнала вычисляется с помощью выражения:

$$P_{music}(f) = \frac{1}{\sum_{k=M+1}^{P+1} \alpha_k \left| \sum_{n=1}^{P+1} e^{j2\pi(n-1)fT} \cdot V_k[n] \right|^2}$$

где  $V_k[n]$  –  $n$ -й элемент  $k$ -го собственного вектора ковариационной (или модифицированной ковариационной) матрицы. Коэффициенты  $\alpha_k = 1$  (метод MUSIC),  $\alpha_k = 1/\lambda_k$  (метод EV),

где  $\lambda_k$  – собственные значения ковариационной (или модифицированной ковариационной) матрицы.

Собственные вектора  $V_k$  упорядочены по убыванию соответствующих им собственных значений  $\lambda_k$  матрицы ( $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots > \lambda_{P+1}$ )

В [24, 41] приводятся сведения о том, что при заданном значении порядка  $P$  метод EV порождает меньше ложных спектральных пиков, чем MUSIC, и, как правило, лучше передает форму спектра шума.

Методы оценивания частоты на основе анализа собственных значений матрицы данных представляют собой класс спектральных методов, обеспечивающих лучшие характеристики разрешения и оценивания частоты, чем AP методы и метод Прони, особенно при низких отношениях сигнал/шум.

#### 1.3.4. Сравнение методов спектрального оценивания

Метод	Достоинства	Недостатки
Периодограммный и коррелограммный	Хорошие результаты при анализе длинных сигналов. Высокое быстродействие.	Наименьшее частотное разрешение по сравнению с другими методами.
Юла-Уолкера	Хорошие результаты при анализе длинных сигналов. Гарантированная стабильность формирующего фильтра.	Плохие результаты при анализе коротких сигналов. При анализе суммы синусоид с шумом получают смещенные спектральные пики.
Берга	Высокая разрешающая способность при анализе коротких сигналов. Гарантированная стабильность рассчитанного формирующего фильтра. Нет боковых лепестков.	Положения спектральных пиков сильно зависят от начальных фаз синусоид. При большом порядке модели может наблюдаться расщепление спектральных пиков. При анализе суммы синусоид с шумом получают смещенные спектральные пики.
Геометрический алгоритм	Высокая разрешающая способность при анализе коротких сигналов. Гарантированная стабильность рассчитанного формирующего фильтра. Нет боковых лепестков.	При большом порядке модели может наблюдаться расщепление спектральных пиков.

Ковариационный	Большая (по сравнению с методом Юла-Уолкера) разрешающая способность при анализе коротких сигналов. Возможность оценки частот для сигнала, представляющего собой сумму «чистых» синусоид. Нет боковых лепестков.	Рассчитанный формирующий фильтр может оказаться нестабильным. При анализе суммы синусоид с шумом получаются смещенные спектральные пики.
Модифицированный ковариационный	Высокая разрешающая способность при анализе коротких сигналов. Возможность оценки частот для сигнала, представляющего собой сумму «чистых» синусоид. Отсутствие расщепления спектральных пиков. Нет боковых лепестков.	Положения спектральных пиков в некоторой степени зависят от начальных фаз синусоид. Рассчитанный формирующий фильтр может оказаться нестабильным. При анализе суммы синусоид с шумом получаются слегка смещенные спектроальные пики.
Прони	Высокая разрешающая способность при анализе коротких сигналов. Возможность оценки частот для сигнала, представляющего собой сумму «чистых» синусоид. Нет боковых лепестков.	При анализе суммы синусоид с шумом получаются смещенные спектральные пики. Коэффициенты затухания могут получиться положительными.
Метод максимально правдоподобной оценки параметров экспоненциальной модели	Высокая разрешающая способность при анализе коротких сигналов. Возможность оценки частот для сигнала, представляющего собой сумму «чистых» синусоид. Нет боковых лепестков.	Длительное время вычислений.
MUSIC и EV	Возможность оценки частот для сигнала с низким отношением сигнал/шум. Нет боковых лепестков.	Оценивается не СПМ сигнала, а псевдоспектр.

### 1.3.5. Применение методов спектрального оценивания

Классические методы (периодограммный, коррелограммный) нашли применение в медицине [65,100], в геофизике [101], при анализе фотометрических данных в астрономии [102,103], при исследовании озонового слоя [104,105], при анализе временных рядов в экономике [106] и др.



Параметрические методы спектрального оценивания применяются в системах связи [107], в том числе спутниковой [108,109], радиолокации [110–113], распознавании речи [33,114,115], медицине [116]. Данные методы используются при анализе климатических [117] и экономических [118] рядов. В [119] показана эффективность параметрических методов спектрального оценивания при выделении сигналов импульсного ядерного квадрупольного резонанса из шумов в условиях малого отношения сигнал/шум в детекторах азотсодержащих соединений.

В работе [120] показана эффективность применения метода MUSIC при анализе сигналов просветных бистатистических радиотехнических систем. В [121–124] показана эффективность применения метода MUSIC в радиолокации. В [121] показано, что применение методов MUSIC и EV позволяет получить более высокое угловое разрешение радиолокаторов по сравнению с AP методами.

### 1.3.6. Выбор метода спектрального оценивания для дальнейшего применения в работе

На рис. 1.2 представлены распределения плотности вероятности ошибки оценки частоты, вычисленные:

- 1 – методом максимально правдоподобной оценки параметров экспоненциальной модели (МПО) (количество комплексных экспонент в модели равно 1);
- 2 – модифицированным ковариационным методом (порядок AP-модели равен 12);
- 3 – MUSIC [24] (размерность ковариационной матрицы равна 12); размерность сигнального подпространства равна 4);
- 4 – методом Берга (порядок AP-модели равен 12);
- 5 – модифицированным МНК Прони (количество комплексных экспонент в модели Прони равно 12)

для сигнала:

$$s[n] = \exp\{2\pi \cdot 0.12345 \cdot n\} + \eta[n], \quad n = 0, 1, \dots, 24, \quad (1.10)$$

где  $\eta[n]$  – комплексный белый гауссов шум (ОСШ= $1/\sigma^2=0$  дБ,  $\sigma^2$  – дисперсия шума).

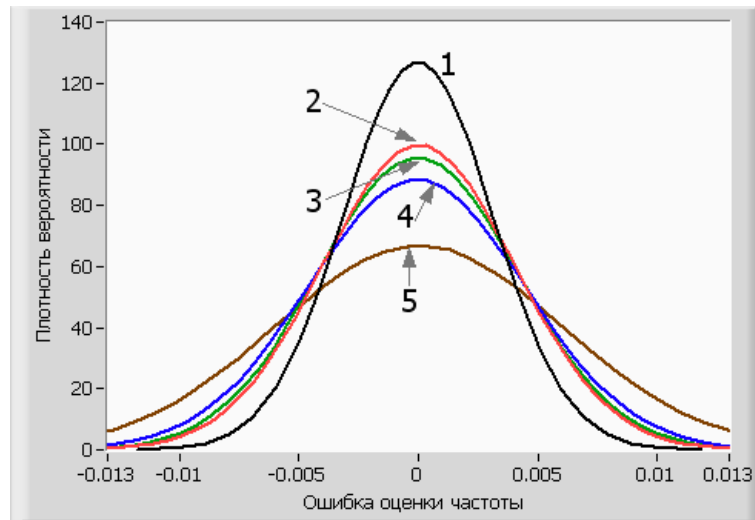


Рис. 1.2. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот, вычисленном методами: 1 – МПО, 2 – модифицированным ковариационным, 3 – MUSIC, 4 – Берга, 5 – МНК Прони модифицированным для сигнала (1.10) с ОСШ=0 дБ

При сравнении распределений получилось, что метод максимально правдоподобной оценки параметров экспоненциальной модели (МПО) имеет самую высокую точность при работе с короткими гармоническими сигналами.

## 1.4. Выводы

Сделан обзор классических методов частотно-временного анализа, таких как оконное Фурье преобразование, преобразование Вигнера-Вилля, вэйвлет преобразование и др. Все рассмотренные методы при вычислении, в явном или не явном виде, используют преобразование Фурье. Такой подход эффективен в вычислительном отношении и обеспечивает получение приемлемых результатов для большого класса сигнальных процессов, однако ему присущ ряд принципиальных ограничений. Наиболее важное из них – это ограничение частотного разрешения, т.е. способности различать спектральные линии двух и более сигналов. Большинство интерферограмм газодинамических процессов имеет количество периодов, недостаточное для эффективного применения описанных в обзоре методов, поэтому для вычисления частотно-временного распределения разрабатывались методы, основанные на алгоритмах спектрального оценивания высокого разрешения, обзор которых сделан

в разделе 1.2. Проведен численный анализ методов спектрального оценивания, из которого следует, что метод МПО имеет самую высокую точность при работе с короткими гармоническими сигналами.

Учитывая эти факторы, метод МПО положен в основу разрабатываемых методов вычисления ЧВРЭ.

## 2. Применение метода максимально правдоподобной оценки параметров экспоненциальной модели для анализа ЧМ сигналов

### 2.1. Описание алгоритма

Для оценки спектра будем аппроксимировать отрезок дискретного сигнала  $s[n]$  ( $n = 0, 1, \dots, N - 1$ ) линейной комбинацией  $p$  синусоид или комплексных экспонент (не обязательно ортогональных на данном отрезке) с различными частотами  $f_k$ , амплитудами  $A_k$ , и фазами  $\varphi_k$ , так, чтобы относительная ошибка аппроксимации между моделью и сигналом была минимальной [125, 126].

Относительная ошибка аппроксимации вычисляется по формуле:

$$\varepsilon = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} |s[n] - \tilde{s}[n]|^2}{\sum_{n=0}^{N-1} |s[n]|^2}, \quad (2.1)$$

где

$$\tilde{s}[n] = \sum_{k=1}^p A_k \cos(2\pi f_k n + \varphi_k) = \sum_{k=1}^p (X_k \cos(2\pi f_k n) - Y_k \sin(2\pi f_k n)) \quad (2.2)$$

– для действительного сигнала ( $X_k = A_k \cdot \cos(\varphi_k)$ ,  $Y_k = A_k \cdot \sin(\varphi_k)$ ),

$$\tilde{s}[n] = \sum_{k=1}^p A_k e^{j \cdot (2\pi \cdot f_k \cdot n + \varphi_k)} \quad (2.3)$$

– для комплексного сигнала. Далее выражение (2.2) будем называть синусоидальной моделью действительного сигнала, (2.3) – экспоненциальной моделью комплексного сигнала.

Следует заметить, что такая постановка задачи в точности соответствует статистической формулировке задачи нахождения максимально правдоподобной оценки неизвестных параметров модели сигнала в аддитивной смеси его с белым гауссовым шумом [92–95]. В дальнейшем данный метод будем

условно называть методом максимально правдоподобной оценки параметров экспоненциальной (синусоидальной) модели (МПО).

Оптимальные значения  $A_k$  и  $\varphi_k$  можно назвать амплитудами и фазами спектра на частотах  $f_k$  лишь условно, т.к. данная модель учитывает особенности сигнала только с дискретным спектром, когда  $p$  больше или равно числу частотных компонент в сигнале. Однако, как будет показано ниже, использование данного алгоритма может помочь оценить динамику отдельных частотных компонент в квазигармоническом ЧМ сигнале.

Минимизировать относительную ошибку аппроксимации (2.1), зависящую от  $3 \cdot p$  параметров  $f_k$ ,  $A_k$ , и  $\varphi_k$ , аналитически невозможно, поэтому для поиска оптимальных параметров модели будем использовать алгоритм оптимизации.

Нетрудно показать, что значения амплитуд  $A_k$  и фаз  $\varphi_k$  можно вычислить аналитически:

– для действительного сигнала:

$$A_k = \sqrt{X_k^2 + Y_k^2}, \quad \varphi_k = \text{Arctg} \frac{Y_k}{X_k}. \quad (2.4)$$

Коэффициенты  $X_k$ ,  $Y_k$  вычисляются с помощью системы линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=1}^p X_k \cdot cc_{1k} - \sum_{k=1}^p Y_k \cdot cs_{1k} = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot \cos(2\pi f_1 n) \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{k=1}^p X_k \cdot cc_{pk} - \sum_{k=1}^p Y_k \cdot cs_{pk} = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot \cos(2\pi f_p n) \\ \sum_{k=1}^p X_k \cdot sc_{1k} - \sum_{k=1}^p Y_k \cdot ss_{1k} = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot \sin(2\pi f_1 n) \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{k=1}^p X_k \cdot sc_{pk} - \sum_{k=1}^p Y_k \cdot ss_{pk} = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot \sin(2\pi f_p n) \end{array} \right. , \quad (2.5)$$

где

$$cc_{mk} = \sum_{n=0}^{N-1} (\cos 2\pi f_m n \cdot \cos 2\pi f_k n),$$

$$cs_{mk} = \sum_{n=0}^{N-1} (\cos 2\pi f_m n \cdot \sin 2\pi f_k n),$$

$$sC_{mk} = \sum_{n=0}^{N-1} (\sin 2\pi f_m n \cdot \cos 2\pi f_k n) = cS_{km},$$

$$sS_{mk} = \sum_{n=0}^{N-1} (\sin 2\pi f_m n \cdot \sin 2\pi f_k n).$$

– для комплексного сигнала:

$$A_k = |h_k|, \quad \varphi_k = \arg(h_k). \quad (2.6)$$

Комплексная амплитуда  $h_k$  вычисляется с помощью системы линейных уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 \cdot g_{11} + h_2 \cdot g_{12} + \dots + h_p \cdot g_{1p} = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot e^{-2\pi f_1 n} \\ h_1 \cdot g_{21} + h_2 \cdot g_{22} + \dots + h_p \cdot g_{2p} = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot e^{-2\pi f_2 n} \\ \dots \dots \dots \\ h_1 \cdot g_{p1} + h_2 \cdot g_{p2} + \dots + h_p \cdot g_{pp} = \sum_{n=0}^{N-1} s[n] \cdot e^{-2\pi f_p n} \end{array} \right., \quad (2.7)$$

где

$$g_{mk} = \sum_{n=0}^{N-1} e^{2\pi \cdot (f_k - f_m) \cdot n} = \begin{cases} \frac{1 - e^{j \cdot 2\pi (f_k - f_m) \cdot N}}{1 - e^{j \cdot 2\pi (f_k - f_m)}}, & f_k \neq f_m \\ N, & f_k = f_m \end{cases}.$$

На рис. 2.1 представлена блок-схема работы алгоритма. С помощью генератора случайных чисел (блок 1) задаются начальные значения<sup>1</sup> всех цифровых частот  $f_k$  в диапазоне от 0 до 0.5 для действительного или от  $-0.5$  до 0.5 – для комплексного сигнала. В блоке 2 производится поиск оптимальных параметров  $f_k$ , при которых относительная ошибка аппроксимации, вычисляемая в целевой функции (блок 3), имеет минимальное значение. В блоке 4 реализована визуализация исследуемого и аппроксимированного сигналов (в виде графиков), найденных значений частот  $f_k$ , амплитуд  $A_k$  и фаз  $\varphi_k$  (в виде таблицы). В процессе поиска значения цифровых частот могут перейти за границы заданного диапазона, поэтому полученные данные при отображении приводятся в диапазон от 0 до 0.5 – для действительного или от  $-0.5$  до 0.5 – для комплексного сигнала.

<sup>1</sup>На первой итерации внешнего цикла начальные значения вычисляются с помощью периодограммы

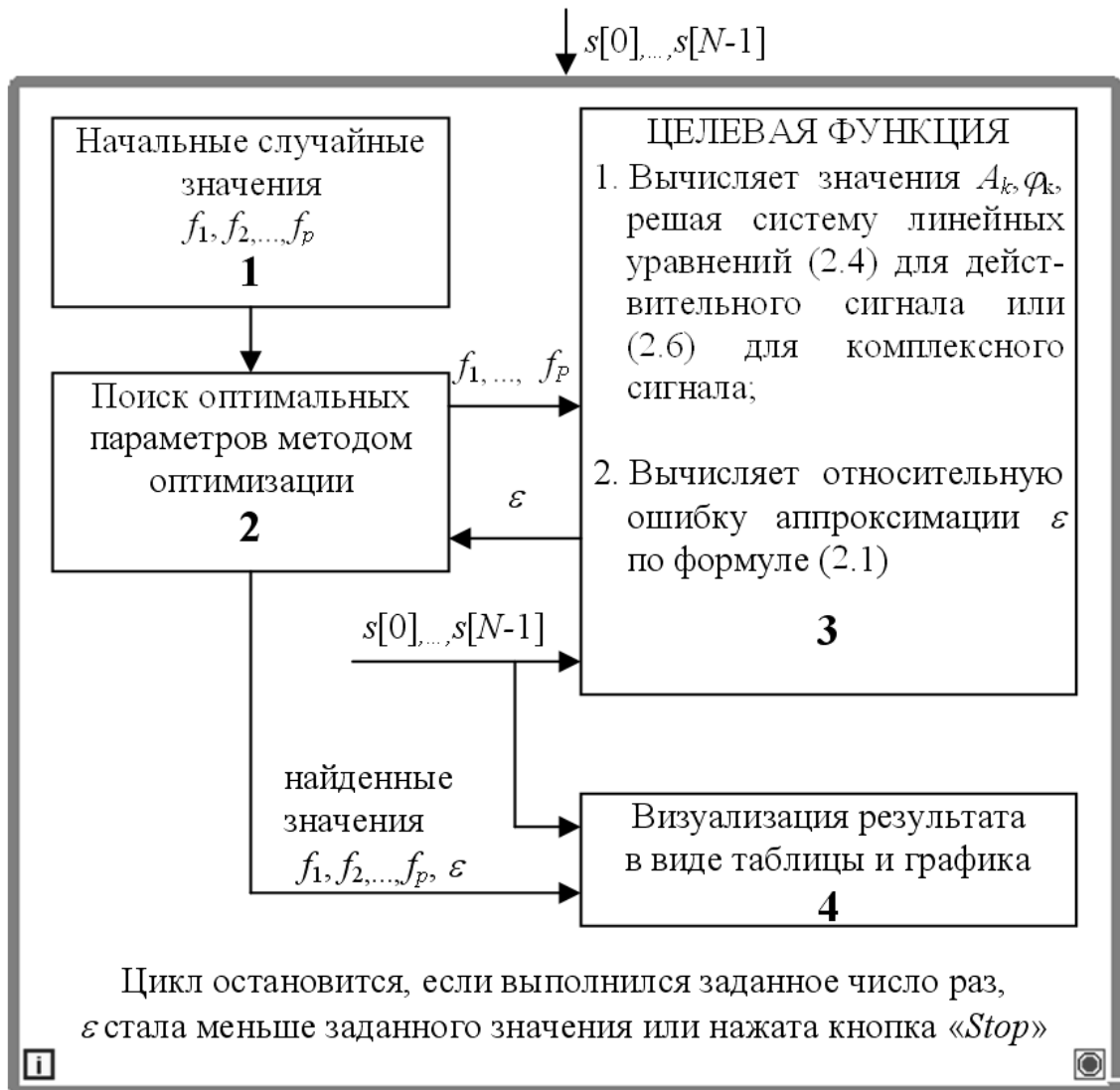


Рис. 2.1. Блок-схема алгоритма, вычисляющего максимально правдоподобную оценку параметров моделей (2.2) и (2.3)

Весь этот процесс происходит многократно, сохраняя значения поисковых параметров, при которых целевая функция имеет наименьшее значение.

При вычислении целевой функции предварительно сравниваются входные параметры друг с другом. При совпадении двух или более параметров, системы линейных уравнений (2.5) и (2.7) становятся вырожденными. Чтобы избежать этого, находим параметры с равными значениями (с точностью  $10^{-12}$ ), оставляя только один и сокращая количество уравнений в системе.

Дальнейшее изменение целевой функции связано с особенностями исследуемых сигналов. Как правило, в сигналах присутствует постоянная составляющая. Чтобы ее учесть, в целевой функции добавляется параметр<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Дополнительный параметр добавляется только при анализе сигналов, полученных в экспериментах, при анализе сигналов, смоделированных на компьютере дополнительный параметр не добавляется

$f_{p+1} = 0$ , который не является поисковым. Введение дополнительной частотной компоненты в целевой функции позволяет сократить количество поисковых параметров, что сокращает время поиска.

Для поиска оптимальных параметров в блоке 2 (рис. 2.1) использовались:

- подпрограмма E04CCF [127] библиотеки NAGLIB;
- виртуальный прибор LabVIEW *Downhill\_Simplex\_nD*, модифицированный для работы со сложными функциями [128];
- подпрограмма E04JAF [129] библиотеки NAGLIB;

В первых двух реализован симплексный [130], в третьей — квазиныютоновский [131] методы оптимизации. Наименьшее время поиска оптимальных значений параметров, при которых относительная ошибка аппроксимации (2.1) имеет глобальный минимум, показала программа использующая подпрограмму E04CCF. Чуть медленнее работает программа, написанная на языке программирования LabVIEW. При использовании подпрограммы E04JAF время поиска глобального минимума целевой функции в среднем увеличивается в несколько раз.

Количество частотных компонент в модели выбирается исходя из априорной информации о сигнале.

## 2.2. Применение алгоритма для оценки частотно-временного распределения энергии ЧМ сигнала

Для анализа динамики частотных компонент ЧМ сигнала будем вычислять максимально правдоподобную оценку параметров экспоненциальной модели сигнала в скользящем окне (ОМПО).

На рис. 2.2 представлена блок-схема алгоритма.

Отрезок сигнала  $s[n]$ , выделенный скользящим окном размером  $M$  отсчетов (блок 1), передается в цикл (блок 2), в котором реализован алгоритм, описанный в подразделе 2.1. С помощью генератора случайных чисел (блок 3) задаются начальные значения всех цифровых частот  $f_k$  в диапазоне от  $-0.5$  до  $0.5$ <sup>1</sup>. В блоке 4 производится поиск оптимальных параметров  $f_k$ , при которых относительная ошибка аппроксимации, вычисляемая в целевой

<sup>1</sup>На первой итерации цикла (блок 2) начальные значения вычисляются с помощью периодограммы



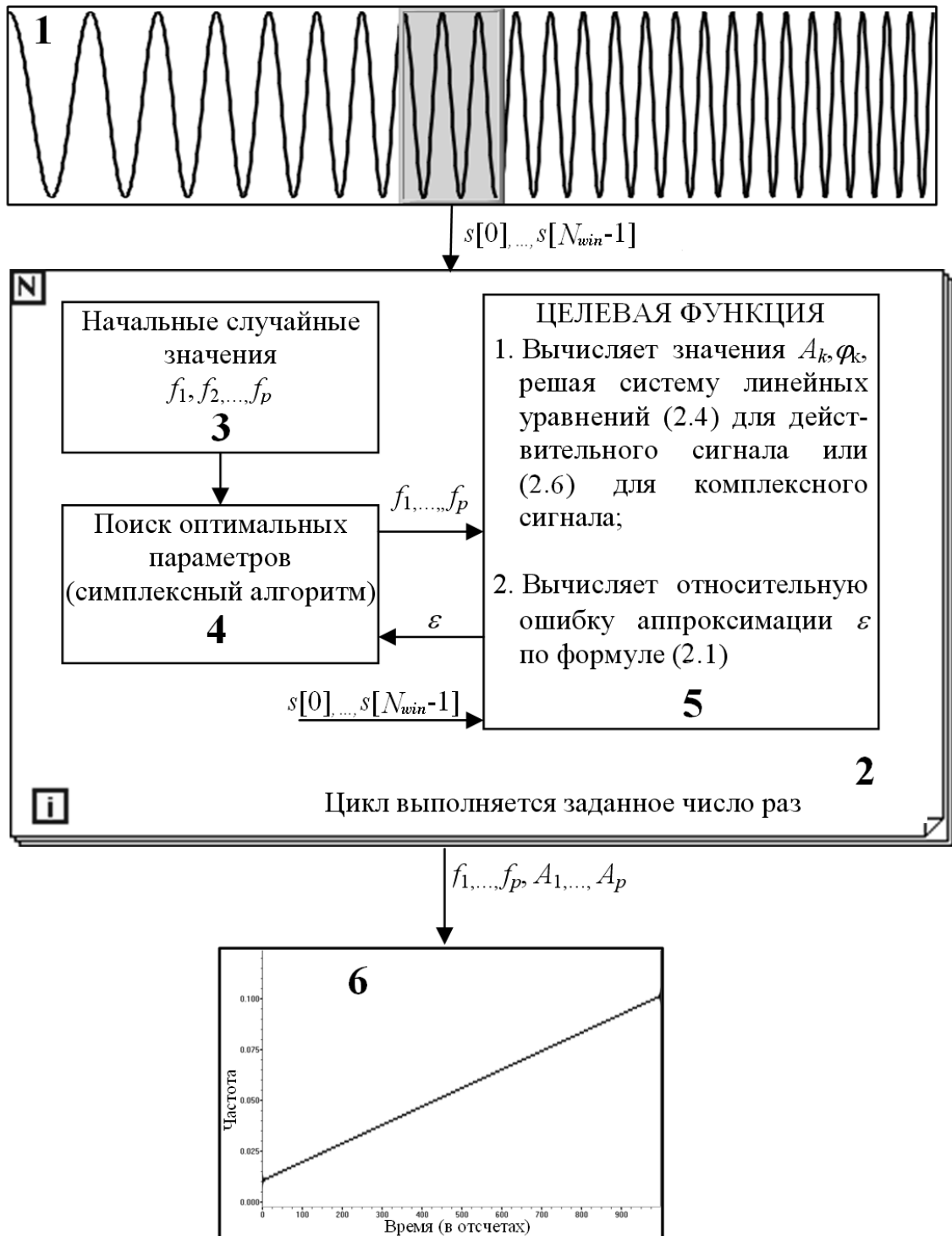


Рис. 2.2. Блок-схема алгоритма, вычисляющего метод максимально правдоподобной оценки в скользящем окне

функции (блок 5), имеет минимальное значение. Весь этот процесс происходит заданное количество раз (обычно не более 10), сохраняя значения поисковых параметров, при которых относительная ошибка аппроксимации имеет наименьшее значение.

Найденные значения частот вместе со значениями амплитуд передаются в блок 6, в котором отображаются на плоскости время-частота. По оси абсцисс

откладывается номер отсчета сигнала, соответствующего центру скользящего окна, по оси ординат - цифровая частота, по оси абсцисс на частотах  $f_k$  отображаются значения амплитуд  $A_k$  оттенками серого цвета (белому цвету соответствует нулевая амплитуда, черному – максимальная амплитуда).

## **2.3. Вычисление частотно-временного распределения ЧМ сигналов, смоделированных на компьютере**

Исследуем ОМПО на различных сигналах, смоделированных на компьютере. На изображениях частотно-временных распределений энергии по оси абсцисс отложено время в отсчетах, по оси ординат - частота. Более темные участки распределения соответствуют большей спектральной плотности мощности.

Используемое в формулах обозначение  $\eta[n]$  означает комплексный белый гауссов шум, ОСШ определяется как отношение квадрата амплитуды ЧМ компоненты к дисперсии шума.

### **2.3.1. Выделение основной компоненты из частотно-временного распределения энергии**

Так как при анализе сигналов нас интересуют только законы изменения частоты, то из ЧВРЭ получим ряд со значениями частот, соответствующих мгновенной частоте основной ЧМ-компоненты сигнала. Выделение основной компоненты из ЧВРЭ производится по следующему алгоритму:

1. в каждый момент времени из сечения (частота-интенсивность) ЧВРЭ выбираются экстремумы, интенсивности которых не ниже 0.7 максимального экстремума, и соответствующие им частоты записываются в таблицу, причем в первую колонку записывается частоты, соответствующие максимальной интенсивности в текущий момент времени;
2. создается вспомогательный ряд, состоящий из значений первой колонки таблицы, пропущенных через медианный фильтр (чтобы убрать одиночные скачки частот);
3. создается новый ряд, в котором значения частот выбирается из любой ячейки в соответствующей строке таблицы, так, чтобы ошибка по частоте

с вспомогательным рядом была минимальной;

4. считаем, что полученный ряд соответствует мгновенным частотам основной ЧМ-компоненты сигнала.

### 2.3.2. Влияние белого гауссова шума на точность измерений

Для определения влияния белого гауссова шума на точность оценки частоты были проведены измерения для различных ЧМ сигналов, частота которых менялась:

- по линейному закону от  $-0.25$  до  $0.25$  за 400 и 4000 отсчетов;
- по параболическому закону от  $0.2$  до  $-0.2$  и обратно за 400 и 800 отсчетов.

Исследования проводились для различных отношений сигнал/шум: 20, 10 и 0 дБ и различных размеров скользящих окон.

Зададим ЧМ сигнал:

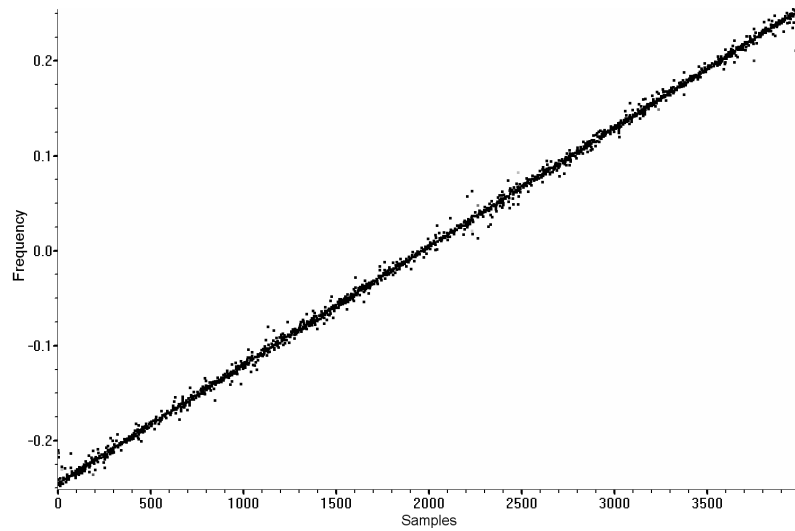
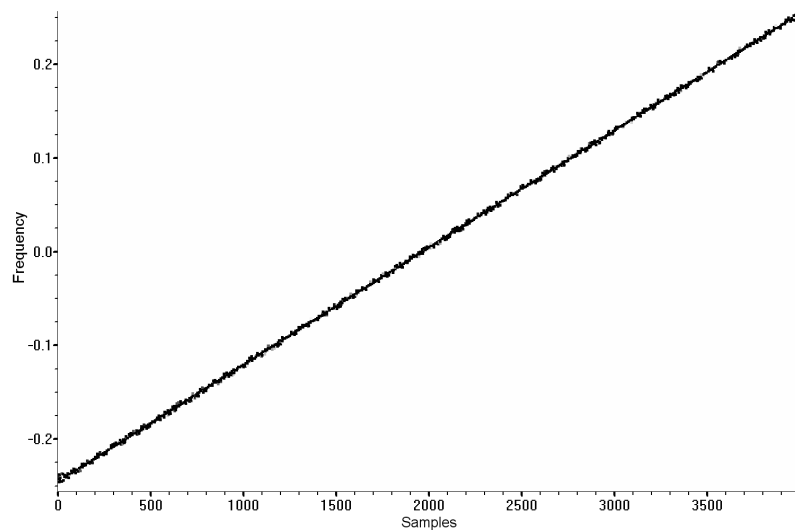
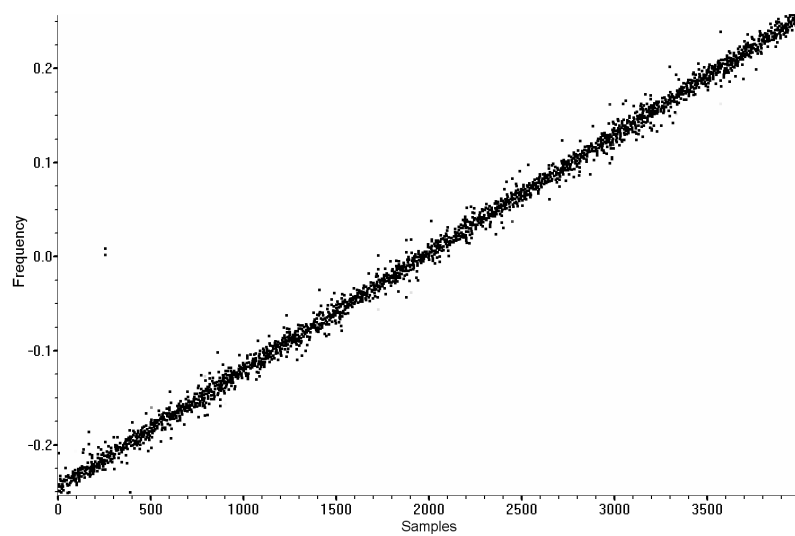
$$s[n] = \exp(j \cdot 2\pi \cdot (-0.25 \cdot n + 0.0000625 \cdot n^2)) + \eta[n], \quad (2.8)$$

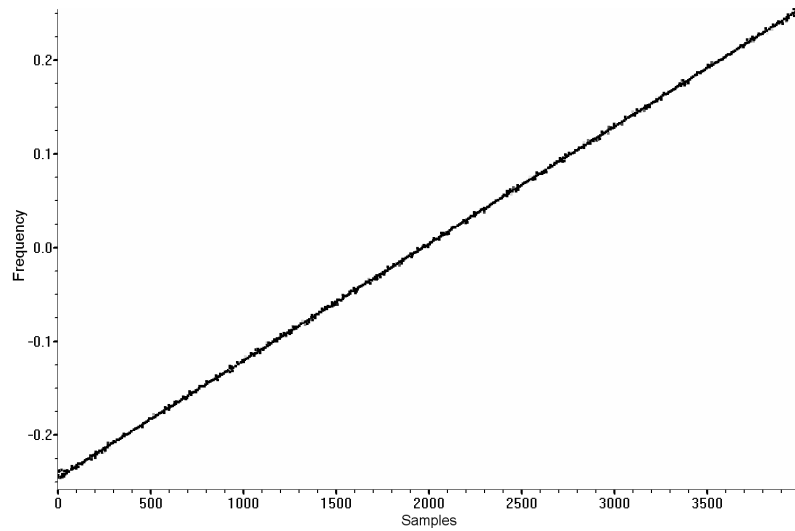
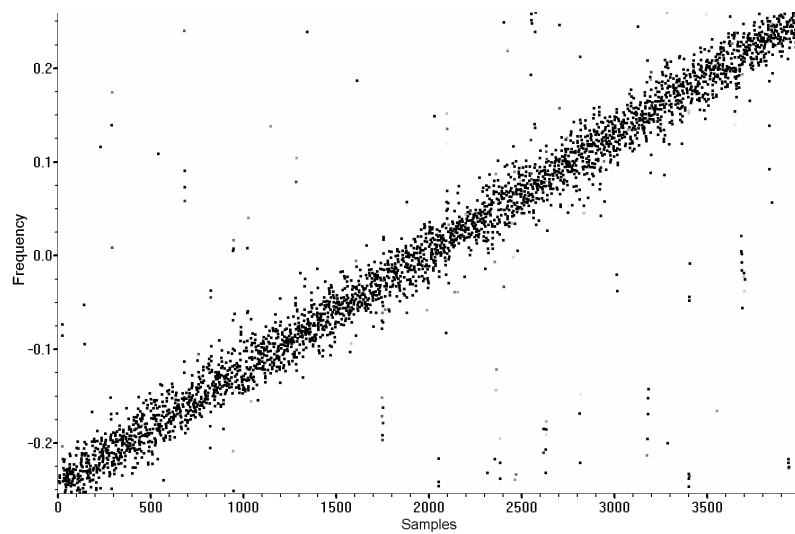
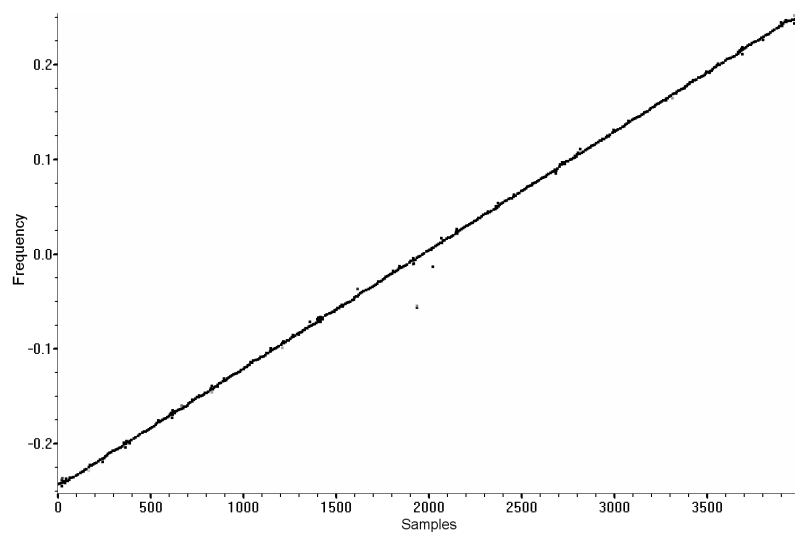
цифровая частота которого меняется по линейному закону от  $-0.25$  до  $0.25$  за 4000 отсчетов.

На рис. 2.3 – 2.8 представлены ЧВРЭ, вычисленные методом ОМПО в скользящем окне с количеством поисковых параметров  $p = 1$ , различными размерами окон ( $N_{win}$ ) и для сигналов с различными отношениями сигнал/шум (ОСШ).

Сравнивая ЧВРЭ представленные на рисунках, можно сделать выводы, что точность оценки частот:

- уменьшается с увеличением ОСШ;
- не зависит от мгновенной частоты анализируемого ЛЧМ сигнала;
- возрастает при увеличении размера окна;
- уменьшается при анализе начального и конечного участков сигнала, что связано с перекрытием скользящего окна и края сигнала.

Рис. 2.3. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 10$ ) сигнала (2.8) с ОСШ=20 дБ,Рис. 2.4. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 100$ ) сигнала (2.8) с ОСШ=20 дБ,Рис. 2.5. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 10$ ) сигнала (2.8) с ОСШ=10 дБ,

Рис. 2.6. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 100$ ) сигнала (2.8) с ОСШ=10 дБ,Рис. 2.7. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 10$ ) сигнала (2.8) с ОСШ=0 дБ,Рис. 2.8. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 100$ ) сигнала (2.8) с ОСШ=0 дБ,

Такие же выводы можно сделать, построив распределения плотности вероятности (РПВ) ошибок оценки частоты (ООЧ).

Для этого каждый сигнал с аддитивным шумом генерировался 10000 раз. Генерация сигнала с последующей обработкой проводилась автоматически с записью результатов (частот основной ЧМ компоненты) в файл, которые в дальнейшем были подвергнуты статистической обработке.

На рис. 2.9 а, б представлены РПВ, вычисленные для моментов времени соответствующих 2000 и 3000 отсчетам ЧВРЭ ( $N_{win} = 25$ , ОСШ=0 дБ), где мгновенная частота компоненты сигнала равна 0 и 0.125 соответственно. Распределение соответствует гауссову (на рисунках изображено черным цве-

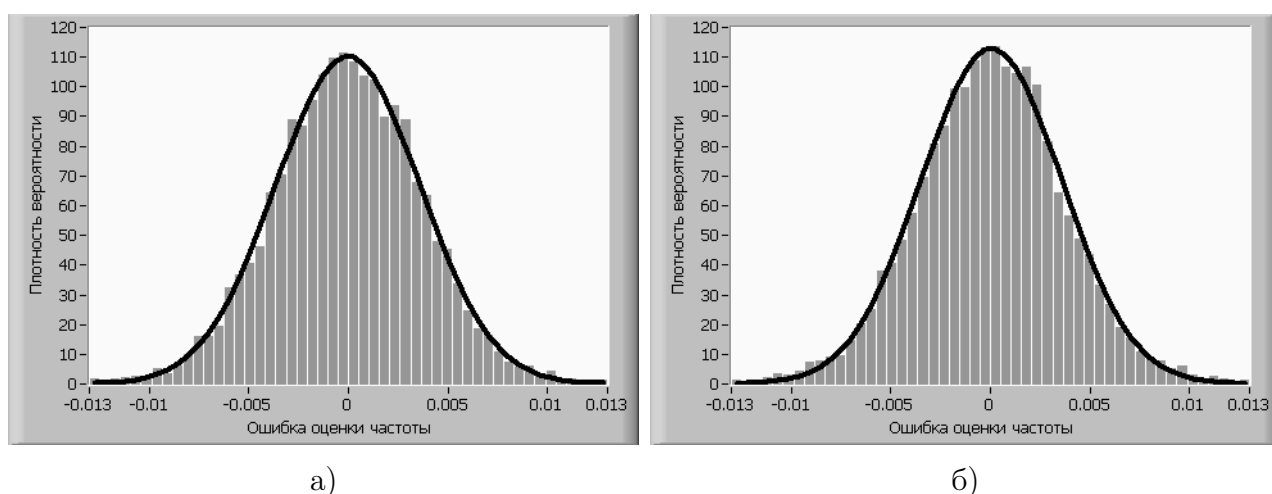


Рис. 2.9. Распределение плотности вероятности ошибки оценки частот основной компоненты, вычисленные для моментов времени соответствующих 2000 (слева) и 3000 (справа) отсчетам ЧВРЭ ( $N_{win} = 25$ , ОСШ=0 дБ)

том) с вероятностью, превышающей 95% по критерию  $\chi^2$  [132,133]. Несмотря на большую разницу оцениваемых частот, среднее значение ошибок оценки не превышает  $10^{-5}$ , стандартные отклонения отличаются друг от друга менее 0.5%.

На рис. 2.10 – 2.12 представлены РПВ ООЧ в ЧВРЭ, вычисленные с различными размерами окон ( $N_{win}$ ), и для сигналов с различными ОСШ, которые подтверждают вывод об уменьшении ошибки при увеличении размера окна для данного сигнала.

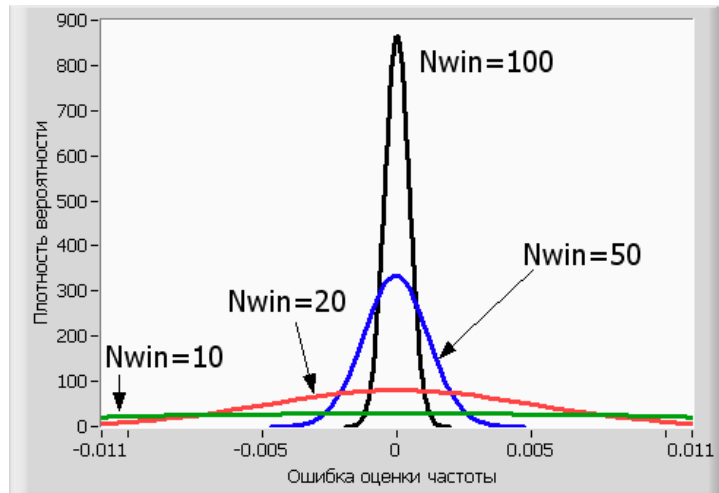


Рис. 2.10. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот в ЧВРЭ для сигнала (2.8) с ОСШ=0 дБ с различными размерами окон

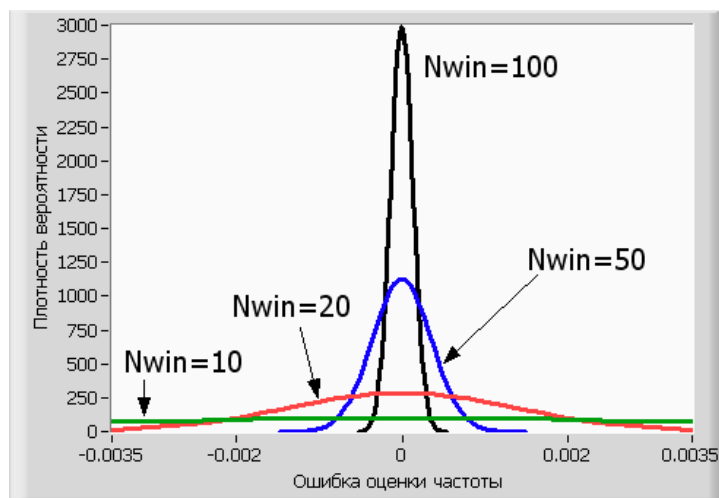


Рис. 2.11. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот в ЧВРЭ для сигнала (2.8) с ОСШ=10 дБ с различными размерами окон

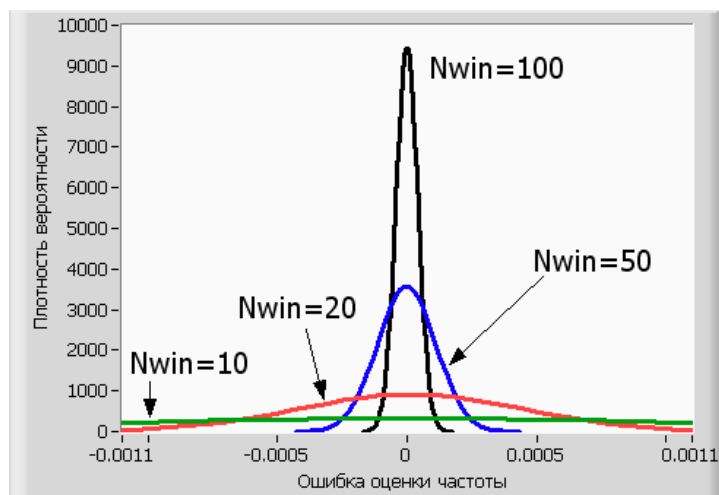


Рис. 2.12. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот в ЧВРЭ для сигнала (2.8) с ОСШ=20 дБ с различными размерами окон

На рис. 2.13 представлена зависимость стандартного отклонения ошибки оценки частоты от размера окна и от ОСШ. Графики с высокой точностью аппроксимируются значениями  $\sigma_f$  вычисленными из выражения:

$$\sigma_f^2 = \frac{6}{(2\pi)^2 \nu N_{win} (N_{win}^2 - 1)} \quad (2.9)$$

(графики  $\sigma_f$  изображены пунктирной линией), которое соответствует нижней границе дисперсии (критерий Крамера-Рао) оценки частоты для комплексной синусоиды с неизвестными частотами, амплитудами и фазами [94, с. 57, с 542]. Здесь  $\nu = A^2/\sigma^2$  – отношение сигнал/шум,  $A$  – амплитуда сигнала,  $\sigma^2$  – дисперсия шума.

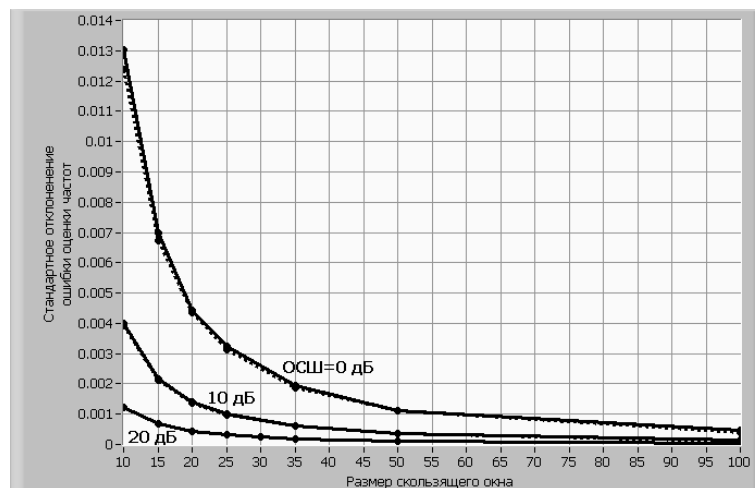


Рис. 2.13. Зависимости стандартного отклонения ошибки оценки частоты от размера окна и от ОСШ для сигнала (2.8)

Исследуем работоспособность алгоритма при анализе ЛЧМ сигналов с более высокой скоростью изменения мгновенной частоты. Для этого будем анализировать сигнал:

$$s[n] = \exp(j \cdot 2\pi \cdot (-0.25 \cdot n + 0.000625 \cdot n^2)) + \eta[n], \quad (2.10)$$

цифровая частота которого меняется по линейному закону от  $-0.25$  до  $0.25$  за 400 отсчетов.

На рис. 2.14 – 2.22 представлены ЧВРЭ заданного сигнала, вычисленные методом ОМПО с количеством поисковых параметров  $p = 1$ , различными размерами окон ( $N_{win}$ ) и для сигналов с различными ОСШ.



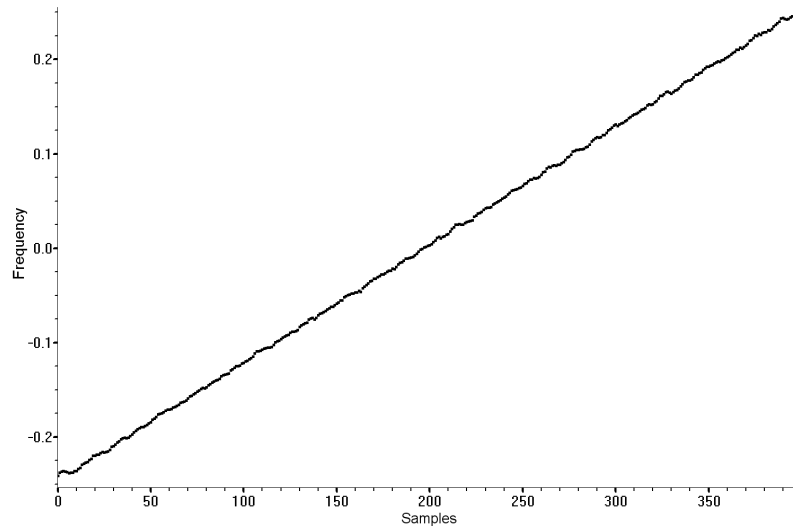


Рис. 2.14. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 10$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=20 дБ,

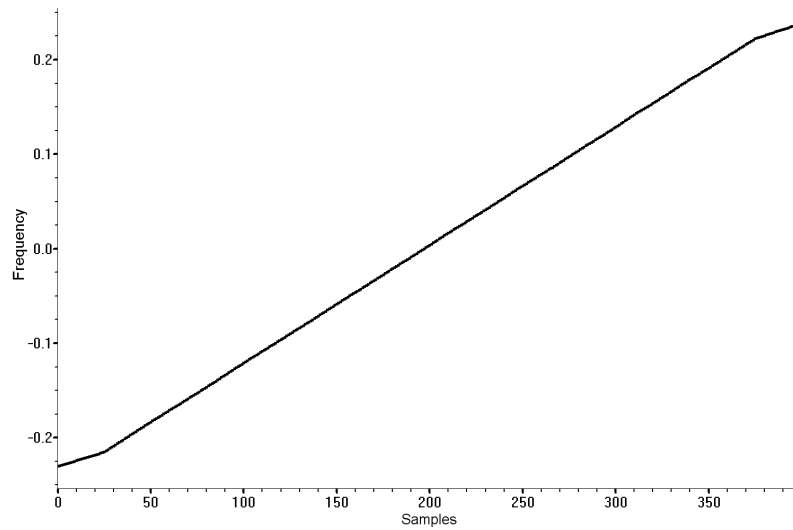


Рис. 2.15. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 50$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=20 дБ,

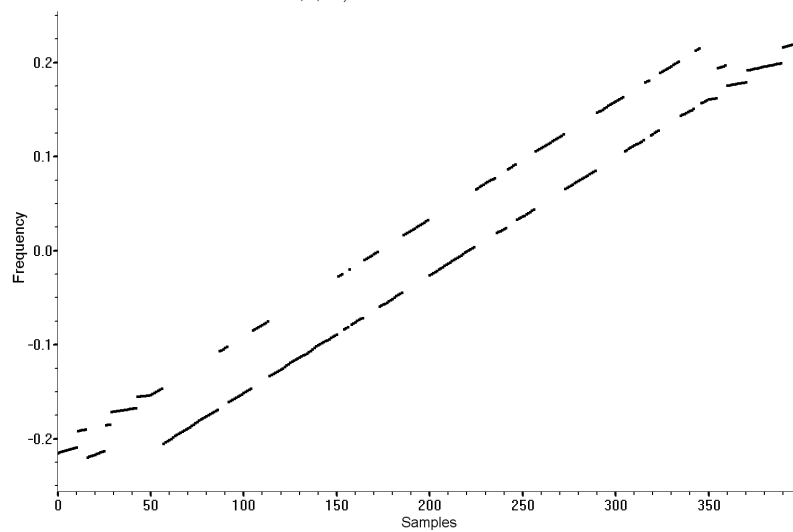


Рис. 2.16. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 100$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=20 дБ,

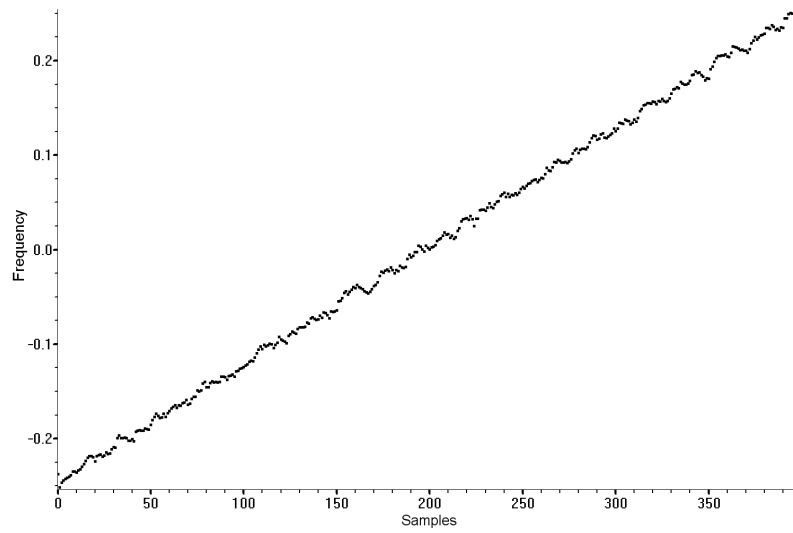


Рис. 2.17. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 10$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=10 дБ,

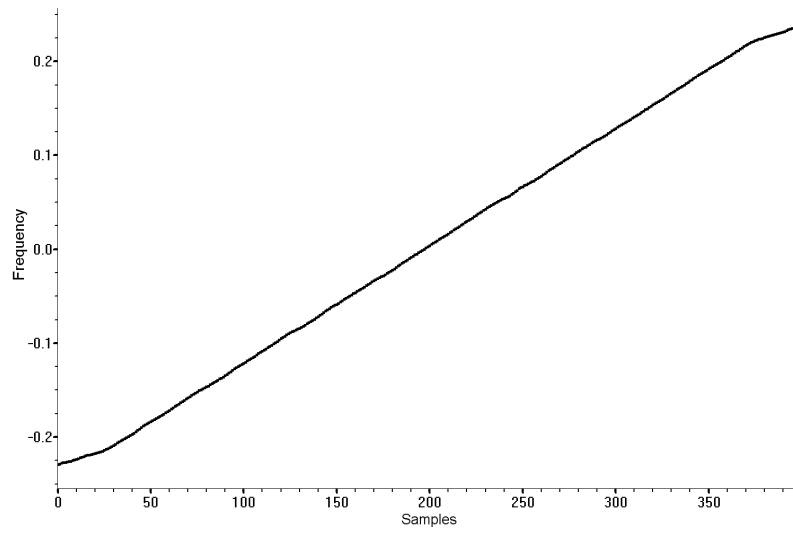


Рис. 2.18. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 50$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=10 дБ,

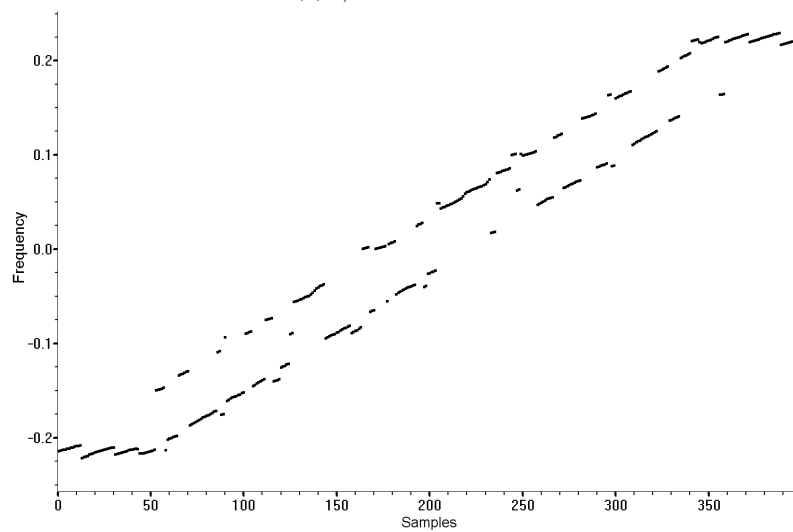


Рис. 2.19. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 100$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=10 дБ,

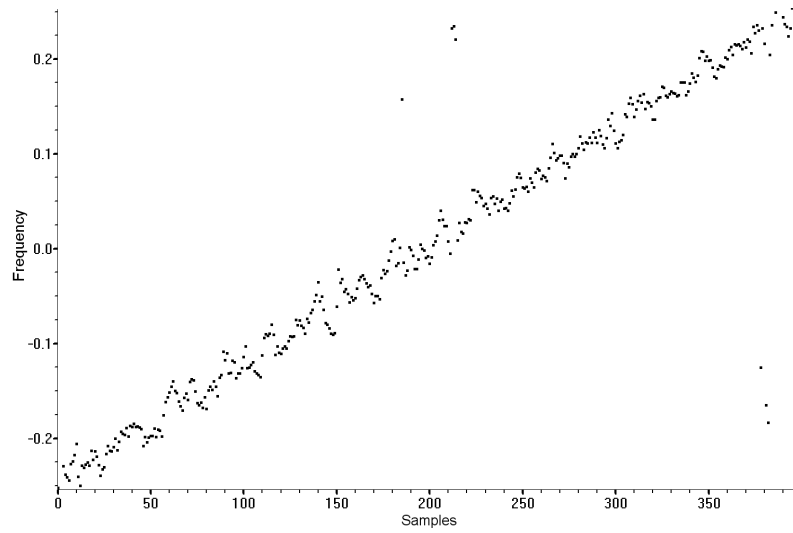


Рис. 2.20. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 10$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=0 дБ,

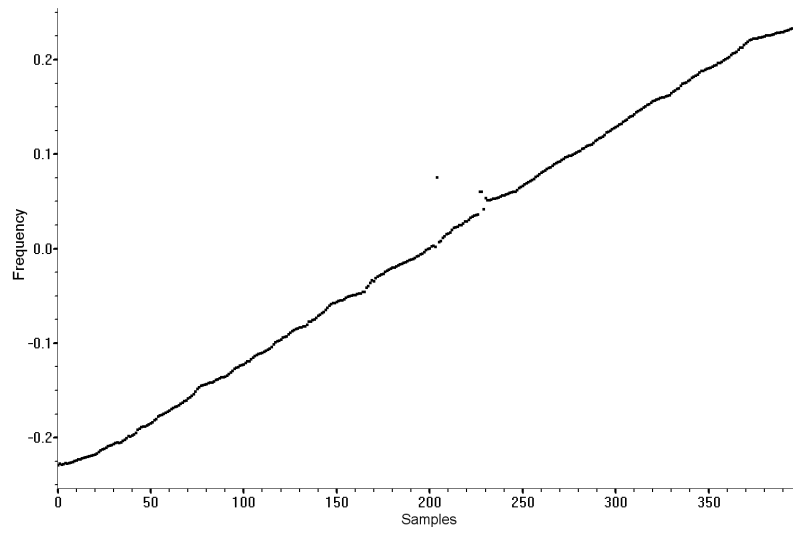


Рис. 2.21. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 50$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=0 дБ,

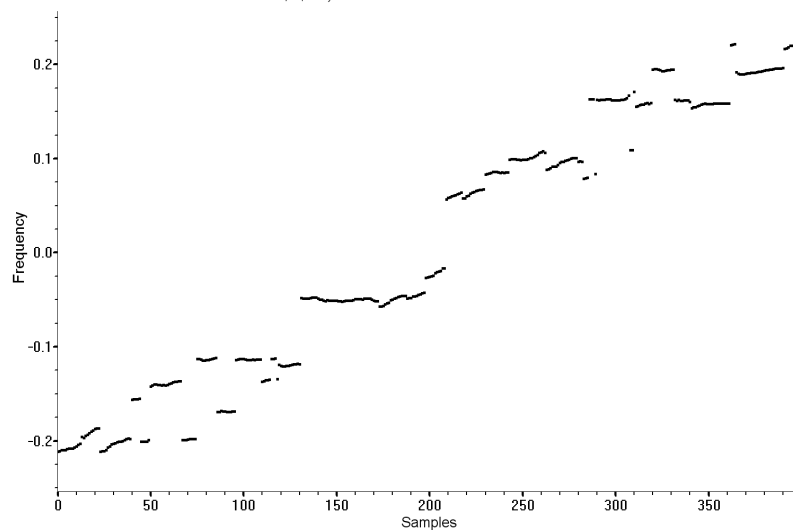


Рис. 2.22. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 100$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=0 дБ,

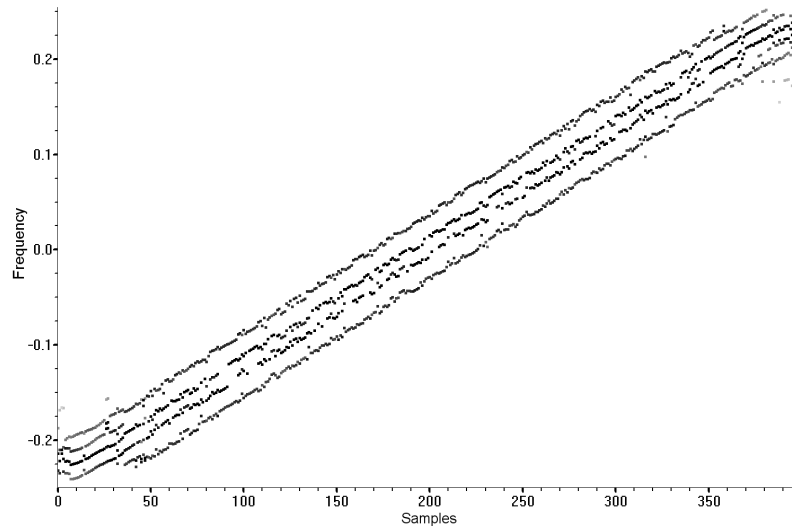


Рис. 2.23. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 100$ ,  $p = 5$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=20 дБ,

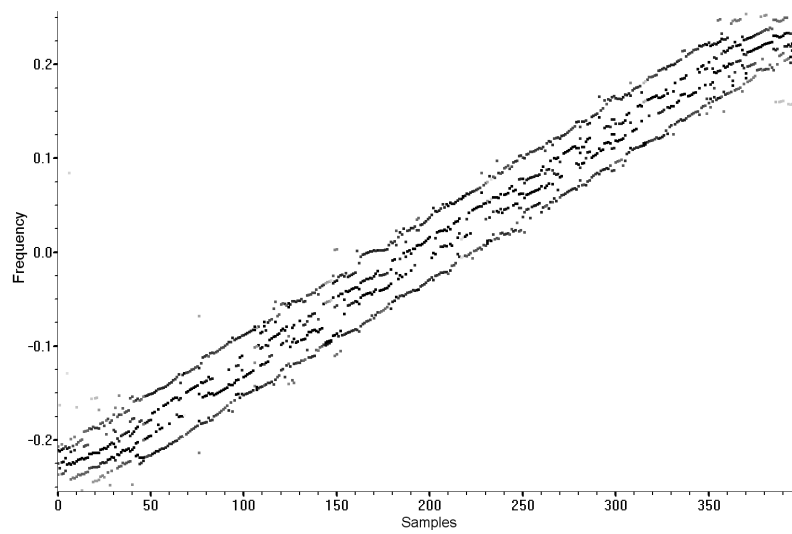


Рис. 2.24. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 100$ ,  $p = 5$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=10 дБ,

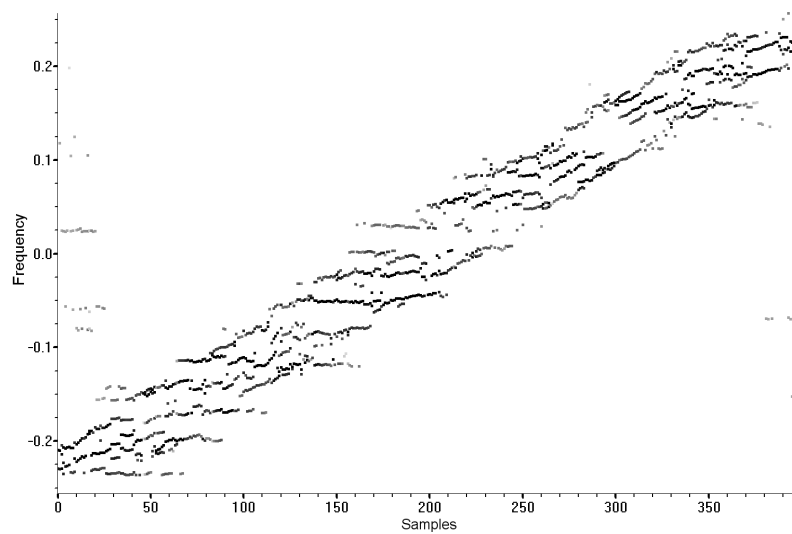


Рис. 2.25. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 100$ ,  $p = 5$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=0 дБ,

Сравнивая полученные частотно-временные распределения с распределениями, представленными на (рис. 2.3 – 2.8), можно сделать выводы, что при анализе ЛЧМ сигнала с высокой скоростью изменения частоты, увеличение размера окна может привести к снижению точности оценки частоты (рис. 2.4, 2.6, 2.8). Увеличение числа параметров  $p$  экспоненциальной модели (2.3) не помогает увеличить точность при больших размерах окон (рис. 2.23 – 2.25).

На рис. 2.26 – 2.32 представлены распределения плотности вероятности оценки мгновенной частоты полученные для ЧВРЭ, вычисленной с различными размерами окон и для сигналов с различными ОСШ.

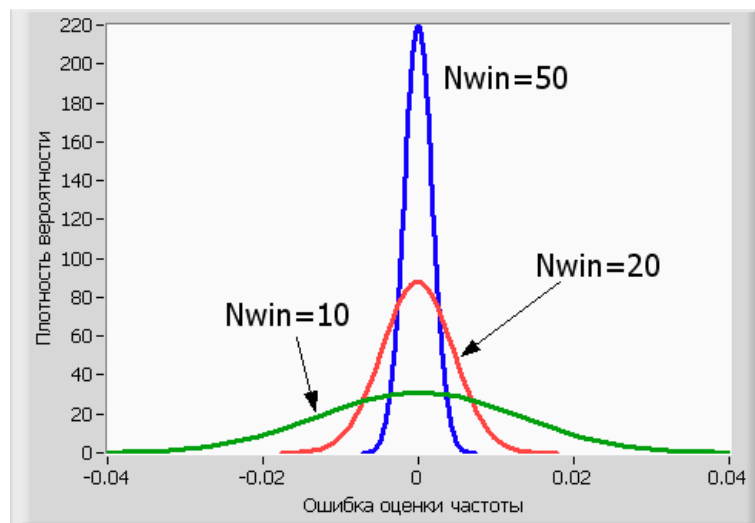


Рис. 2.26. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот в ЧВРЭ для сигнала (2.10) с ОСШ=0 дБ с различными размерами окон

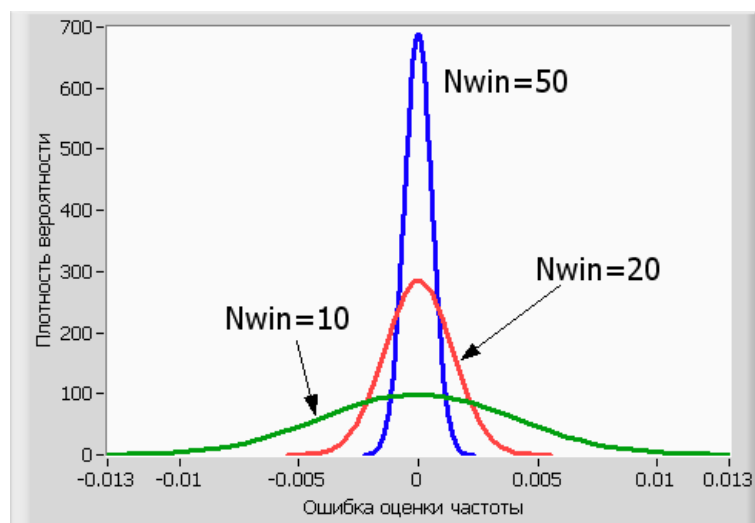


Рис. 2.27. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот в ЧВРЭ для сигнала (2.10) с ОСШ=10 дБ с различными размерами окон

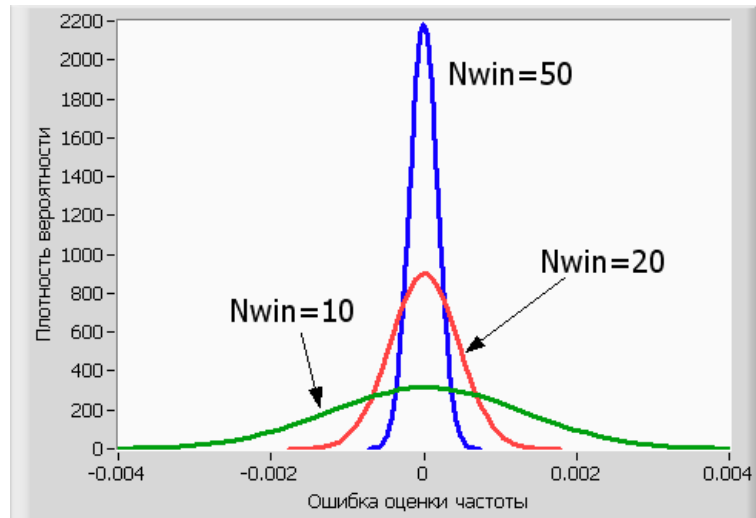


Рис. 2.28. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот в ЧВРЭ для сигнала (2.10) с ОСШ=20 дБ с различными размерами окон

Если размер окна не превышает 50 отсчетов, то плотности вероятности ошибок оценки частоты имеют гауссово распределение с вероятностью более 95% по критерию  $\chi^2$  [132, 133] (чем больше размер окна, тем меньше стандартное отклонение РПВ (рис. 2.26 – 2.28)). При дальнейшем увеличении окна происходит расщепление распределения (рис. 2.29 – 2.31) из-за которого точность оценки частот становится значительно меньше. С увеличением количества поисковых параметров точность не увеличивается (рис. 2.32).

На рис. 2.33 представлена зависимость стандартного отклонения ООЧ от размера окна и от ОСШ для сигнала (2.10).

Из графиков видно, что при малых размерах окна (до 35 отсчетов) точность оценки соизмерима с потенциальной, полученной из выражения (2.9)

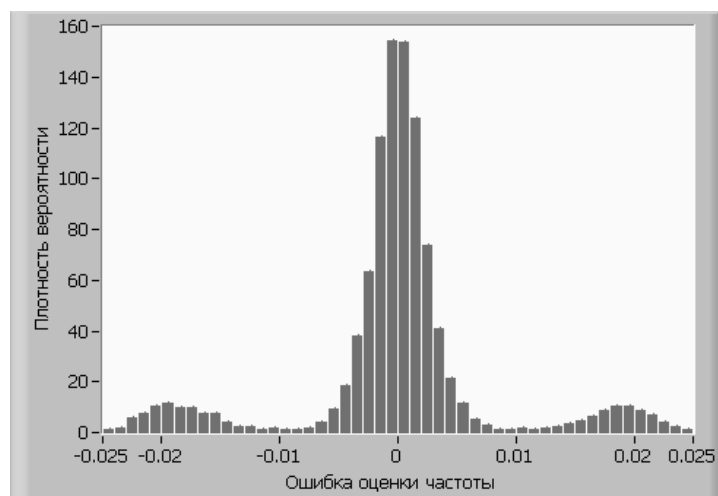


Рис. 2.29. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот в ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 55, p = 1$ ) для сигнала (2.10) с ОСШ=0 дБ

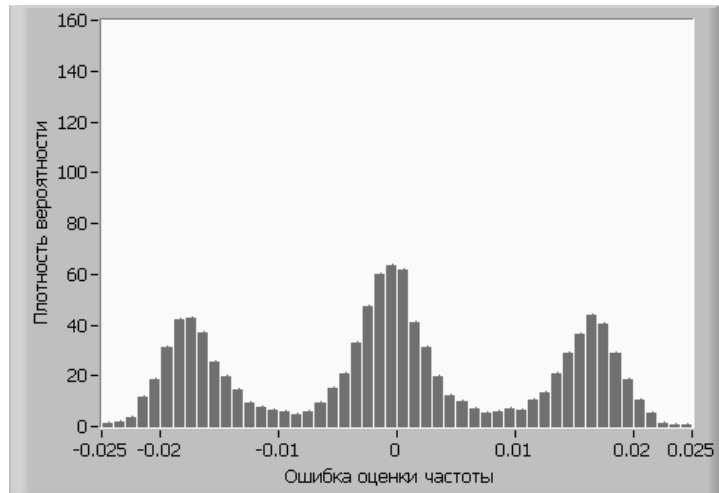


Рис. 2.30. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот в ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 60, p = 1$ ) для сигнала (2.10) с ОСШ=0 дБ

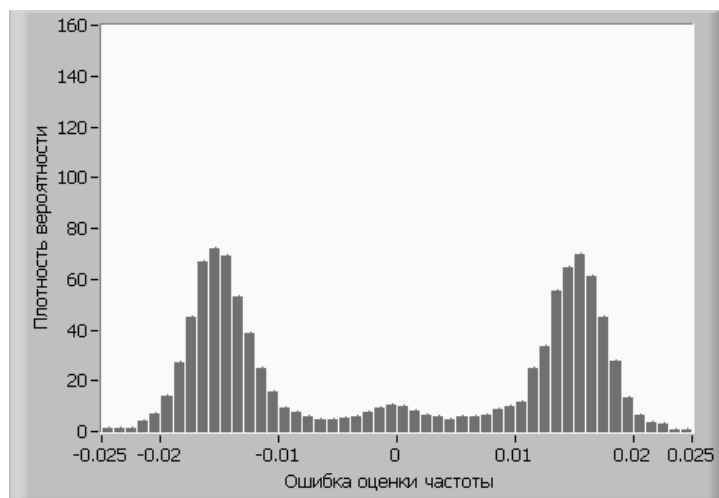


Рис. 2.31. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот в ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 65, p = 1$ ) для сигнала (2.10) с ОСШ=0 дБ

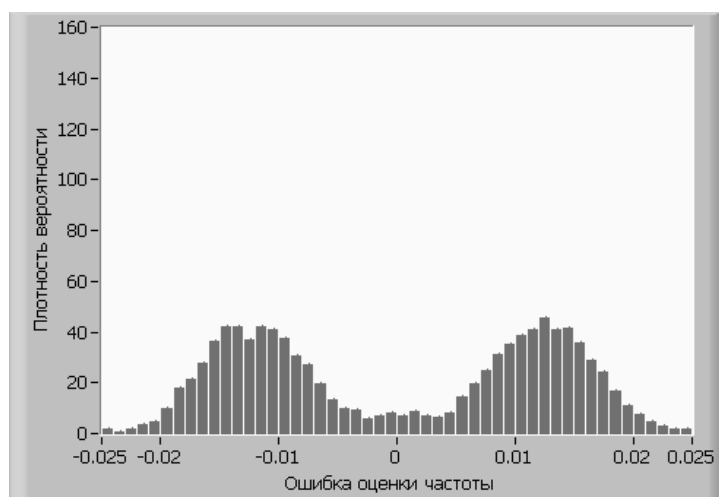


Рис. 2.32. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот в ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 65, p = 5$ ) для сигнала (2.10) с ОСШ=0 дБ

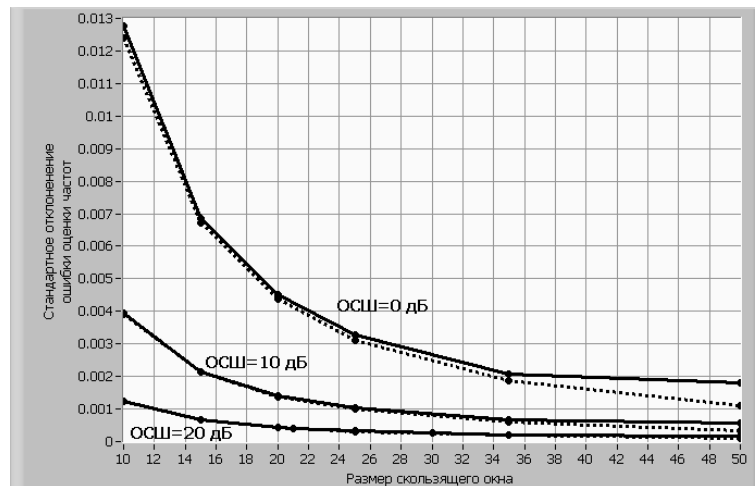


Рис. 2.33. Зависимости стандартного отклонения ошибки оценки частоты от размера окна и от ОСШ для сигнала (2.10)

(на графике изображена пунктиром). При увеличении размера окна до 50 отсчетов точность оценки увеличивается меньше, по сравнению с потенциальной. При дальнейшем увеличении окна распределение перестает быть гауссовым.

Следует отметить, что оценка частоты ЛЧМ сигнала получается несмещенной.

На рис. 2.34 представлены РПВООЧ для ЧВРЭ, вычисленных для сигнала (2.10) с ОСШ=0 дБ различными методами в скользящем окне размером 25 отсчетов:

1. ОМПО (количество поисковых параметров  $p = 1$ );
2. MUSIC [24] (размерность ковариационной матрицы равна 10, размерность сигнального подпространства равно 1);
3. модифицированным МНК Прони [24, 134] (количество комплексных экспонент в модели Прони равно 10).

Из сравнения кривых следует, что описанный в данном разделе метод имеет наилучшую оценку (по сравнению с методами MUSIC и Прони) при анализе ЛЧМ сигналов с низким отношением сигнал/шум. В МНК Прони оценка частоты получилась смещенной на  $-0.0023$ .

Исследуем работоспособность алгоритма при анализе сигналов, частота которых описывается полиномом второго порядка. Для этого будем анализи-



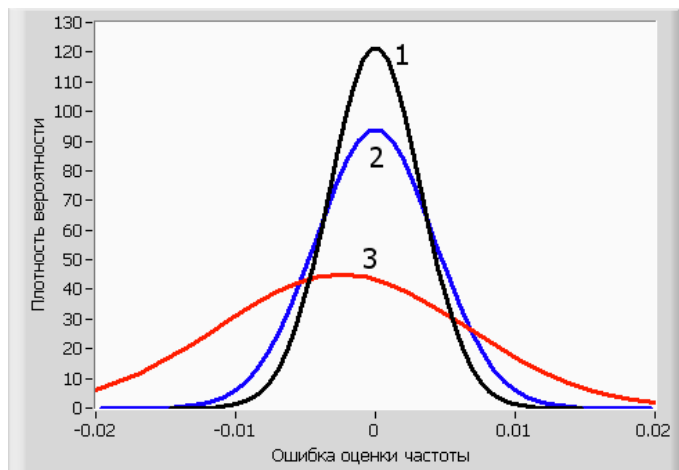


Рис. 2.34. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот в ЧВРЭ ( $N_{win} = 25$ ), вычисленном методами ОМПО (1), MUSIC (2), МНК Прони (3) для сигнала (2.10) с ОСШ=0 дБ

ровать сигнал:

$$s[n] = \exp(j \cdot 2\pi \cdot (0.2 \cdot n - 0.002 \cdot n^2 + \frac{1}{300000} \cdot n^3)) + \eta[n], \quad (2.11)$$

цифровая частота которого меняется по параболе от 0.2 до -0.2 и обратно за 400 отсчетов.

На рис. 2.35 – 2.40 представлены ЧВРЭ заданного сигнала, вычисленные ОМПО с количеством поисковых параметров  $p = 1$ , различными размерами окон ( $N_{win}$ ) и для сигналов с различными ОСШ.

Сравнивая полученные для сигнала (2.11) частотно-временные распределения, можно сделать вывод, что при увеличении размера окна с 10 до 30

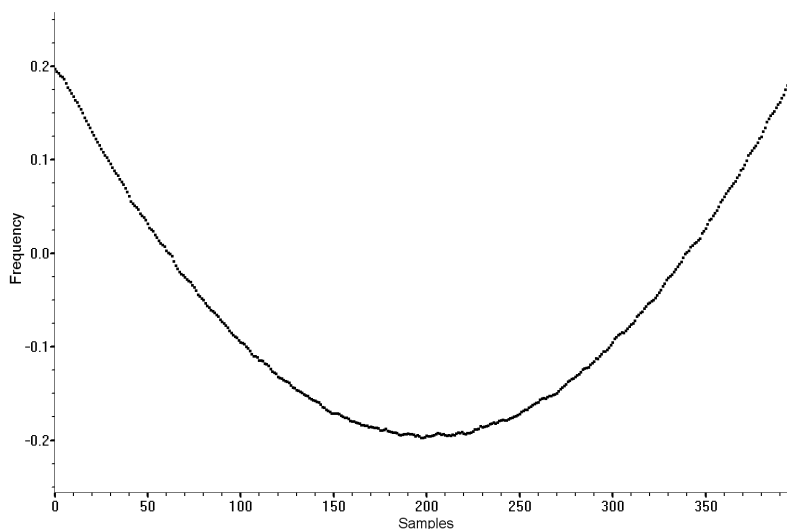


Рис. 2.35. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 10$ ) сигнала (2.11) с ОСШ=20 дБ,

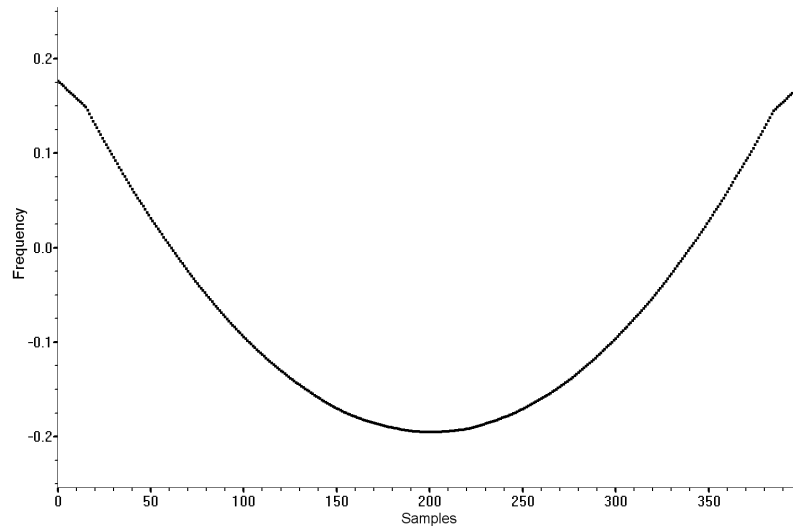


Рис. 2.36. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 30$ ) сигнала (2.11) с ОСШ=20 дБ,

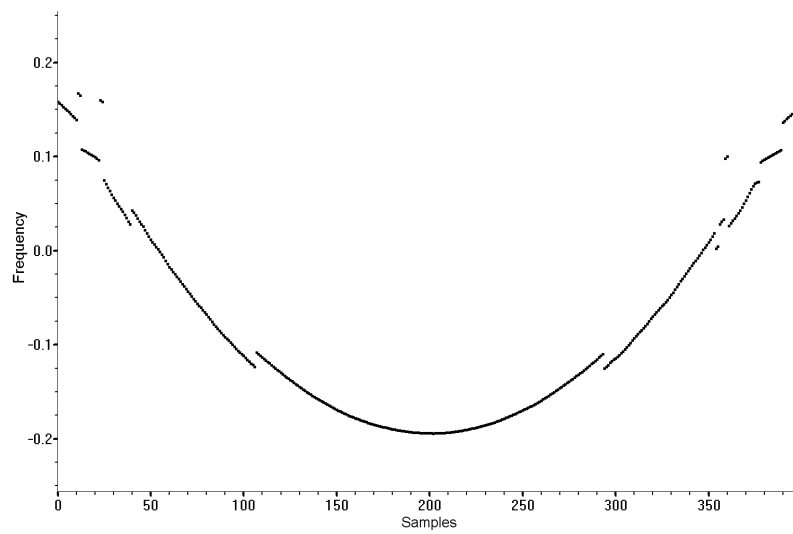


Рис. 2.37. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 50$ ) сигнала (2.11) с ОСШ=20 дБ,

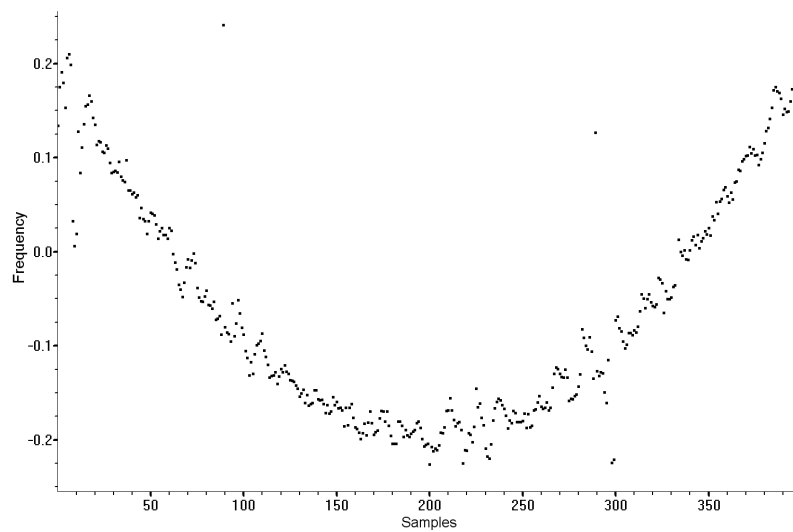


Рис. 2.38. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 10$ ) сигнала (2.11) с ОСШ=0 дБ,

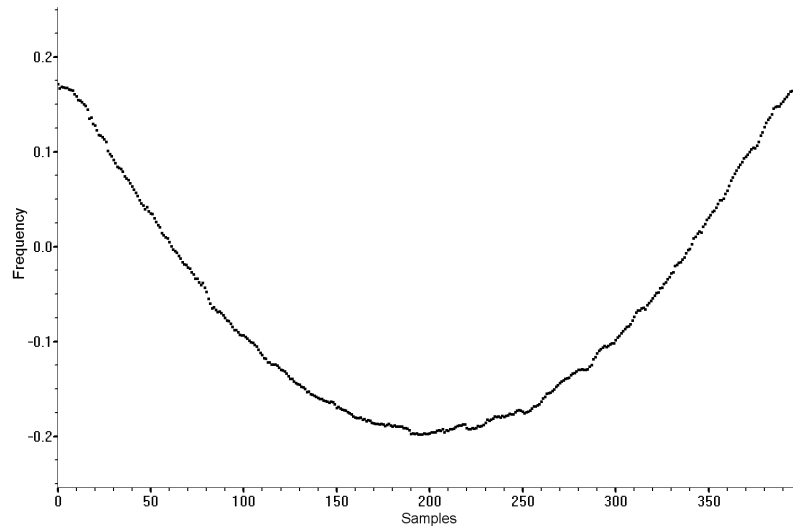


Рис. 2.39. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 30$ ) сигнала (2.11) с ОСШ=0 дБ,

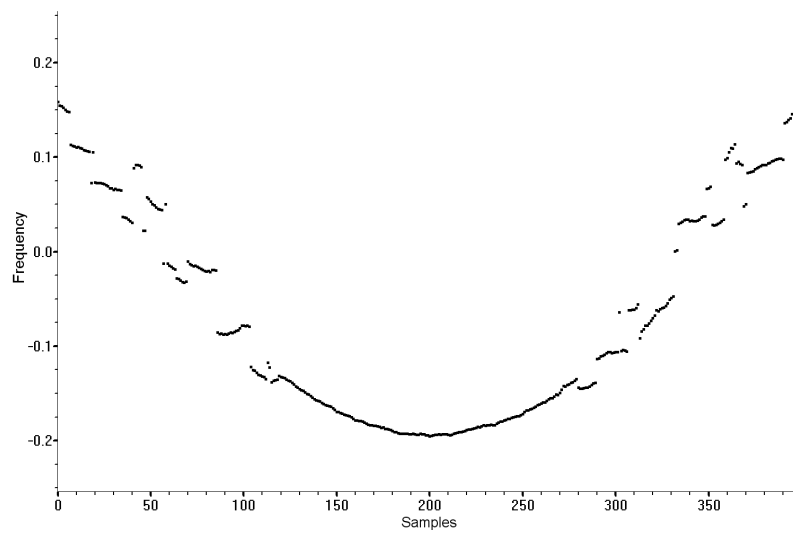


Рис. 2.40. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 50$ ) сигнала (2.11) с ОСШ=0 дБ,

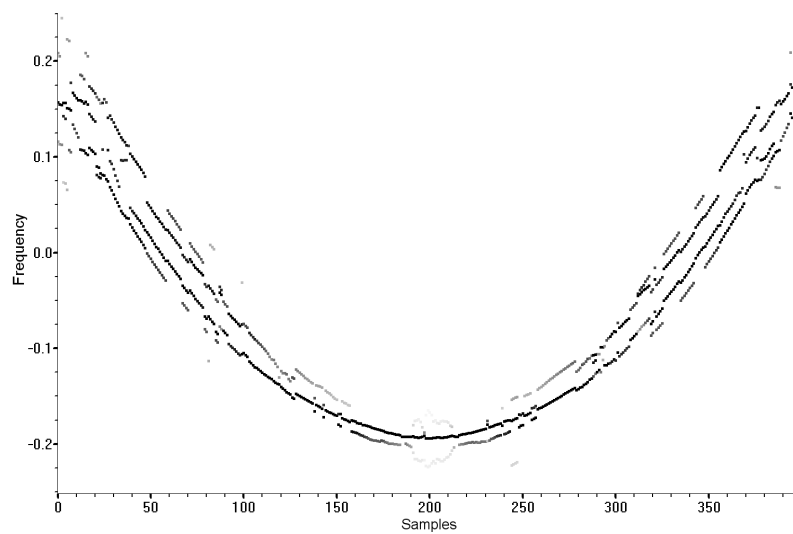


Рис. 2.41. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 50, p = 3$ ) сигнала (2.11) с ОСШ=20 дБ,

отсчетов, точность оценки частоты становится выше, а при увеличении размера окна до 50 отсчетов, на участках с высокой скоростью изменения частоты в ЧМ компоненте, появляются ложные разрывы, увеличивающие ошибку оценки частоты. Увеличение числа параметров  $p$  экспоненциальной модели (2.3) не помогает увеличить точность при больших размерах окон (рис. 2.41).

Проверим, как на точность оценки частоты влияет расположение окна в сигнале.

На рис. 2.42 а, б представлены РПВООЧ, вычисленные для моментов времени соответствующих 50 и 200 отсчетам ЧВРЭ ( $N_{win} = 30$ , ОСШ=20 дБ), из которых качественно можно видеть, что расположение окна влияет на стандартное отклонение распределения, дополнительно к этому, оценка получилась смещенной, причем смещение тоже зависит от расположения окна. Распределения соответствуют гауссову (на рисунках изображено черным цветом) с вероятностью превышающей 95% по критерию  $\chi^2$  [132, 133].

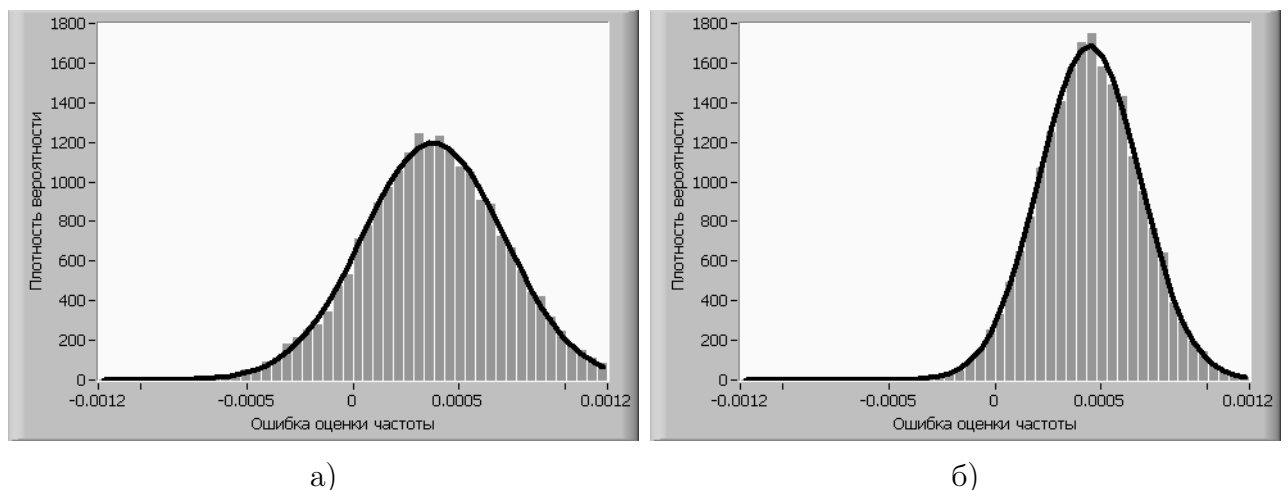


Рис. 2.42. РПВООЧ основной компоненты сигнала (2.11) (ОСШ=20 дБ), вычисленные для моментов времени соответствующих 50 (слева) и 200 (справа) отсчетам ЧВРЭ ( $N_{win} = 30$ )

На рис. 2.43 представлены зависимости смещения оценки мгновенной частоты от размера окна и от положения окна в сигнале ( $n$  – номер отсчета анализируемого сигнала, соответствующий центру окна). Смещения оценки мгновенной частоты не зависят от ОСШ.

Для сравнения на рис. 2.44 приведена такая же зависимость для сигнала:

$$s[n] = \exp(j \cdot 2\pi \cdot (0.2 \cdot n - 0.001 \cdot n^2 + \frac{1}{1200000} \cdot n^3)) + \eta[n], \quad (2.12)$$

цифровая частота которого меняется по параболе от 0.2 до  $-0.2$  и обратно за 800 отсчетов.

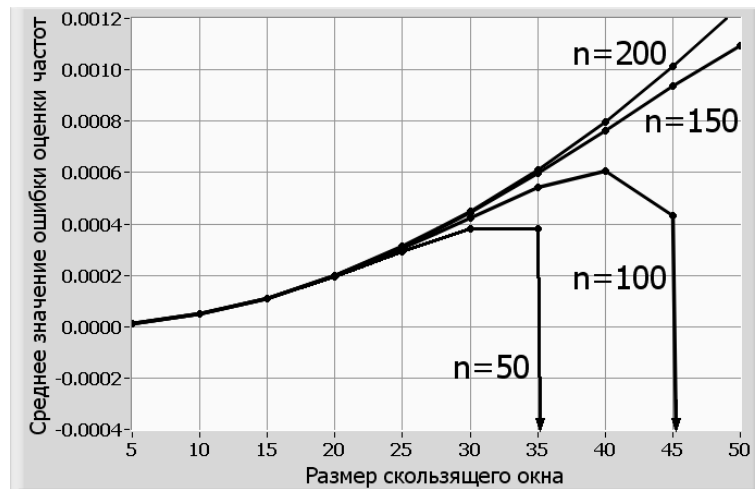


Рис. 2.43. Зависимости смещения оценки мгновенной частоты от размера окна для сигнала (2.11),  $n$  – номер отсчета сигнала, соответствующего центру скользящего окна

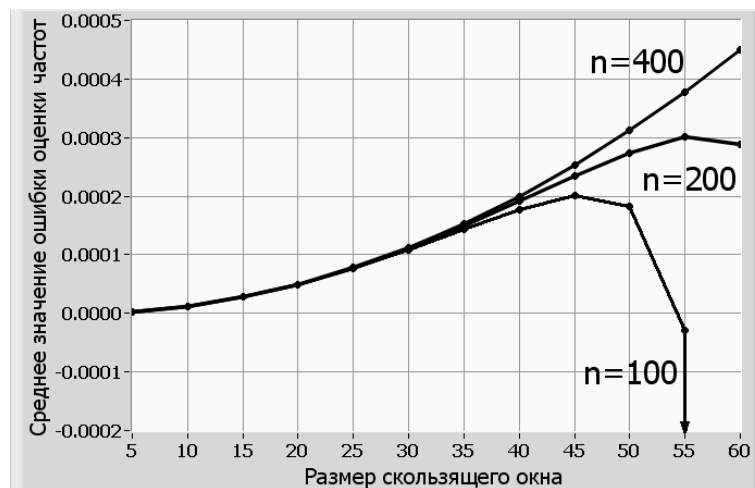


Рис. 2.44. Зависимости смещения оценки мгновенной частоты от размера окна для сигнала (2.12),  $n$  – номер отсчета сигнала, соответствующего центру скользящего окна

Кривые соответствующие центральным отсчетам сигналов, когда скорость изменения мгновенной частоты равна нулю ( $n = 200$  – для сигнала (2.11),  $n = 400$  – для сигнала (2.12)) с высокой точностью аппроксимируются (относительная ошибка аппроксимации не превышает  $10^{-4}$ ) выражением:

$$\varepsilon_{sr}[n] = 0.3 \cdot \alpha \cdot N_{win}^2,$$

где  $\alpha$  – коэффициент при  $n^3$  в выражениях (2.11) и (2.12). При перемещении скользящего окна от центра сигнала к краю, смещение ООЧ уменьшается.

Однако возникает риск появления ложного скачка частоты (на графиках кривая движется вертикально вниз), при котором смещение ООЧ увеличивается на 2-3 порядка.

На рис. 2.45 и 2.46 представлены зависимости стандартного отклонения ООЧ от размера и положения окна в сигнале (2.11) с различными ОСШ. На графиках пунктирной кривой отображено минимально возможное стандартное отклонение ООЧ при анализе гармонического экспоненциального сигнала для данного размера окна и ОСШ (2.9).

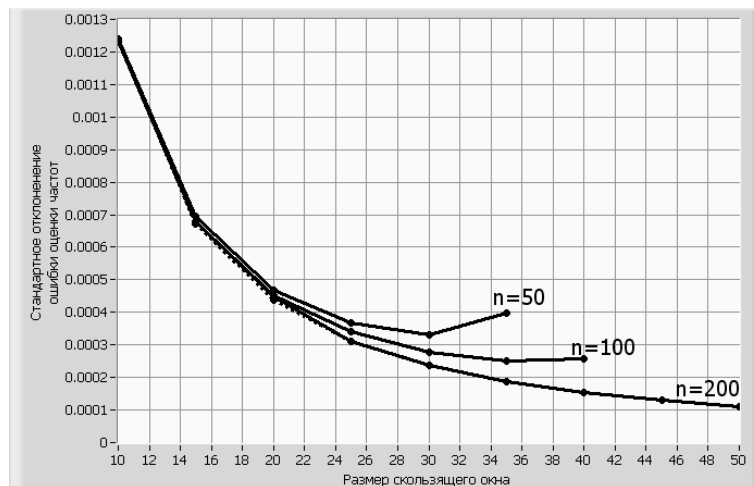


Рис. 2.45. Зависимости стандартного отклонения ошибки оценки частоты от размера и от расположения окна в сигнале (2.11) с ОСШ 20 дБ,  $n$  – номер отсчета сигнала, соответствующего центру скользящего окна

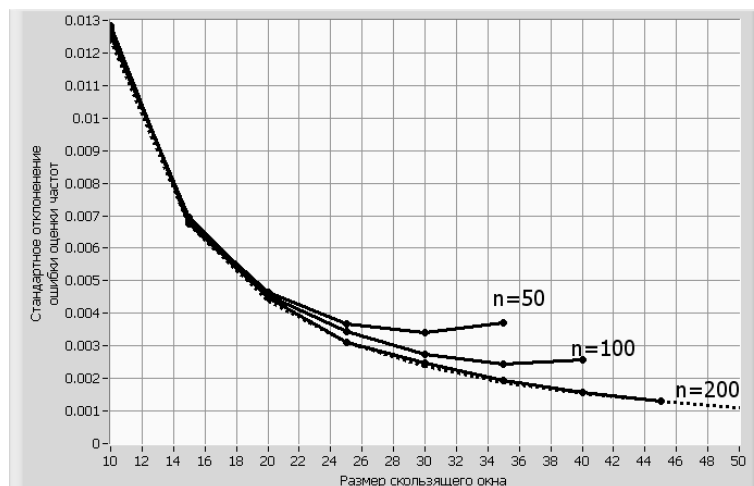


Рис. 2.46. Зависимости стандартного отклонения ошибки оценки частоты от размера и от расположения окна в сигнале (2.11) с ОСШ 0 дБ,  $n$  – номер отсчета сигнала, соответствующего центру скользящего окна

На рисунках видно, что при малых размерах окна (до 35 отсчетов) точность оценки соизмерима с потенциальной. Кривые соответствующие цен-

тральным отсчетам сигналов, когда скорость изменения мгновенной частоты равна нулю ( $n = 200$  – для сигнала (2.11),  $n = 400$  – для сигнала (2.12)), почти полностью совпадают с пунктирной кривой. С увеличением размера окна стандартное отклонение РПВООЧ уменьшается, но возникает риск появления ложного скачка частоты, при котором РПВ перестает быть гауссовым.

### 2.3.3. Влияние узкополосной помехи на точность измерений

В качестве примера рассмотрим результаты анализа сигнала, представленного выражением:

$$s[n] = \exp(j \cdot 2\pi \cdot (0.2 \cdot n - 0.001 \cdot n^2 + \frac{1}{1200000} \cdot n^3)) + 0.5 \cdot \exp(j \cdot 2\pi \cdot (-0.05) \cdot n),$$

$$n = 0, 1, \dots, 799,$$
(2.13)

где первая компонента – анализируемая ЧМ компонента сигнала, частота которой меняется по параболе от 0.2 до  $-0.2$  и обратно (аналогично (2.12)), вторую гармоническую компоненту на цифровой частоте  $-0.05$  будем считать узкополосной помехой. Отношение амплитуд равно 2 (отношение энергий примерно равно 6 дБ)

На рис. 2.47 представлено ЧВРЭ полученное с окном  $N_{win} = 10$  и количеством поисковых параметров  $p = 1$ .

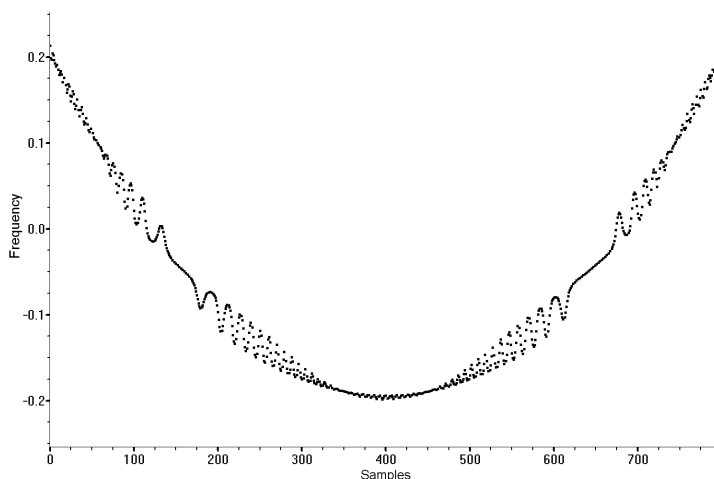


Рис. 2.47. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 10$ ,  $p = 1$ ) сигнала (3.7)

Качественно можно видеть, что узкополосная помеха вызывает ошибки, которые проявляются в виде биений частоты основной ЧМ компоненты, пе-

риод и амплитуда которых увеличиваются, когда разность частот между помехой и анализируемой компонентой уменьшается.

Такое явление можно объяснить, если представить ЧМ сигнал с узкополосной помехой, как сумму двух ЧМ компонент.

$$s(t) = A_1(t) \cdot e^{j\varphi_1(t)} + A_2(t) \cdot e^{j\varphi_2(t)}, \quad (2.14)$$

где  $A_1(t)$  и  $A_2(t)$  – мгновенные значения амплитуд,  $\varphi_1(t)$  и  $\varphi_2(t)$  – мгновенные значения фаз каждой ЧМ компоненты сигнала. Мгновенные значения амплитуды и частоты данного сигнала можно вычислить с помощью формул [26, 135]:

$$A^2(t) = x^2(t) + y^2(t),$$

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{x(t) \cdot \dot{y}(t) - y(t) \cdot \dot{x}(t)}{x^2(t) + y^2(t)},$$

где  $x(t), y(t)$  – реальная мнимая части аналитического сигнала соответственно,  $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$  – их производные по времени. Для выражения (2.14):

$$x(t) = A_1(t) \cdot \cos(\varphi_1(t)) + A_2(t) \cdot \cos(\varphi_2(t)),$$

$$y(t) = A_1(t) \cdot \sin(\varphi_1(t)) + A_2(t) \cdot \sin(\varphi_2(t)),$$

$$\dot{x}(t) = \dot{A}_1(t) \cdot \cos(\varphi_1(t)) - A_1(t) \cdot \dot{\varphi}_1(t) \cdot \sin(\varphi_1(t)) +$$

$$+ \dot{A}_2(t) \cdot \cos(\varphi_2(t)) - A_2(t) \cdot \dot{\varphi}_2(t) \cdot \sin(\varphi_2(t)),$$

$$\dot{y}(t) = \dot{A}_1(t) \cdot \sin(\varphi_1(t)) + A_1(t) \cdot \dot{\varphi}_1(t) \cdot \cos(\varphi_1(t)) +$$

$$+ \dot{A}_2(t) \cdot \sin(\varphi_2(t)) + A_2(t) \cdot \dot{\varphi}_2(t) \cdot \cos(\varphi_2(t)).$$

Проделав несложные математические преобразования, получим следующие формулы:

$$\dot{\varphi}(t) = \frac{\dot{\varphi}_1(t) + \dot{\varphi}_2(t)}{2} + \frac{A_2^2(t) - A_1^2(t)}{A^2(t)} \cdot \frac{\dot{\varphi}_1(t) - \dot{\varphi}_2(t)}{2} +$$

$$+ \frac{A_1(t) \cdot \dot{A}_2(t) - A_2(t) \cdot \dot{A}_1(t)}{A^2(t)} \cdot \sin(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)), \quad (2.15)$$



где

$$A^2(t) = A_1^2(t) + A_2^2(t) + 2A_1(t)A_2(t) \cdot \cos(\varphi_2(t) - \varphi_1(t))$$

На рис. 2.48 представлено ЧВРЭ сигнала (3.7), вычисленное данным способом, на котором также видны биения.

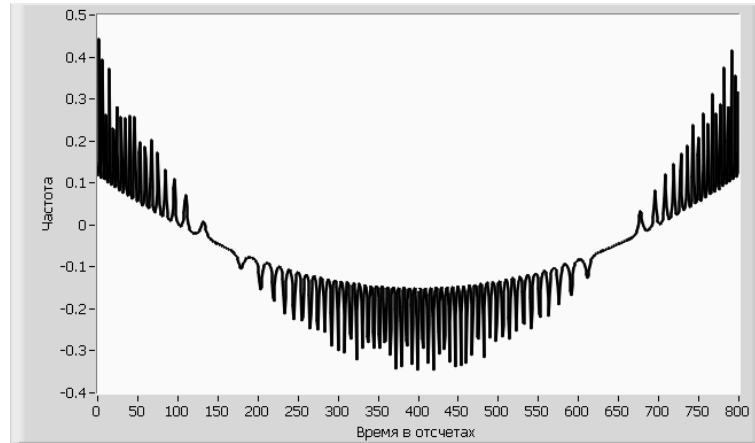


Рис. 2.48. ЧВРЭ сигнала (3.7), вычисленное по формуле (2.15)

Уменьшить ошибку можно, если увеличить размер окна (рис. 2.49) или количество поисковых параметров  $p$  (рис. 2.50). Наилучшие результаты получаются при одновременном увеличении  $N_{win}$  и  $p$  (рис. 2.51). Дальнейшее увеличение размера окна не приводит к большей точности, т.к. возникают ложные скачки частоты, аналогичные рис. 2.37, 2.40, 2.41.

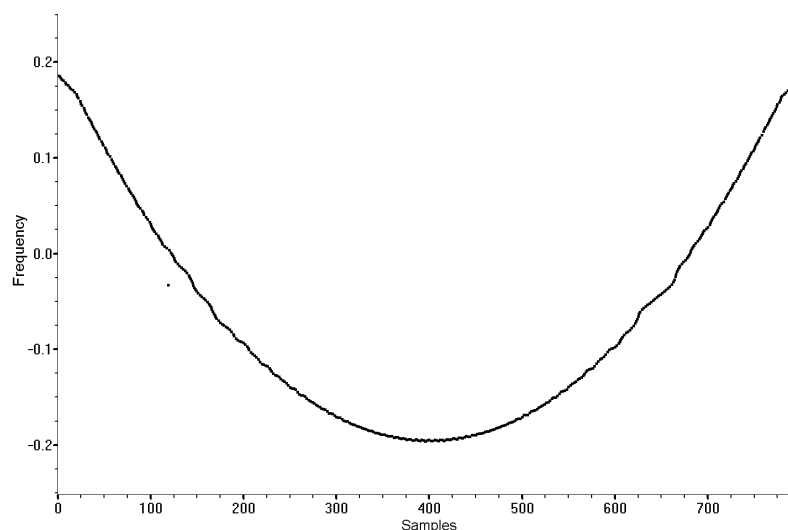
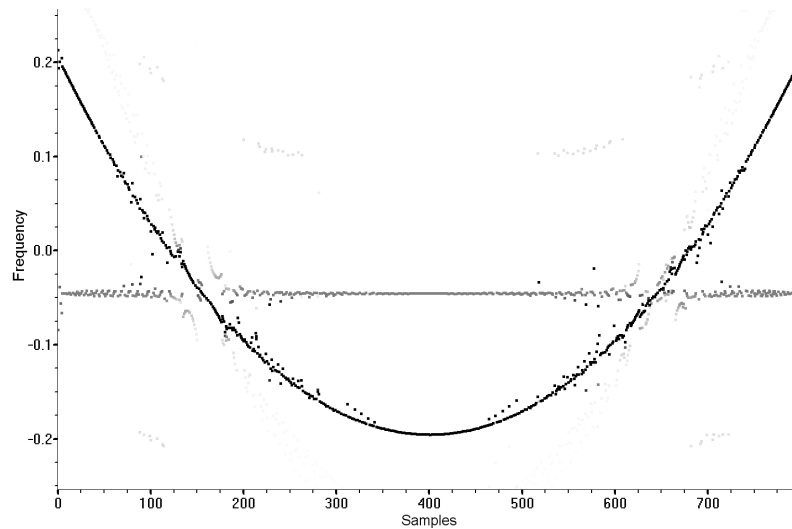
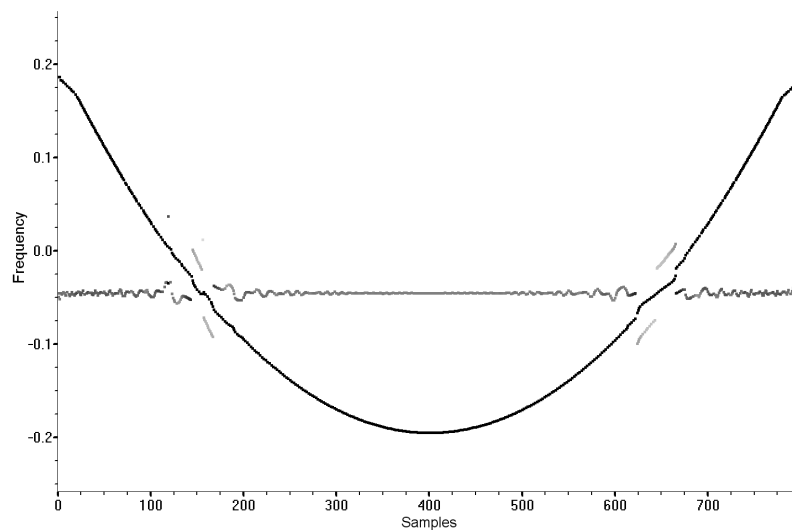


Рис. 2.49. ЧВРЭ ОМПОПЭМ ( $N_{win} = 40$ ,  $p = 1$ ) сигнала (3.7)

Рис. 2.50. ЧВРЭ ОМПОПЭМ ( $N_{win} = 10$ ,  $p = 3$ ) сигнала (3.7)Рис. 2.51. ЧВРЭ ОМПОПЭМ ( $N_{win} = 40$ ,  $p = 2$ ) сигнала (3.7)

## 2.4. ВЫВОДЫ

Описанный в данном разделе алгоритм предназначен для оценки параметров синусоидальной (2.2) и экспоненциальной (2.3) моделей сигнала, заданного на коротком отрезке. Показана возможность применения данного алгоритма в скользящем окне для вычисления ЧВРЭ квазигармонических ЧМ сигналов, заданных на коротком временном интервале.

Проведенные исследования показали:

- применение данного алгоритма для анализа ЛЧМ сигналов с низкой скоростью изменения частоты позволяет получить несмещенную, эффективную и состоятельную оценку частоты, не зависящую от положения окна в сигнале;

- данный алгоритм имеет наименьшую дисперсию ошибки оценки частоты при анализе ЛЧМ сигналов по сравнению с модифицированным МНК Прони и методом MUSIC;
- при анализе ЧМ сигналов с квадратичным законом изменения частоты, оценка частоты смещена и это смещение не зависит от ОСШ, а зависит от размера и положения скользящего окна в сигнале (с увеличением размера окна уменьшается дисперсия ошибки и увеличивается ее смещение), при анализе участка сигнала, скорость изменения частоты на котором меняет знак, дисперсия ошибки имеет минимально возможное значение для заданных размера окна и ОСШ;
- ошибка оценки частоты, вызванная узкополосной помехой, проявляется в виде осцилляций частоты основной ЧМ компоненты, период и амплитуда которых увеличиваются, когда разность частот между помехой и анализируемой компонентой уменьшается. Уменьшить ошибку можно, если увеличить размер окна и количество поисковых параметров;
- значительное увеличение размера окна может привести к ложному скачку частоты, который приводит к увеличению ошибки оценки мгновенной частоты на несколько порядков.
- точность оценки частоты уменьшается при анализе начального и конечного участков сигнала, что связано с перекрытием скользящего окна и края сигнала.

Таким образом данным методом анализа не рекомендуется анализировать участки с высокой скоростью изменения частоты.

### 3. Модификация преобразования Вигнера-Виля для анализа коротких реализаций широкополосных ЧМ сигналов

#### 3.1. Описание алгоритма

##### 3.1.1. Псевдопреобразование Вигнера

В основу алгоритма положено преобразование Вигнера - Виля [21, 22, 125, 136–140]:

$$P(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} s\left(\tau + \frac{t}{2}\right) \cdot s^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Функция  $P(\tau, f)$  называется частотно-временным распределением энергии (ЧВРЭ) сигнала, может принимать только действительные значения (включая отрицательные). Несмотря на высокое разрешение, как по частоте, так и по времени, в распределении могут образовываться побочные частотные компоненты, мешающие анализу сигнала [22, 136, 138, 139]. Это связано с нелинейностью преобразования.

Существует несколько методов, позволяющих уменьшить интенсивность побочных компонент, используя определенные процедуры усреднения. Один из них – использование окна  $h(t)$  во временной области. В результате получается так называемое псевдопреобразование Вигнера (ППВ) [21, 138, 139]:

$$P(\tau, f) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \cdot s\left(\tau + \frac{t}{2}\right) \cdot s^*\left(\tau - \frac{t}{2}\right) \cdot e^{-j2\pi ft} dt$$

Если

$$h(t) = \begin{cases} 1, & -t_0 < t \leq t_0 \\ 0, & |t| > t_0 \end{cases},$$

то при  $t_0 \rightarrow \infty$  ППВ переходит в обычное преобразование Вигнера-Виля. При уменьшении  $t_0$  интенсивность побочных продуктов ослабляется, платой за это является ухудшение частотного разрешения.

При анализе оцифрованного сигнала, ППВ удобнее вычислять с помощью

БПФ в скользящем окне [138, 139]. Для этого, перед выполнением процедуры БПФ, отрезок сигнала  $s[n]$ , выделенный скользящим окном размером  $N_{win}$  отсчетов, преобразуют по следующему алгоритму:

1. если размер окна нечетный, то

$$s_1[n] = s[n] \cdot s^*[N_{win} - n - 1], \quad n = 0, 1, \dots, N_{win} - 1,$$

для четного размера окна

$$\begin{aligned} s_1[n] &= s[n] \cdot s^*[N_{win} - n - 2], & n = 0, 1, \dots, N_{win} - 2, \\ s_1[N_{win} - 1] &= s[N_{win} - 1] \cdot s^*[N_{win} - 1]; \end{aligned}$$

2. чтобы результат процедуры БПФ получился действительным, необходимо перед вычислением БПФ выполнить циклическую перестановку полученного сигнала  $s_1[n]$  влево на  $(N_{win} - 1)/2$  отсчетов (если  $N_{win}$  – нечетное) или на  $N_{win}/2 - 1$  (если  $N_{win}$  – четное).

При построении ЧВРЭ все значения на шкале частот следует разделить на 2.

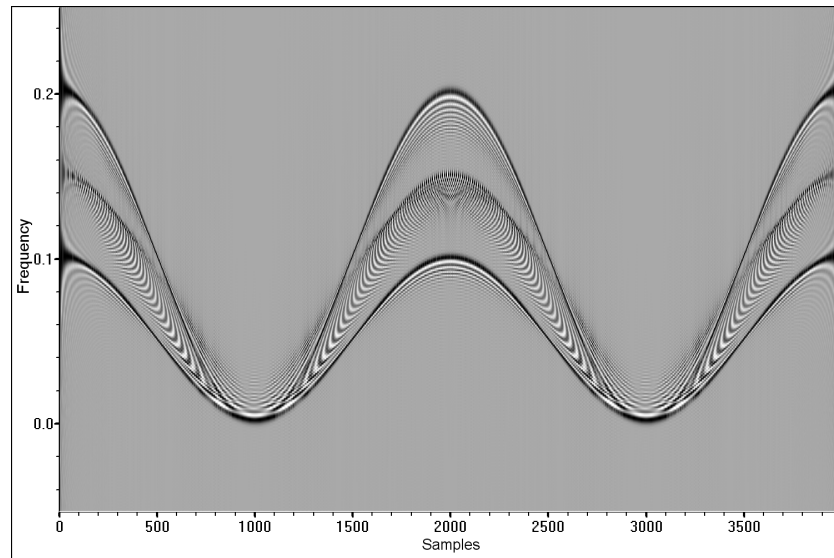
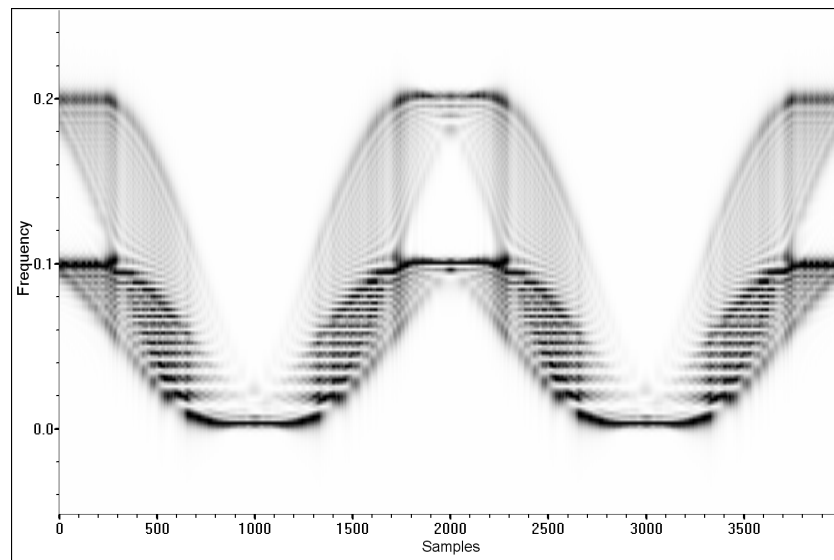
По данному алгоритму была реализована компьютерная программа [139, 141], используемая для анализа медицинских [142–144], астрофизических [139, 145–147] данных. В качестве примера построим ЧВРЭ для смоделированного сигнала:

$$\begin{aligned} s[n] &= \exp(j \cdot (2\pi \cdot 0.05 \cdot n + 100 \cdot \sin(2\pi \cdot 0.0005 \cdot n))) + \\ &\quad + \exp(j \cdot (2\pi \cdot 0.1 \cdot n + 200 \cdot \sin(2\pi \cdot 0.0005 \cdot n))), \end{aligned}$$

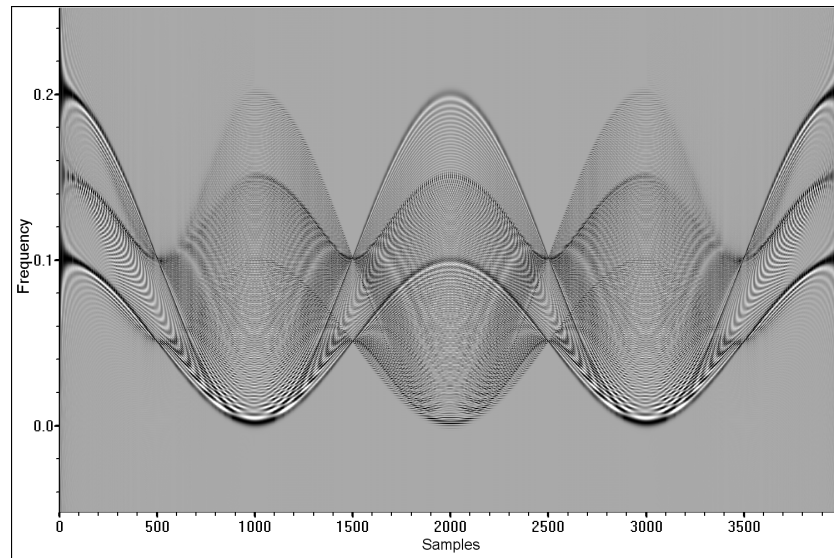
который состоит из двух ЧМ компонент, мгновенная частота одной из них меняется по синусоидальному закону в диапазоне от 0 до 0.1, а другой – от 0 до 0.2.

На рис. 3.1 представлено ЧВРЭ, полученное с помощью ППВ с размером окна  $N_{win} = 500$  отсчетов. По оси абсцисс отложено время (слева - направо), по оси ординат – частота. Более темные участки распределения соответствуют большей интенсивности.

Для сравнения на рис. 3.2 представлена Фурье спектрограмма, вычисленная с таким же размером окна.

Рис. 3.1. ЧВРЭ ППВ ( $N_{win} = 500$ )Рис. 3.2. Фурье спектрограмма ( $N_{win} = 500$ )

Качественно можно видеть, что ЧВРЭ ППВ (рис. 3.1) имеет более высокое частотно-временное разрешение по сравнению со спектрограммой (рис. 3.2). При увеличении размера окна количество и интенсивность побочных компонент в ЧВРЭ ППВ увеличиваются, что может затруднить выделение основных компонент (рис. 3.3).

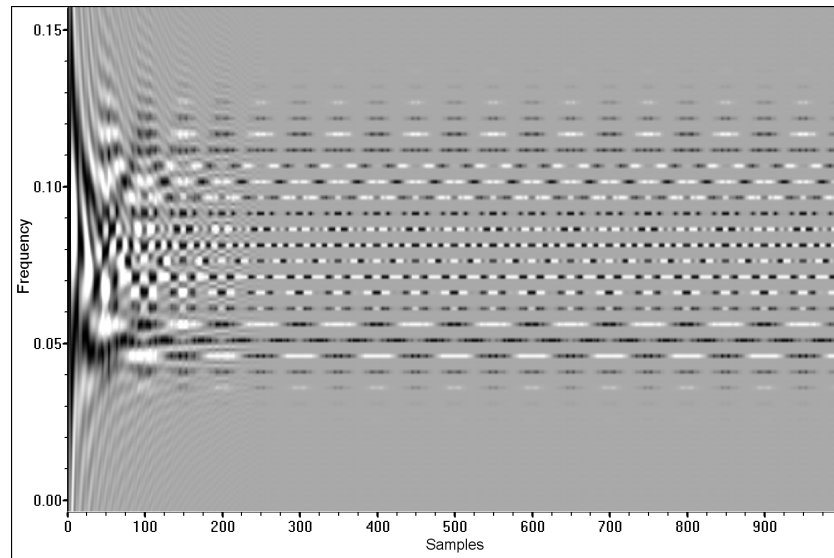
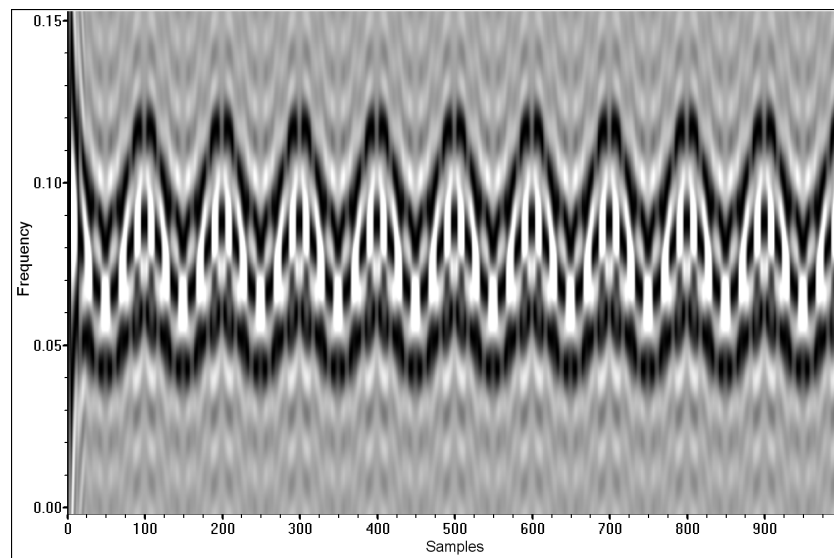
Рис. 3.3. ЧВРЭ ППВ ( $N_{win} = 2000$ )

Рассмотрим другой пример. Смоделированный сигнал:

$$s[n] = \exp(j \cdot (2\pi \cdot 0.05 \cdot n + \sin(2\pi \cdot 0.01 \cdot n))) + \\ + \exp(j \cdot (2\pi \cdot 0.1 \cdot n + 2 \cdot \sin(2\pi \cdot 0.01 \cdot n))), \quad (3.1)$$

состоит из двух ЧМ компонент, мгновенная частота одной из них меняется по синусоидальному закону в диапазоне от 0.04 до 0.06, а другой – от 0.08 до 0.12, в отличие от предыдущего сигнала диапазон частот каждой ЧМ компоненты уменьшился в 5 раз, а период закона изменения частоты – в 20 раз.

На рис. 3.4, 3.5 представлены ЧВРЭ, полученные с помощью ППВ с различными размерами окон. При размере окна в 500 отсчётов (рис. 3.4) большое количество побочных компонент в ЧВРЭ и их интенсивность мешают анализировать сигнал. Уменьшение размера окна до 50 отсчетов (рис. 3.5) позволяет оценить структуру сигнала, но разрешение по частоте может быть недостаточно для анализа сигнала.

Рис. 3.4. ЧВРЭ ППВ ( $N_{win} = 500$ )Рис. 3.5. ЧВРЭ ППВ ( $N_{win} = 50$ )

### 3.1.2. Модификация псевдопреобразования Вигнера

Чтобы исследовать сигналы подобные (3.1), была сделана модификация алгоритма вычисляющего ППВ, заключающаяся в замене БПФ на МПО метод<sup>1</sup>, приведенный в разделе 2. При этом учитывалось, что ППВ может принимать только действительные значения, что значительно упрощает МПО метод:

<sup>1</sup>В [140, 148] для частотно-временного анализа интерферограмм газодинамических процессов была сделана замена БПФ на МНК Прони



1. отрезок сигнала  $s[n]$ , выделенный скользящим окном размером  $N_{win}$  отсчетов ( $N_{win}$  – нечетная), преобразуем по следующему алгоритму:

$$s_1[n] = s[M + n] \cdot s^*[M - n], \quad n = 0, 1, \dots, M - 1, \quad (3.2)$$

где  $M = (N_{win} - 1)/2$  – для нечетного  $N_{win}$ ,

$M = N_{win}/2 - 1$  – для четного  $N_{win}$ .

2. Используя алгоритм оптимизации, аппроксимируем полученный сигнал  $s_1[n]$  линейной комбинацией  $p$  комплексных экспонент (не обязательно ортогональных на данном отрезке) с различными частотами  $f_k$  и амплитудами  $A_k$ , так, чтобы относительная ошибка аппроксимации между моделью и сигналом была минимальной.

Относительная ошибка аппроксимации вычисляется по формуле (2.1), в которой  $\tilde{s}_1[n] = \sum_{k=1}^p A_k e^{j \cdot 2\pi \cdot f_k \cdot n}$  – модель преобразованного сигнала.

Оптимальное значение  $A_k$  находится из системы линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1p} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \dots & c_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{M_1} (\operatorname{Re}(s_1[n]) \cdot \cos 2\pi f_1 n + \operatorname{Im}(s_1[n]) \cdot \sin 2\pi f_1 n) \\ \sum_{n=0}^{M_1} (\operatorname{Re}(s_1[n]) \cdot \cos 2\pi f_2 n + \operatorname{Im}(s_1[n]) \cdot \sin 2\pi f_2 n) \\ \vdots \\ \sum_{n=0}^{M_1} (\operatorname{Re}(s_1[n]) \cdot \cos 2\pi f_p n + \operatorname{Im}(s_1[n]) \cdot \sin 2\pi f_p n) \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

где

$$c_{mk} = \sum_{n=0}^M \cos(2\pi \cdot (f_m - f_k) \cdot n) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{\sin((M+0.5) \cdot 2\pi \cdot (f_m - f_k))}{2 \cdot \sin(\pi \cdot (f_m - f_k))}, & f_m \neq f_k \\ M + 1, & f_m = f_k \end{cases},$$

3. Полученные значения частот делим на 2.
4. Значения амплитуд  $A_k$  отображаются на плоскости время-частота. По оси абсцисс откладывается номер отсчета сигнала, соответствующий центру скользящего окна, по оси ординат – цифровая частота, по оси аппликат на частотах  $f_k$  отображаются значения амплитуд  $A_k$  оттенками серого.

### 3.1.3. Блок-схема алгоритма

На рис. 3.6 представлена блок-схема алгоритма.

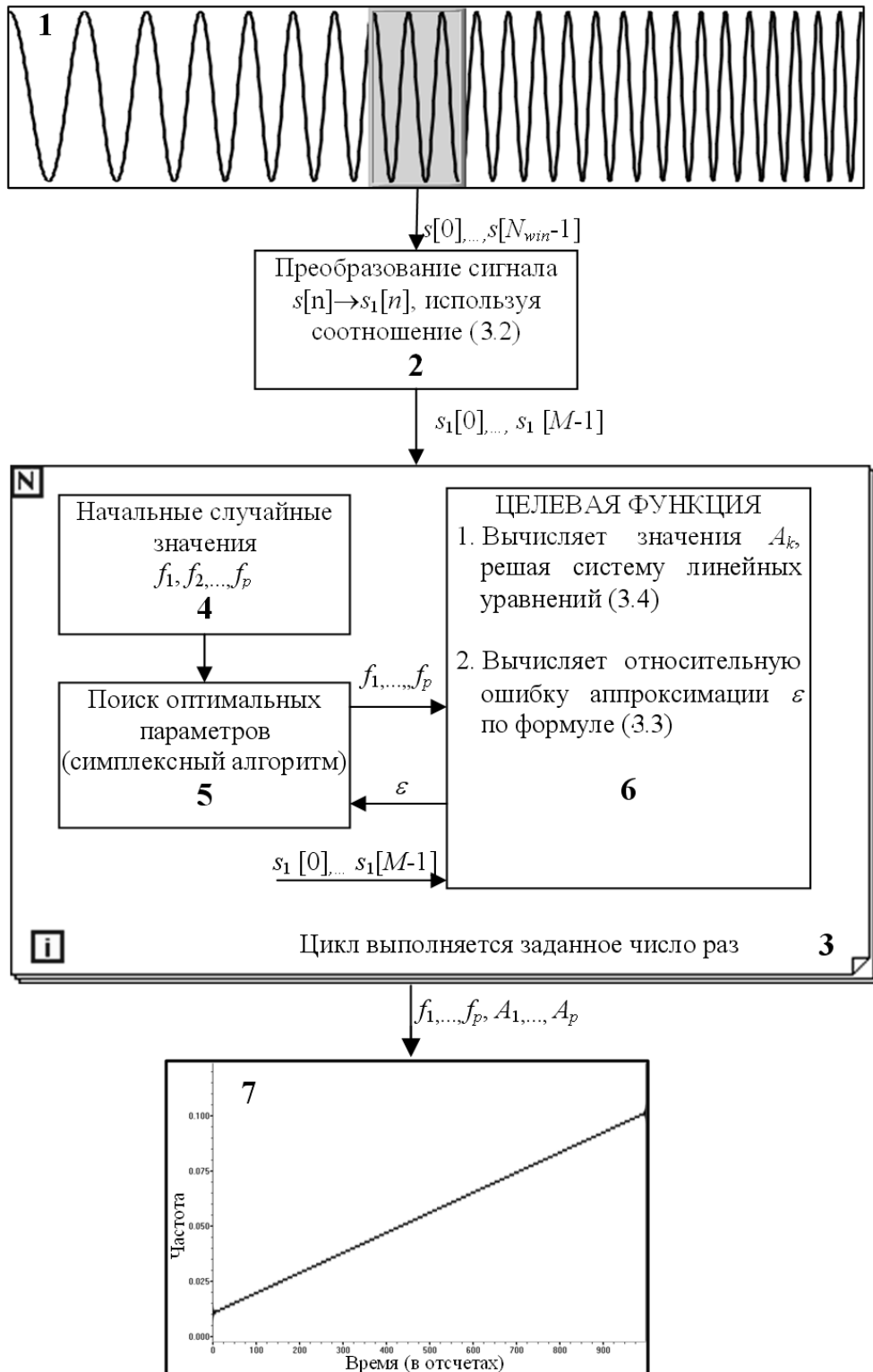


Рис. 3.6. Блок-схема алгоритма

Отрезок сигнала  $s[n]$ , выделенный скользящим окном размером  $N_{win}$  отсчетов (блок 1), с помощью выражения (3.2) преобразуют в  $s_1[n]$  (блок 2).

Дальнейшая обработка преобразованного сигнала происходит в цикле (блок 3). С помощью генератора случайных чисел (блок 4) задаются начальные значения<sup>1</sup> всех цифровых частот  $f_k$  в диапазоне от  $-0.5$  до  $0.5$ . В блоке 5 производится поиск оптимальных параметров  $f_k$ , при которых относительная ошибка аппроксимации, вычисляемая в целевой функции (блок 6), имеет минимальное значение. В процессе поиска значения цифровых частот могут перейти за границы заданного диапазона, поэтому полученные данные при отображении приводятся в диапазон от  $-0.5$  до  $0.5$ . Весь этот процесс происходит многократно, сохраняя значения поисковых параметров, при которых целевая функция имеет наименьшее значение.

Найденные значения частот делятся на 2 и вместе со значениями амплитуд передаются в блок 7, в котором отображаются на плоскости время-частота.

### 3.1.4. Особенности реализации алгоритма

При вычислении ЧВРЭ широкополосных ЧМ сигналов алгоритмами, основанными на оценке параметров синусоидальной или экспоненциальной модели методом оптимизации, возникает побочный эффект, когда амплитуда двух или более частотных компонент во много раз превышает амплитуду сигнала. Если ЧМ компонента определена на коротком отрезке, то ее можно аппроксимировать с высокой точностью несколькими комплексными экспонентами с близкими частотами и амплитудами, во много раз превышающими амплитуду исходного сигнала. При сложении этих компонент мгновенное значение частоты и амплитуды на заданном отрезке меняется по закону [26]:

$$f[t] = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{x[t] \cdot y'[t] - y[t] \cdot x'[t]}{x^2[t] + y^2[t]}, \quad (3.4)$$

$$A^2[t] = x^2[t] + y^2[t], \quad (3.5)$$

где

$$x[t] = \sum_k A_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k),$$

---

<sup>1</sup>На первой итерации цикла (блок 3) начальные значения вычисляются с помощью периодограммы

$$y[t] = \sum_k A_k \sin(2\pi f_k t + \varphi_k),$$

$$x'[t] = -2\pi \sum_k A_k f_k \sin(2\pi f_k t + \varphi_k),$$

$$y'[t] = 2\pi \sum_k A_k f_k \cos(2\pi f_k t + \varphi_k).$$

Поэтому, если при оценке параметров синусоидальной или экспоненциальной моделей некоторые значения амплитуд превосходят амплитуду сигнала, разница в частотах не превышает заданное значение<sup>1</sup>, то следует объединить эти компоненты в одну, пересчитав амплитуды и частоты по формулам (3.4) и (3.5). Для ОМПО метода значение  $t$  равно половине размера окна (не округляя до целого). Для МПВВ значение  $t = 0$ . В этом случае соотношения (3.4) и (3.5) можно переписать:

$$f[0] = \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\sum_k f_k A_k}{\sum_k A_k},$$

$$A[0] = \sum_k A_k.$$

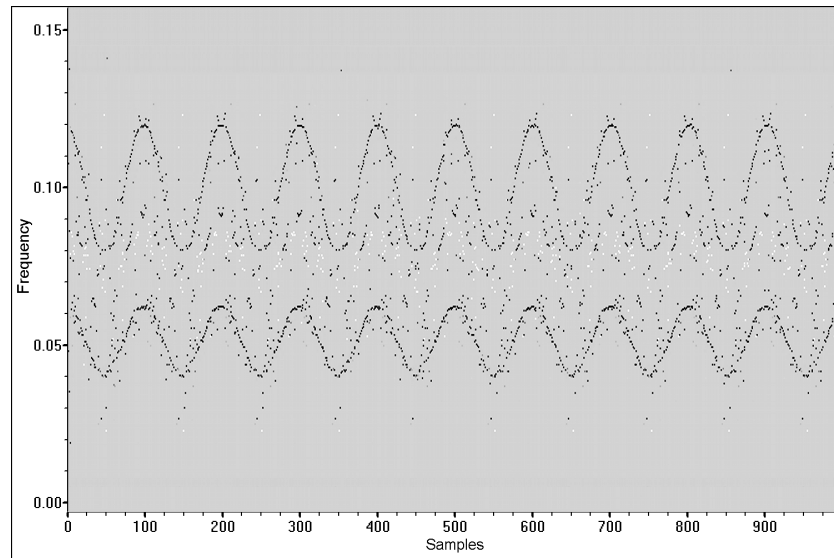
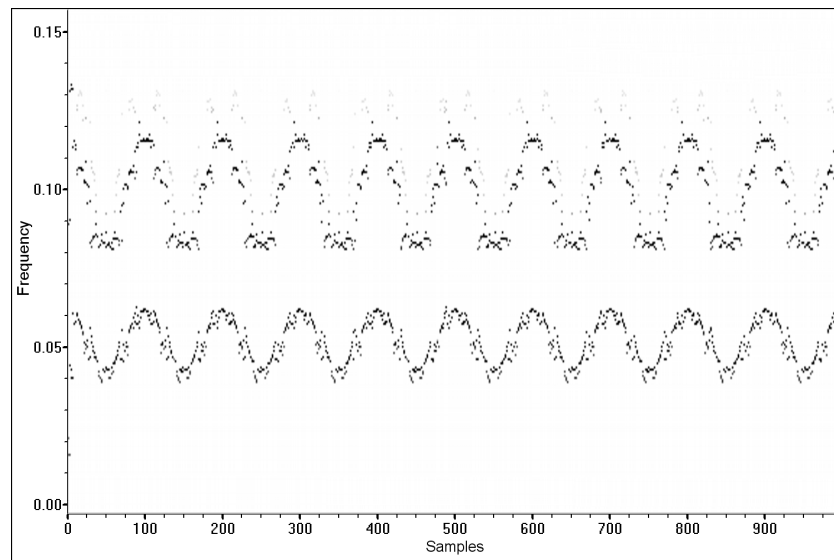
### 3.1.5. Пример вычисления частотно-временного распределения энергии

В качестве примера на 3.7 представлено ЧВРЭ смоделированного на компьютере сигнала (3.1), вычисленное с помощью МПВВ (размер окна  $N_{win} = 15$  отсчетов, количество частотных компонент задаваемых для поиска  $p = 4$ ). Несмотря на малый размер окна, удалось не только разделить частотные компоненты, но и достаточно точно описать закон изменения частоты каждой из них.

Для сравнения, на рис. 3.8 представлено ЧВРЭ вычисленное с помощью ОМПО метода, на котором хорошо различимы частотные компоненты, но, в отличие от МПВВ, на них заметны ложные ступеньки.

---

<sup>1</sup>В реализованной программе для ОМПО метода и МПВВ это значение равно 0.0001 (подбиралось экспериментально).

Рис. 3.7. ЧВРЭ МПВВ ( $M=15$ ,  $P=4$ )Рис. 3.8. ЧВРЭ ОМПО ( $M=15$ ,  $P=3$ )

## 3.2. Тестирование модифицированного преобразования Вигнера-Виля на сигналах, смоделированных на компьютере

### 3.2.1. Влияние белого гауссова шума на точность измерений

Для определения влияния белого гауссова шума на точность оценки частоты были проведены измерения для различных ЧМ сигналов, частота которых менялась:

- по линейному закону от  $-0.25$  до  $0.25$  за 400 и 4000 отсчетов;
- по параболическому закону от  $0.2$  до  $-0.2$  и обратно за 400 и 800 отсчетов.

Исследования проводились для различных отношений сигнал/шум: 20, 10 и 0 дБ и различных размеров скользящих окон.

С помощью формулы (2.8), определим ЧМ сигнал, цифровая частота которого меняется по линейному закону от  $-0.25$  до  $0.25$  за 4000 отсчетов.

На рис. 3.9 – 3.17 представлены ЧВРЭ, вычисленные МПВВ с количеством поисковых параметров  $p = 1$ , различными размерами окон ( $N_{win}$ ) и для сигналов с различными отношениями сигнал/шум (ОСШ).

Сравнивая рисунки, качественно можно видеть, что точность оценки частот:

- не зависит от мгновенной частоты анализируемого ЛЧМ сигнала;
- возрастает при увеличении размера окна;
- при анализе начального и конечного участков сигнала значительно выше, чем в ЧВРЭ, вычисленном методом ОМПО (рис. 2.3 – 2.8).

Такие же выводы можно сделать, построив распределения плотности вероятности (РПВ) ошибок оценки частоты (ООЧ).

Для этого каждый сигнал с аддитивным шумом генерировался 10000 раз. Генерация сигнала с последующей обработкой проводились автоматически с записью результатов (частот основной ЧМ компоненты) в файл, которые в дальнейшем были подвергнуты статистической обработке.

На рис. 3.18 а, б представлены РПВ, вычисленные для моментов времени соответствующих 2000 и 3000 отсчетам ЧВРЭ ( $N_{win} = 25$ , ОСШ=0 дБ), где мгновенная частота компоненты сигнала равна 0 и 0.125 соответственно.

Распределение соответствует гауссову (на рисунках изображено черным цветом) с вероятностью, превышающей 95% по критерию  $\chi^2$  [132, 133]. Несмотря на большую разницу оцениваемых частот, среднее значение ООЧ не превышает  $10^{-5}$ , стандартные отклонения отличаются друг от друга менее 0.5%.

На рис. 3.19 – 3.21 представлены РПВ ООЧ в ЧВРЭ, вычисленных с различными размерами окон ( $N_{win}$ ) и для сигналов с различными ОСШ, которые подтверждают вывод об уменьшении ошибки при увеличении размера окна для данного сигнала.

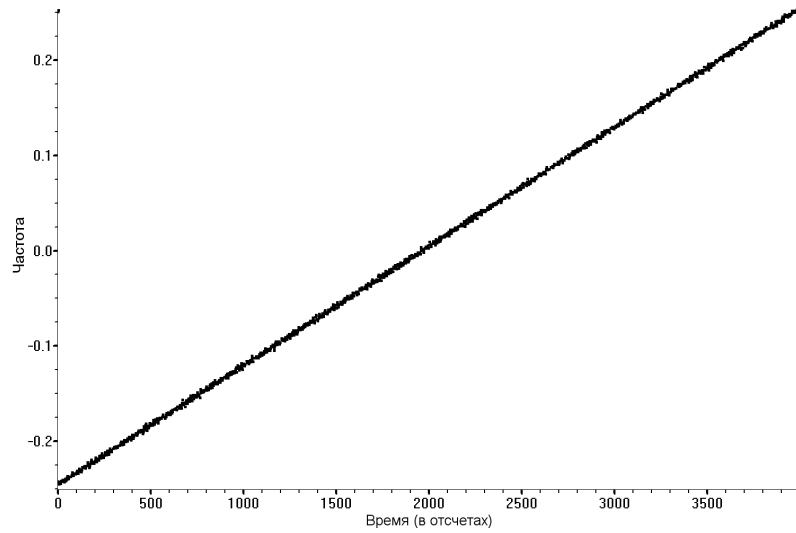


Рис. 3.9. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 10$ ) сигнала (2.8) с ОСШ=20 дБ,

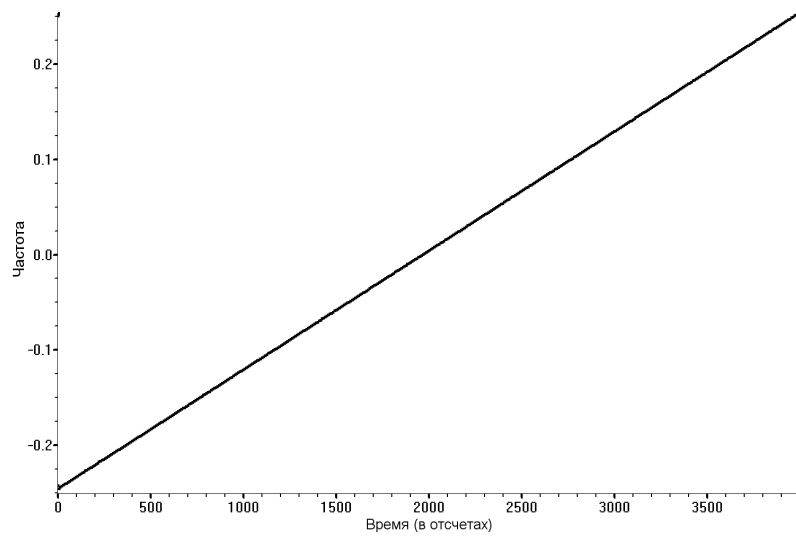


Рис. 3.10. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 50$ ) сигнала (2.8) с ОСШ=20 дБ,

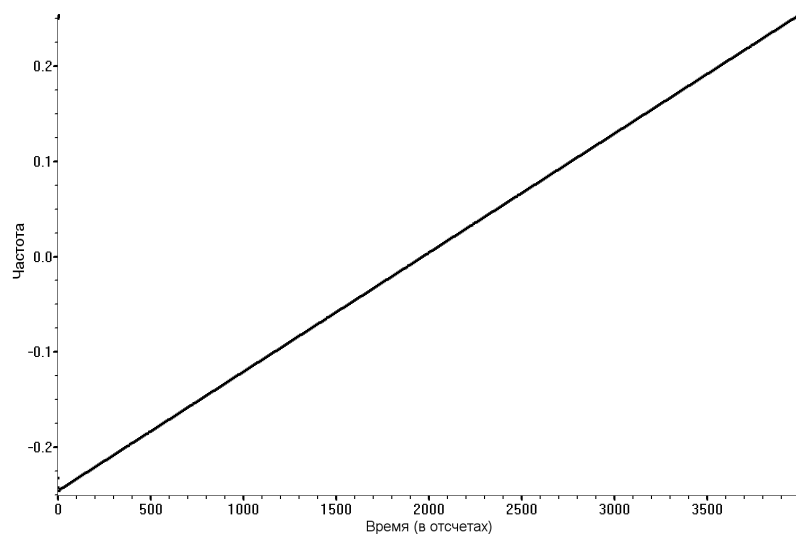


Рис. 3.11. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 100$ ) сигнала (2.8) с ОСШ=20 дБ,

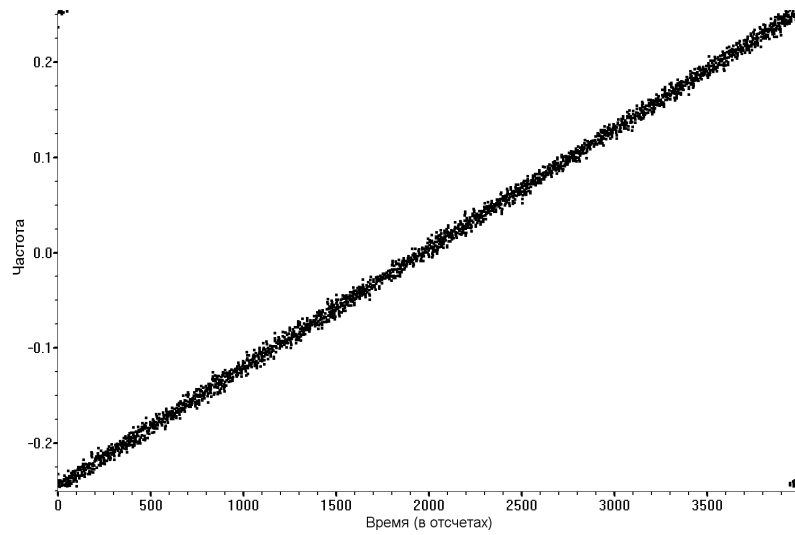


Рис. 3.12. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 10$ ) сигнала (2.8) с ОСШ=10 дБ,

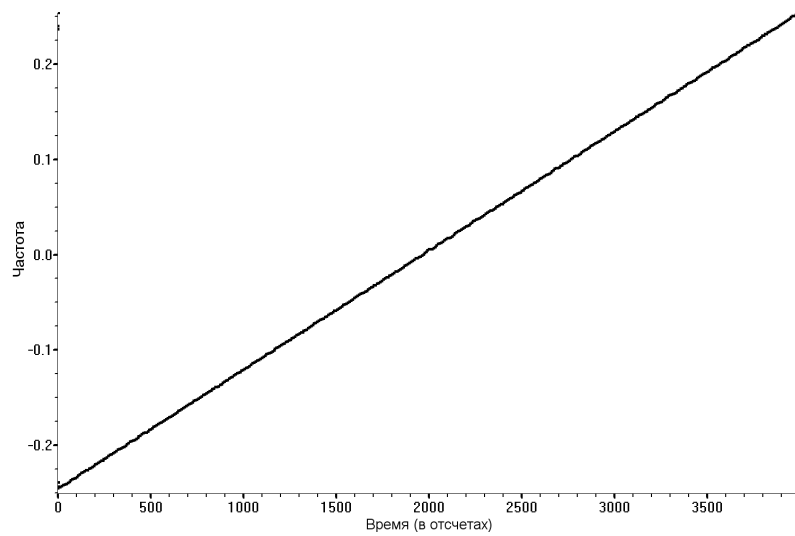


Рис. 3.13. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 50$ ) сигнала (2.8) с ОСШ=10 дБ,

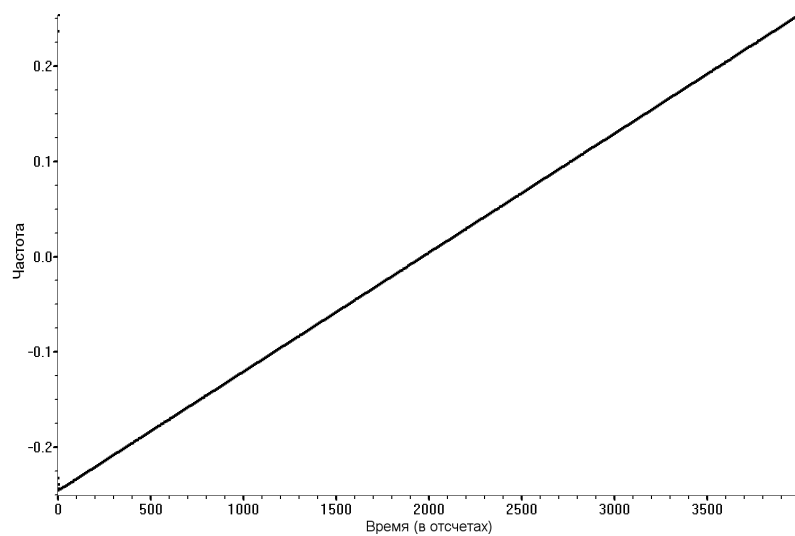


Рис. 3.14. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 100$ ) сигнала (2.8) с ОСШ=10 дБ,



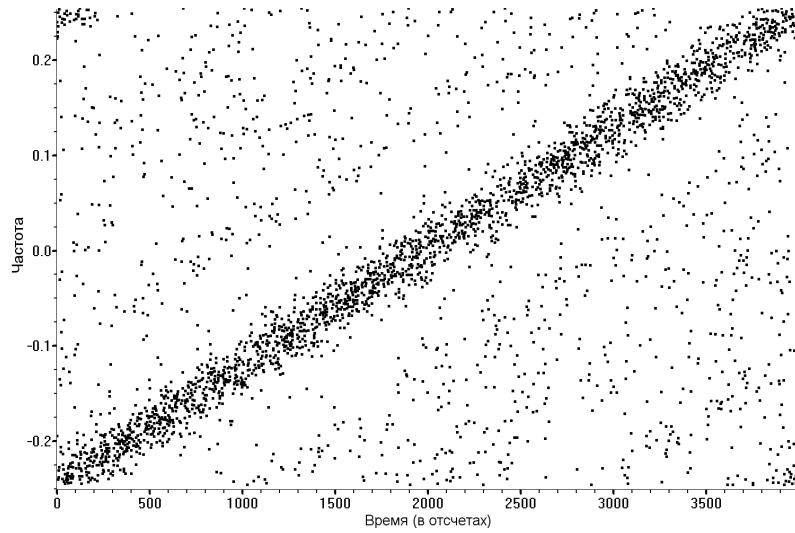


Рис. 3.15. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 10$ ) сигнала (2.8) с ОСШ=0 дБ,

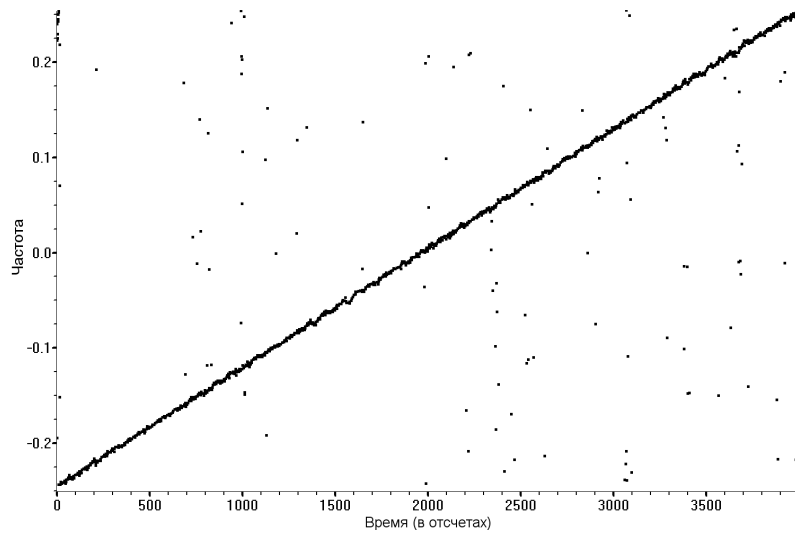


Рис. 3.16. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 50$ ) сигнала (2.8) с ОСШ=0 дБ,

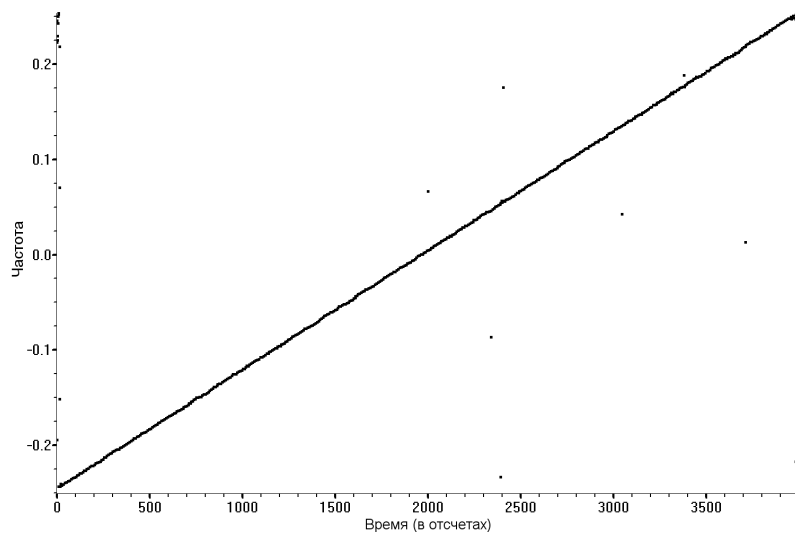


Рис. 3.17. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 100$ ) сигнала (2.8) с ОСШ=0 дБ,

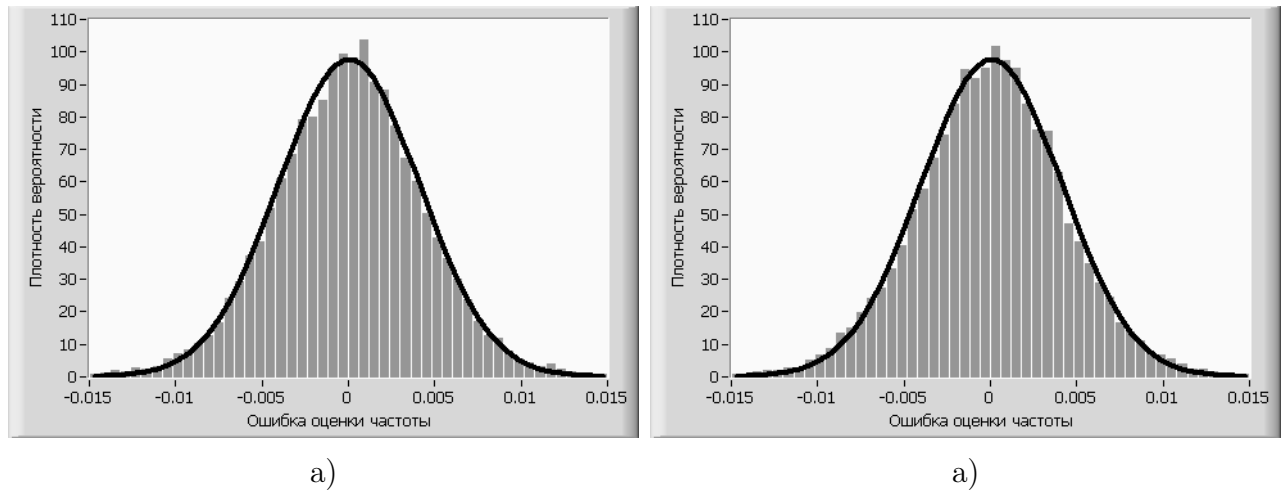


Рис. 3.18. Распределение плотности вероятности ошибки оценки частот основной компоненты, вычисленные для моментов времени соответствующих 2000 (слева) и 3000 (справа) отсчетам ЧВРЭ ( $N_{win} = 25$ , ОСШ=0 дБ)

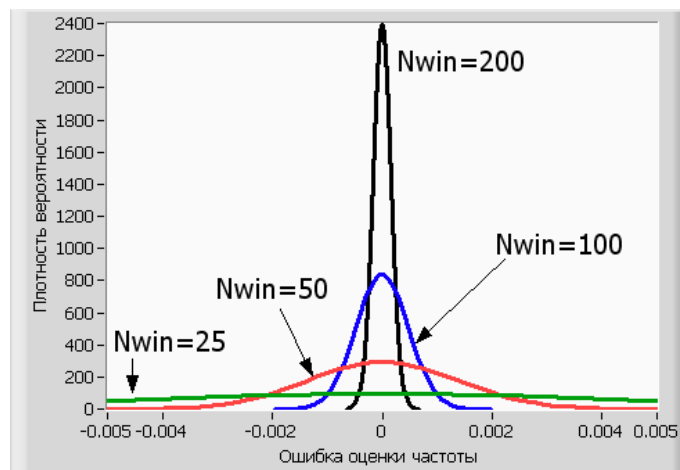


Рис. 3.19. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот в ЧВРЭ для сигнала (2.8) с ОСШ=0 дБ с различными размерами окон

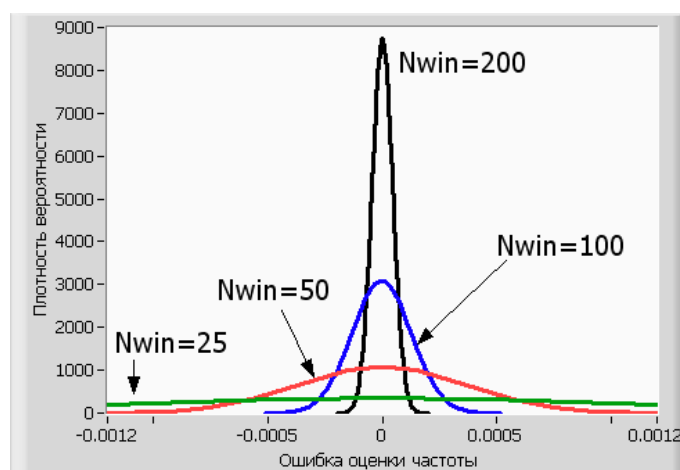


Рис. 3.20. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот в ЧВРЭ для сигнала (2.8) с ОСШ=10 дБ с различными размерами окон

На рис. 3.22 представлена зависимость стандартного отклонения ошибки оценки частоты от размера окна и от ОСШ. Пунктирной линией изображена

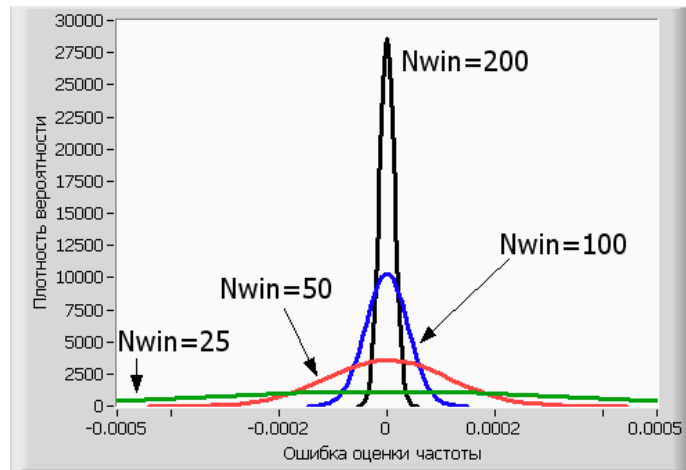


Рис. 3.21. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот в ЧВРЭ для сигнала (2.8) с ОСШ=20 дБ с различными размерами окон

нижняя граница стандартного отклонения  $\sigma_f$ , вычисленная из выражения (2.9), которое соответствует нижней границе дисперсии (критерий Крамера-Рао) оценки частоты для комплексной синусоиды с неизвестными частотами, амплитудами и фазами [94, с. 57, с 542].

По сравнению с методом ОМПО (рис. 2.13), МПВВ имеет меньшую точность при анализе ЛЧМ сигналов с малой скоростью изменения частоты и аддитивным БГШ. Это связано с тем, что при выполнении нелинейного преобразования (3.2) мощность БГШ увеличивается.

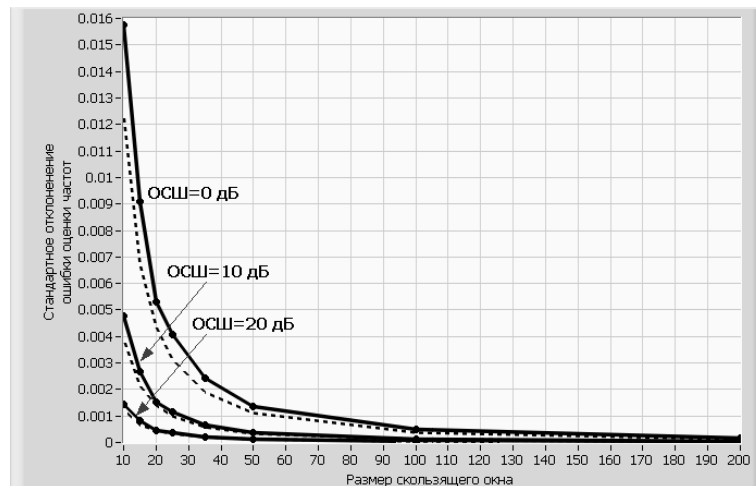


Рис. 3.22. Зависимости стандартного отклонения ошибки оценки частоты от размера окна и от ОСШ для сигнала (2.8)

Исследуем работоспособность алгоритма при анализе ЛЧМ сигналов с более высокой скоростью изменения мгновенной частоты. Для этого будем анализировать сигнал, определяемый выражением (2.10), цифровая частота которого меняется по линейному закону от  $-0.25$  до  $0.25$  за 400 отсчетов.

На рис. 3.23 – 3.32 представлены ЧВРЭ заданного сигнала, вычисленные МПВВ с количеством поисковых параметров  $p = 1$ , различными размерами окон ( $N_{win}$ ) и для сигналов с различными ОСШ. Качественно можно видеть, что при увеличении скорости изменения мгновенной частоты в 10 раз погрешность оценивания не изменилась. В отличие от метода ОМПО при больших размерах окон не появляются ложные разрывы (рис. 2.16, 2.19, 2.22) частотной компоненты даже при увеличении окна до 200 отсчетов (рис. 3.32). Это связано с тем, что при выполнении нелинейного преобразования (3.2) ЛЧМ компонента сигнала преобразуется в гармоническую с постоянной частотой, равной удвоенной частоте, соответствующей центральному отсчету скользящего окна.

На рис. 3.33 – 3.35 представлены РПВ ООЧ полученные для ЧВРЭ, вычисленных с различными размерами окон и для сигналов с различными ОСШ. Плотности вероятности ООЧ имеют гауссово распределение с вероятностью более 95% по критерию  $\chi^2$  [132, 133] (чем больше размер окна, тем меньше стандартное отклонение РПВ).

На рис. 3.36 представлена зависимость стандартного отклонения ООЧ от размера окна и от ОСШ для сигнала (2.10). Из рисунка видно, что при увеличении размера окна точность оценки частоты приближается к максимально возможной, в отличие от метода ОМПО (рис. 2.33).

Из проделанных исследований можно сделать вывод, что при анализе ЛЧМ сигналов с быстрым изменением частоты, использование МПВВ позволит добиться лучших результатов по сравнению с методом ОМПО за счет возможности использования окна большего размера.

Следует отметить, что оценка частоты ЛЧМ сигнала получается несмещенной.

Исследуем работоспособность алгоритма при анализе сигналов, частота которых описывается полиномом второго порядка. Для этого будем анализировать сигнал, определяемый выражением (2.11), цифровая частота которого меняется по параболе от 0.2 до  $-0.2$  и обратно за 400 отсчетов.

На рис. 3.37 – 3.45 представлены ЧВРЭ заданного сигнала, вычисленные МПВВ с количеством поисковых параметров  $p = 1$ , различными размерами

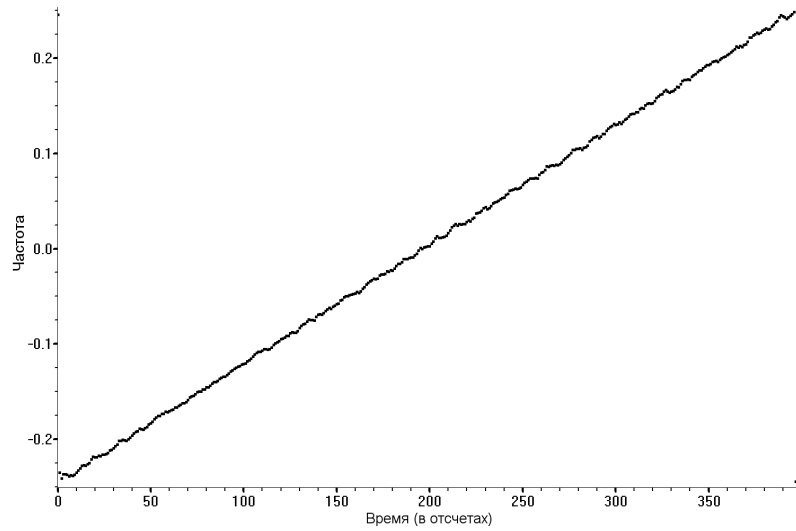


Рис. 3.23. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 10$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=20 дБ,

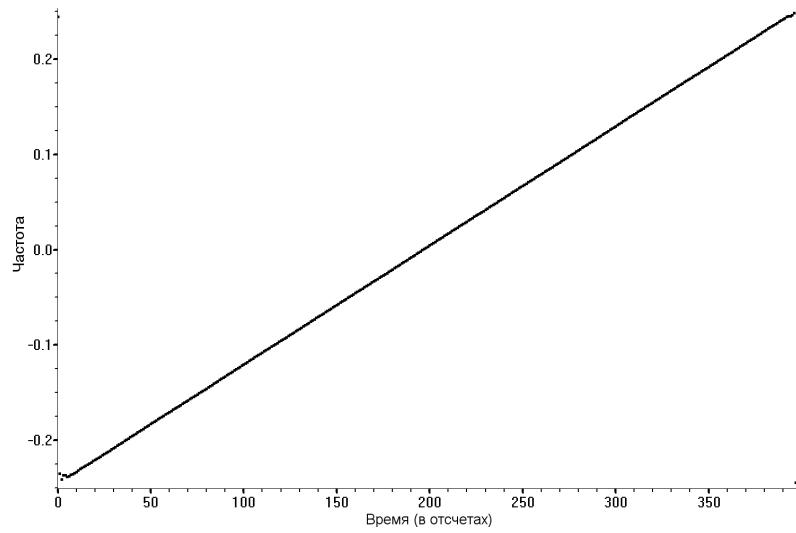


Рис. 3.24. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 50$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=20 дБ,

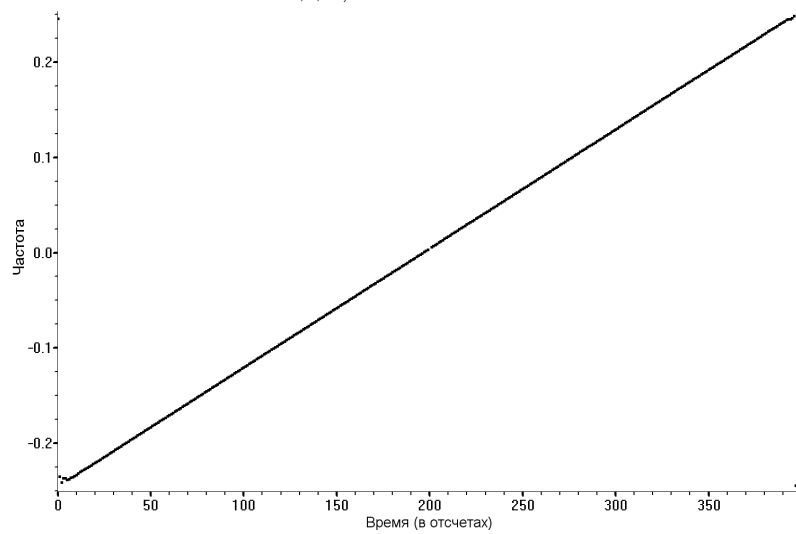


Рис. 3.25. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 100$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=20 дБ,

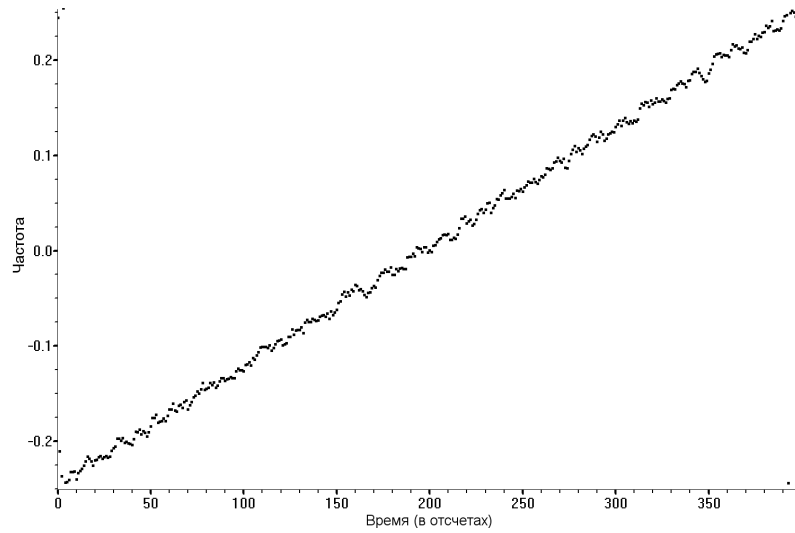


Рис. 3.26. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 10$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=10 дБ,

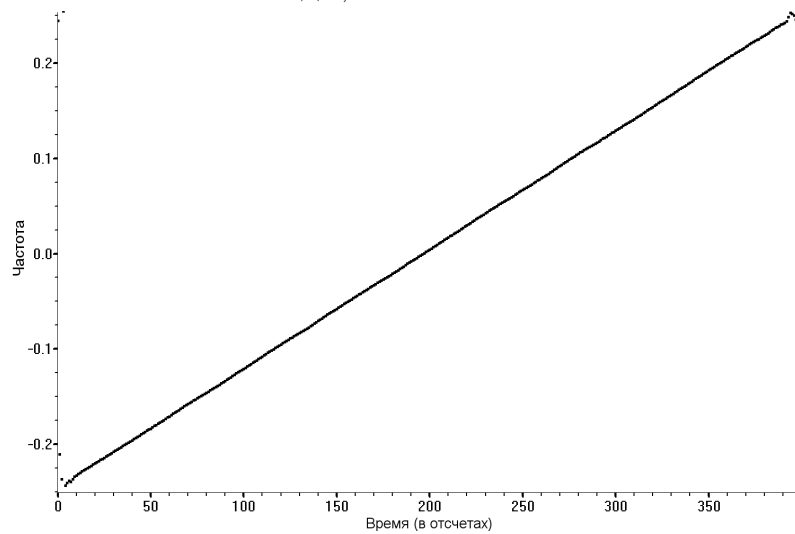


Рис. 3.27. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 50$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=10 дБ,

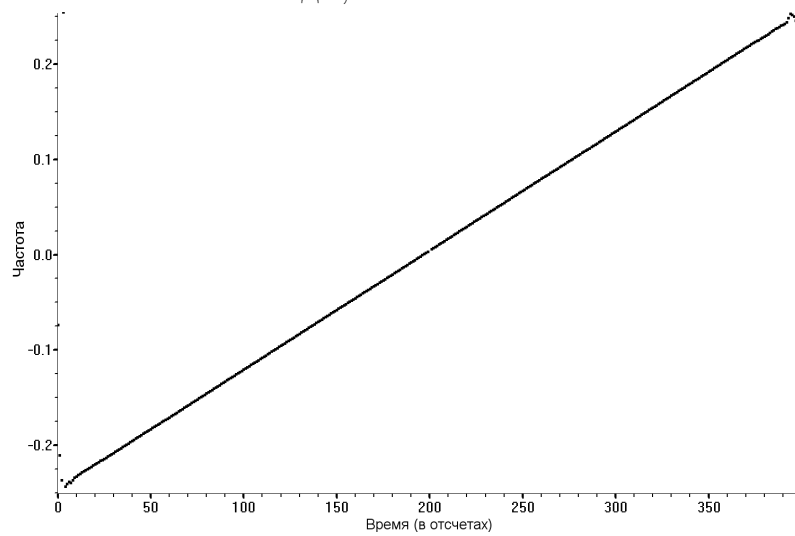


Рис. 3.28. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 100$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=10 дБ,

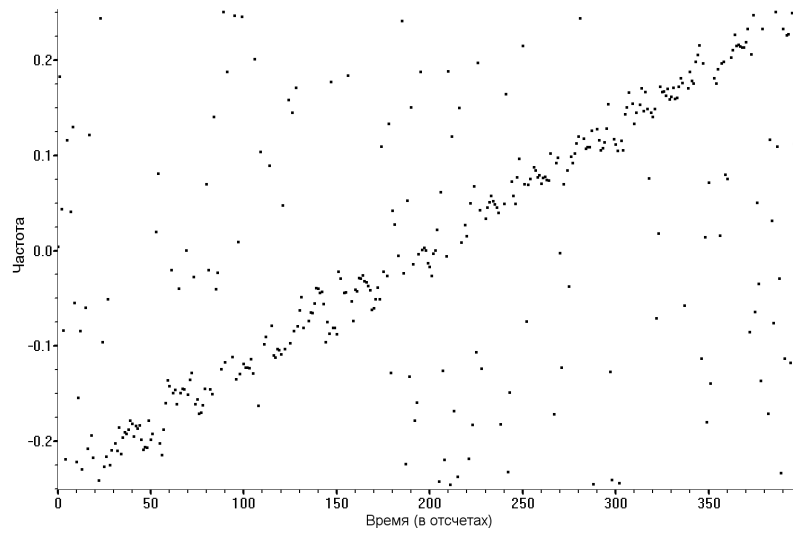


Рис. 3.29. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 10$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=0 дБ,

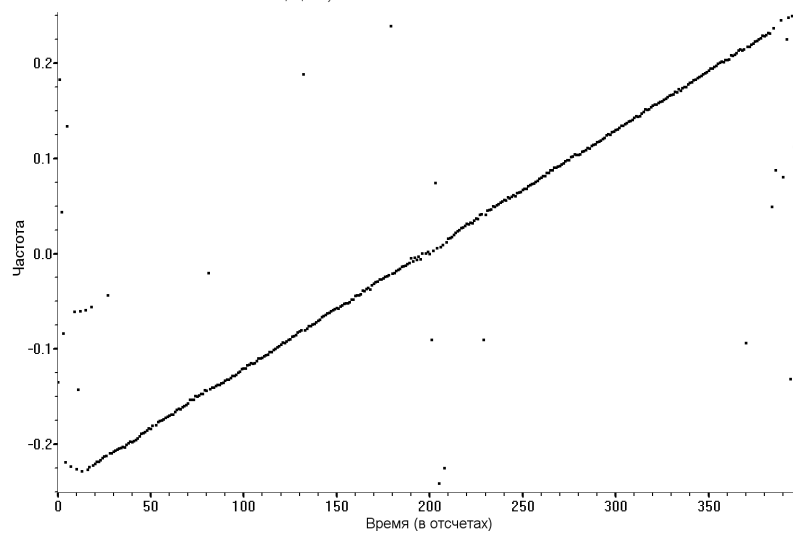


Рис. 3.30. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 50$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=0 дБ,

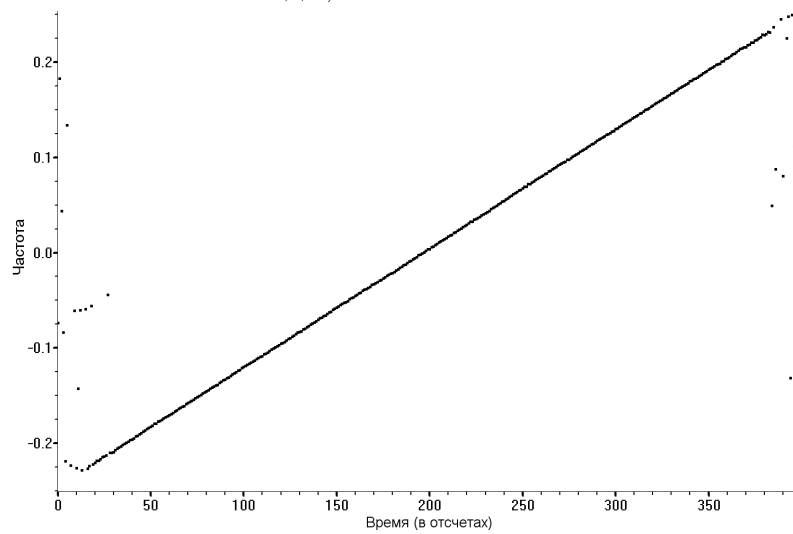


Рис. 3.31. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 100$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=0 дБ,

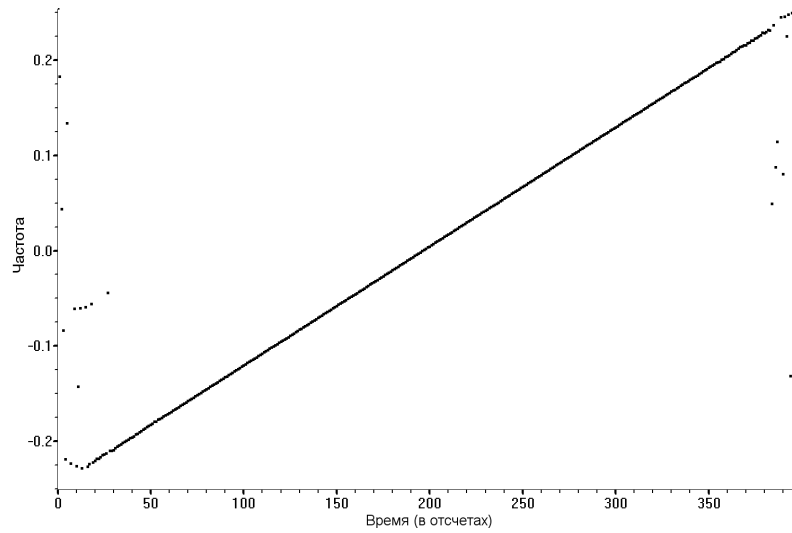


Рис. 3.32. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 200$ ) сигнала (2.10) с ОСШ=0 дБ,

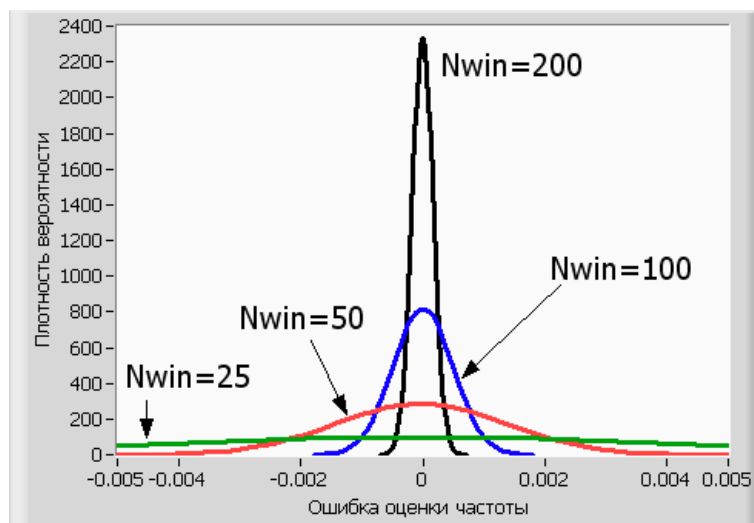


Рис. 3.33. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот в ЧВРЭ для сигнала (2.10) с ОСШ=0 дБ с различными размерами окон

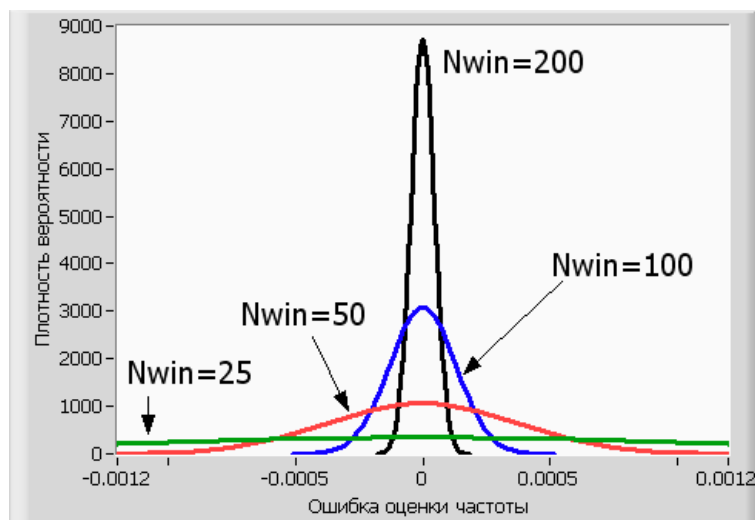


Рис. 3.34. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот в ЧВРЭ для сигнала (2.10) с ОСШ=10 дБ с различными размерами окон



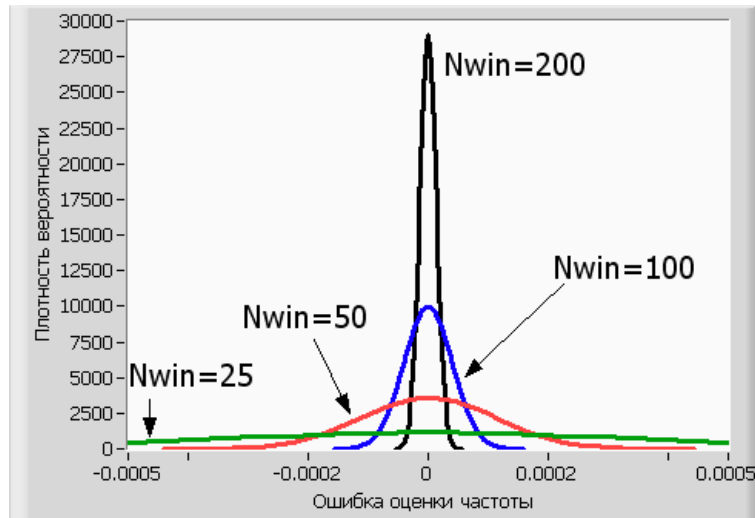


Рис. 3.35. Распределения плотности вероятности ошибки оценки частот в ЧВРЭ для сигнала (2.10) с ОСШ=20 дБ с различными размерами окон

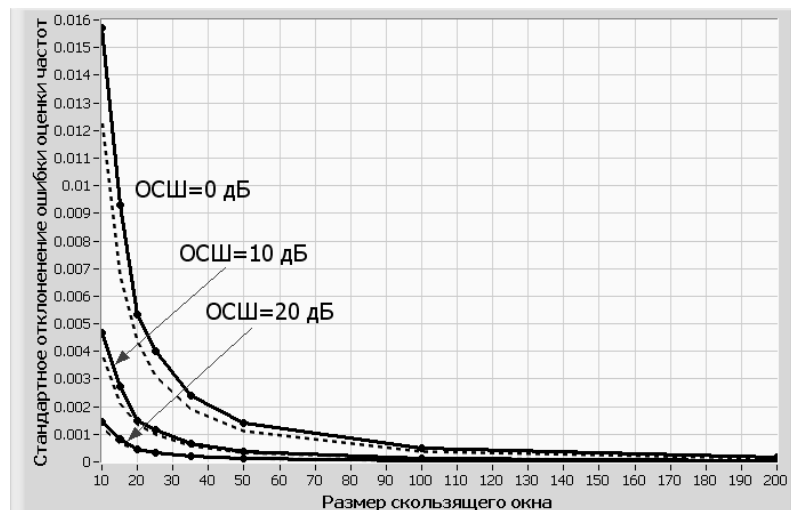


Рис. 3.36. Зависимости стандартного отклонения ошибки оценки частоты от размера окна и от ОСШ для сигнала (2.10)

окон ( $N_{win}$ ) и для сигналов с различными ОСШ.

Из рисунков видно, что при увеличении размера окна с 10 до 50 отсчетов точность оценки частоты становится выше (в отличие от метода ОМПО) (рис. 3.37 – 3.42), а при увеличении размера окна до 100 отсчетов (рис. 3.43 – 3.45) при низком ОСШ точность оценки немного падает. Увеличение количества компонент  $p$  экспоненциальной модели ненамного помогает увеличить точность при больших размерах окон (рис. 3.45).

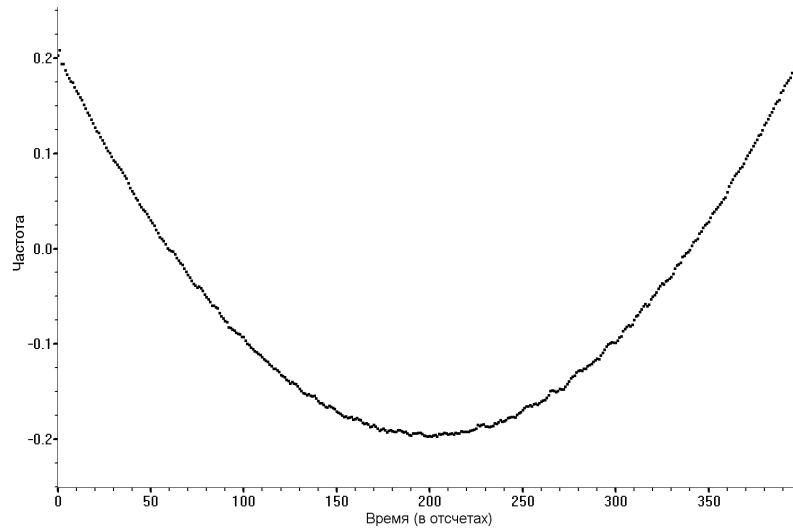


Рис. 3.37. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 10$ ) сигнала (2.11) с ОСШ=20 дБ

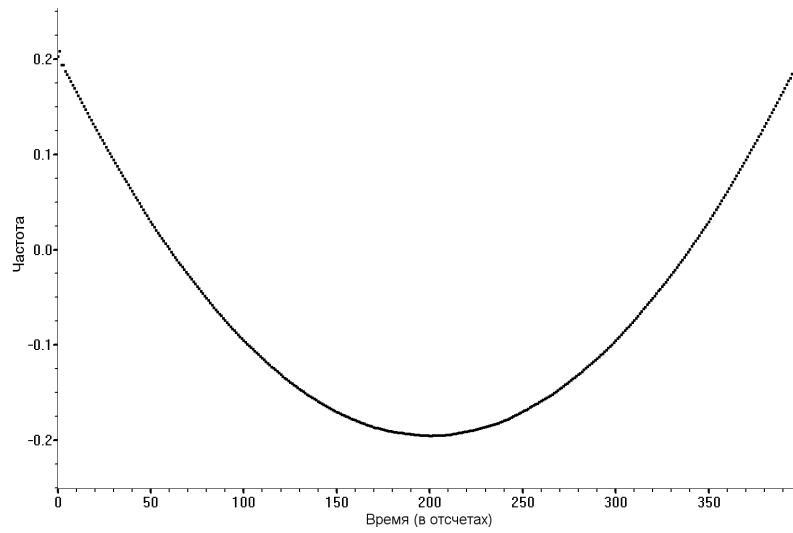


Рис. 3.38. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 30$ ) сигнала (2.11) с ОСШ=20 дБ

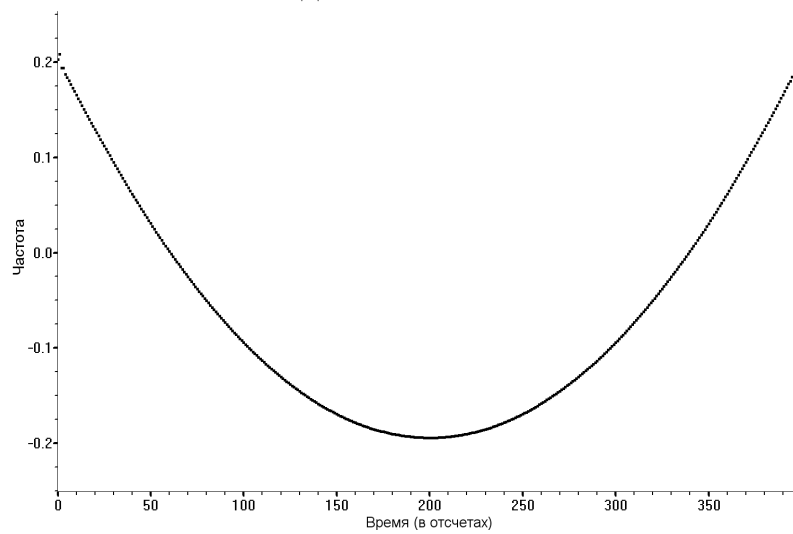


Рис. 3.39. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 50$ ) сигнала (2.11) с ОСШ=20 дБ

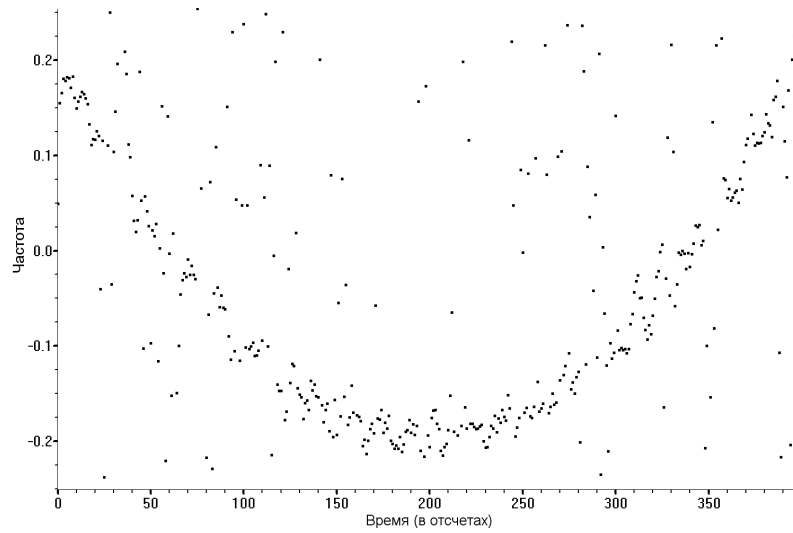


Рис. 3.40. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 10$ ) сигнала (2.11) с ОСШ=0 дБ

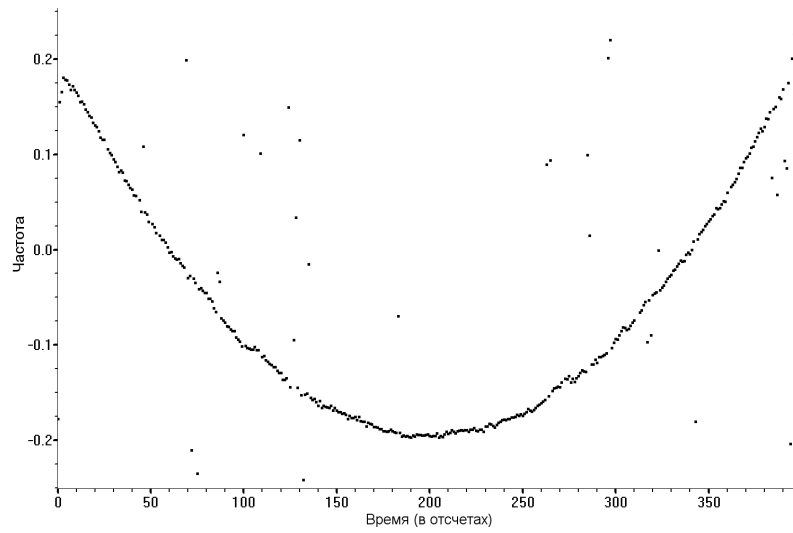


Рис. 3.41. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 30$ ) сигнала (2.11) с ОСШ=0 дБ

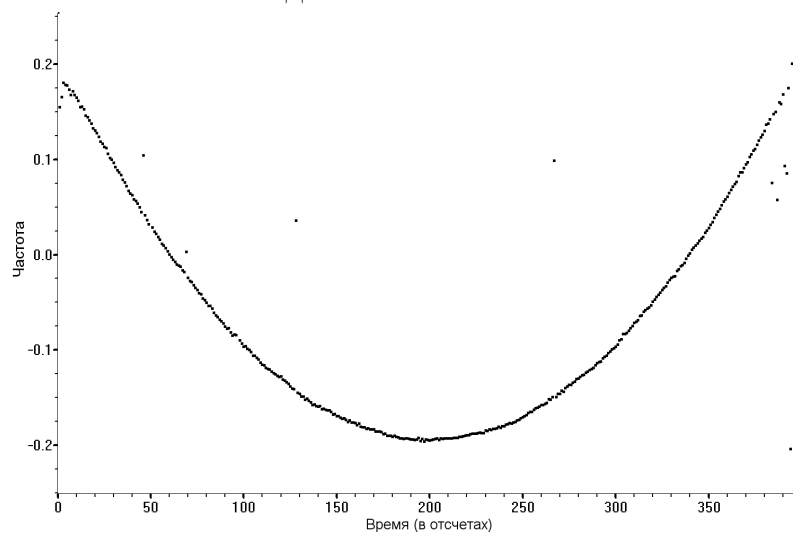


Рис. 3.42. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 50$ ) сигнала (2.11) с ОСШ=0 дБ

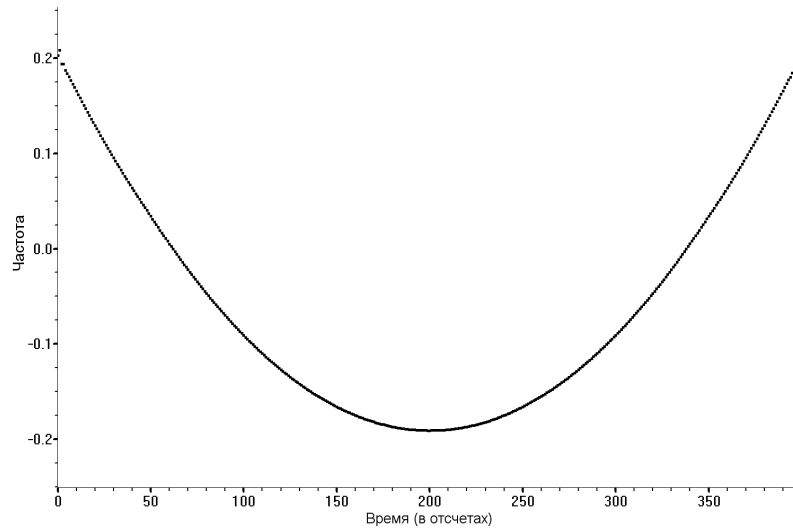


Рис. 3.43. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 100$ ) сигнала (2.11) с ОСШ=20 дБ

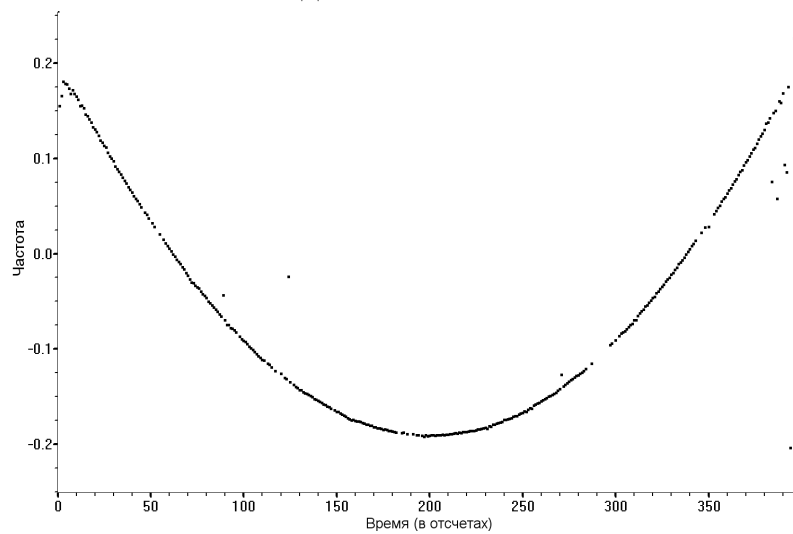


Рис. 3.44. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 100$ ) сигнала (2.11) с ОСШ=0 дБ

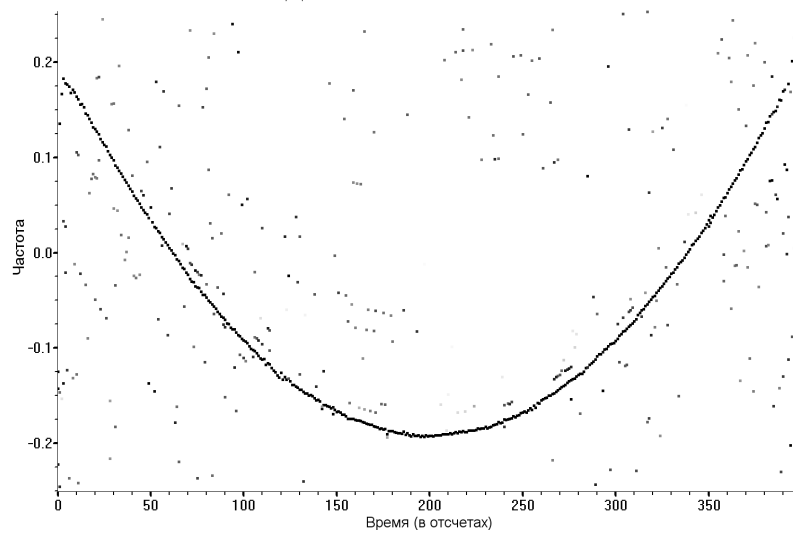


Рис. 3.45. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 100$   $p = 3$ ) сигнала (2.11) с ОСШ=0 дБ

Проверим, как на точность оценки частоты влияет расположение окна в сигнале.

На рис. 3.46 а, б представлены РПВООЧ, вычисленные для моментов времени соответствующих 50 и 200 отсчетам ЧВРЭ ( $N_{win} = 30$ ,  $p = 1$  ОСШ=20 дБ), из которых качественно можно видеть, что расположение окна не влияет на стандартное отклонение распределения, дополнительно к этому, оценка получилась смещенной, причем смещение не зависит от положения окна в сигнале. Распределения соответствуют гауссову с вероятностью превышающей 95% по критерию  $\chi^2$  [132, 133].

На рис. 3.47 представлены зависимости смещения среднего значения ошибки оценки частоты от размера окна. Смещения ООЧ не зависят от ОСШ.

Для сравнения на этом же рисунке приведена такая же зависимость для сигнала, определяемого выражением (2.12), цифровая частота которого меняется по параболе от 0.2 до  $-0.2$  и обратно за 800 отсчетов.

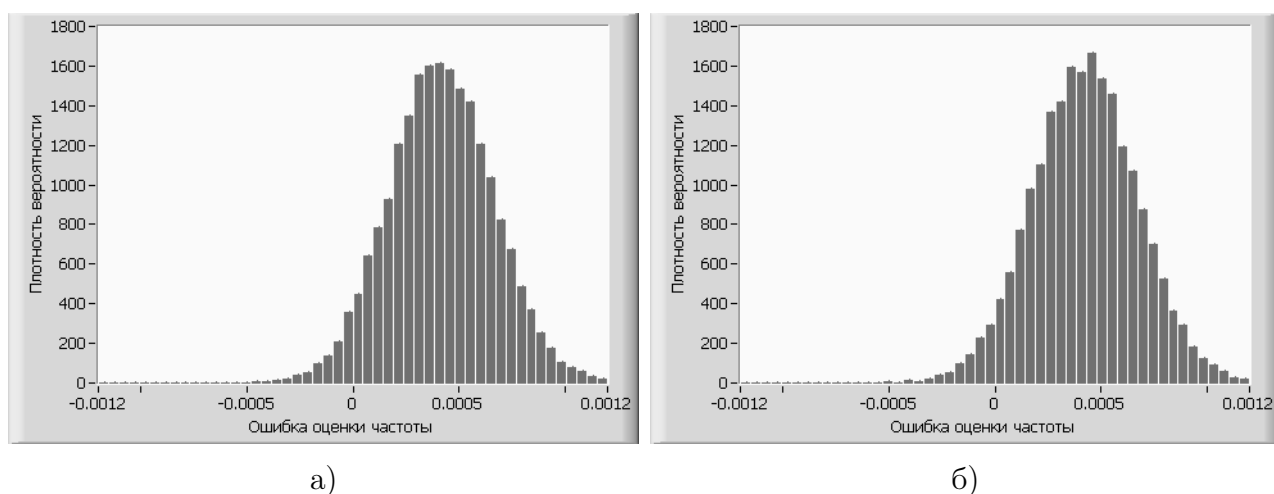


Рис. 3.46. РПВООЧ основной компоненты сигнала (2.11) (ОСШ=20 дБ), вычисленные для моментов времени соответствующих 50 (слева) и 200 (справа) отсчетам ЧВРЭ ( $N_{win} = 30$ )

Кривые с высокой точностью аппроксимируются (относительная ошибка аппроксимации не превышает  $10^{-2}$ ) выражением:

$$\varepsilon_{sr}[n] = 0.28 \cdot \alpha \cdot N_{win}^2, \quad (3.6)$$

где  $\alpha$  – коэффициент при  $n^3$  в выражениях (2.11) и (2.12).

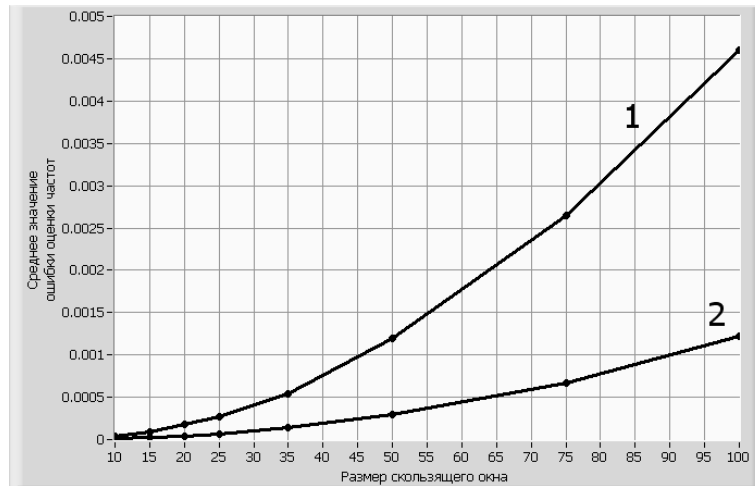


Рис. 3.47. Зависимости смещения среднего значения ошибки оценки частоты от размера окна (1 – для сигнала (2.11), 2 – для сигнала (2.12))

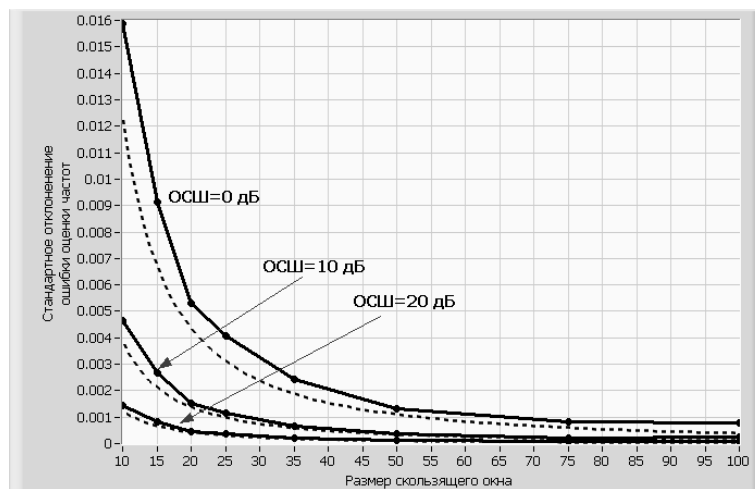


Рис. 3.48. Зависимости стандартного отклонения ошибки оценки частоты от размера и от ОСШ в сигнале (2.11)

На рис. 3.48 представлены зависимости стандартного отклонения ООЧ от размера окна в сигнале (2.11) с различными ОСШ. На графиках пунктирной кривой отображено минимально возможное стандартное отклонение ООЧ при анализе гармонического экспоненциального сигнала для данного размера окна и ОСШ (2.9). При размере окна до 50 отсчетов зависимости получаются точно такие же, как при анализе ЛЧМ сигналов. При размере окна от 75 до 100 отсчетов и низком ОСШ (0 дБ) точность оценки почти не изменяется, при этом РПВ ООЧ перестает быть гауссовым.

### 3.2.2. Влияние узкополосной помехи на точность измерений

В качестве примера рассмотрим результаты анализа сигнала, представленного выражением:

$$s[n] = \exp(j \cdot 2\pi \cdot (0.2 \cdot n - 0.001 \cdot n^2 + \frac{1}{1200000} \cdot n^3)) + 0.5 \cdot \exp(j \cdot 2\pi \cdot (-0.05) \cdot n),$$

$$n = 0, 1, \dots, 799,$$
(3.7)

где первая компонента – анализируемая ЧМ компонента сигнала, частота которой меняется по параболе от 0.2 до -0.2 и обратно (аналогично (2.12)), вторую гармоническую компоненту на цифровой частоте -0.05 будем считать узкополосной помехой. Отношение амплитуд равно 2 (отношение энергий примерно равно 6 дБ)

На рис. 3.49 представлено ЧВРЭ полученное с окном  $N_{win} = 10$  и количеством поисковых параметров  $p = 1$ .

Качественно можно видеть, что узкополосная помеха вызывает ошибки, которые проявляются в виде биений частоты основной ЧМ компоненты (рис. 3.49), период и амплитуда которых увеличиваются, когда разность частот между помехой и анализируемой компонентой уменьшается. Это явление объяснено в разделе 2.3.3.

Уменьшить ошибку можно, если увеличить размер окна (рис. 3.51) или количество поисковых параметров  $p$  (рис. 3.50). Одновременно увеличив  $N_{win}$  и  $p$  (рис. 3.52) можно достичь высокой точности, но при этом на ЧВРЭ появляются побочные компоненты, возникающие из-за присутствия в сигнале двух ЧМ компонент.

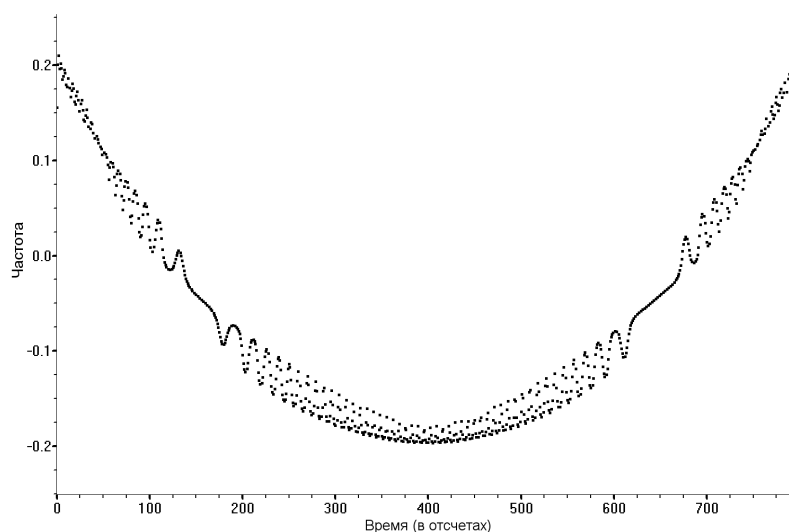


Рис. 3.49. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 10$ ,  $p = 1$ ) сигнала (3.7)

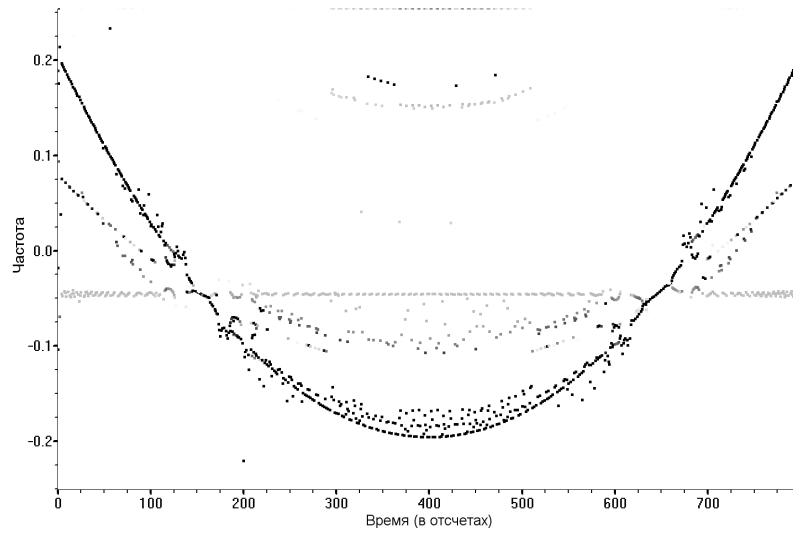


Рис. 3.50. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 10, p = 3$ ) сигнала (3.7)

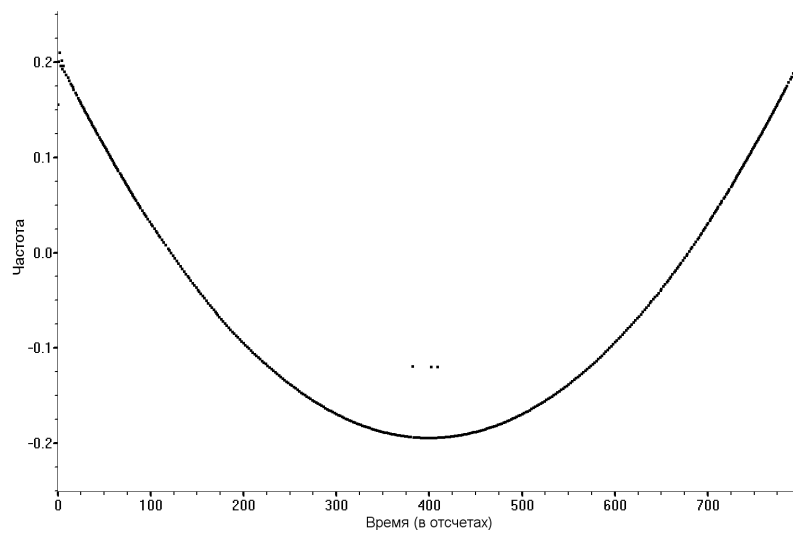


Рис. 3.51. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 100, p = 1$ ) сигнала (3.7)

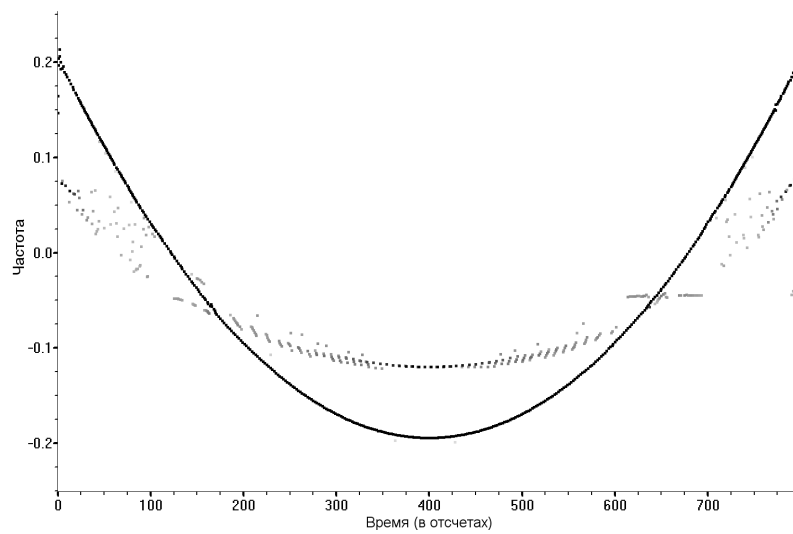


Рис. 3.52. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 100, p = 2$ ) сигнала (3.7)



### 3.3. Выводы

Описанный в данном разделе алгоритм предназначен для вычисления ЧВРЭ короткой реализации широкополосного ЧМ сигнала.

Проведенные исследования показали:

- применение данного алгоритма для анализа ЛЧМ сигналов с аддитивным белым гауссовым шумом позволяет получить несмещенную, эффективную и состоятельную оценку частоты, не зависящую от положения окна в сигнале, дисперсия ошибки примерно обратно пропорциональна длине окна в 3-ей степени;
- МПВВ способен работать с более длинным окном, чем метод ОМПО, что позволяет получить более высокую точность при анализе широкополосных ЧМ сигналов с аддитивным БГШ и узкополосными помехами;
- при анализе ЧМ сигналов с более сложным законом изменения частоты (по параболе) оценка частоты смещена и это смещение пропорционально квадрату длины окна и не зависит от ОСШ и положения скользящего окна в сигнале;
- эмпирически полученная формула для оценки смещения может помочь в некоторых случаях компенсировать методическую ошибку оценки частоты;
- ошибка оценки частоты, вызванная узкополосной помехой проявляется в виде биений частоты основной ЧМ компоненты, период и амплитуда которых увеличиваются, когда разность частот между помехой и анализируемой компонентой уменьшается. Уменьшить ошибку можно, если увеличить размер окна и количество поисковых параметров;
- точность оценки частоты уменьшается при анализе начального и конечного участков сигнала, что связано с перекрытием скользящего окна и края сигнала.

Таким образом данным методом анализа рекомендуется анализировать участки ЧМ сигналов с высокой скоростью изменения частоты.

## 4. Обработка экспериментальных данных

### 4.1. Проверка работоспособности разработанных методов при анализе данных, полученных при проведении физического эксперимента

Особенность установки состоит в том, что частота полученного на ней сигнала меняется по гармоническому закону. Зависимость скорости изменения частоты в точке перехода через "0" (максимальные отклонения маятника) близка к линейной, а в окрестности экстремумов частоты (скорость маятника максимальна) – близка к квадратичной.

Полученный на установке сигнал представляет физическую реализацию всех рассмотренных в предыдущих разделах тестовых сигналов. С точки зрения проблем обработки, такой сигнал можно считать «эталонным», т.к. период изменения частоты не превышает 10 периодов сигнала.

#### 4.1.1. Описание установки

Для тестирования работоспособности разработанных методов частотно-временного анализа при обработке данных, полученных в физическом эксперименте, была собрана установка [149–152].

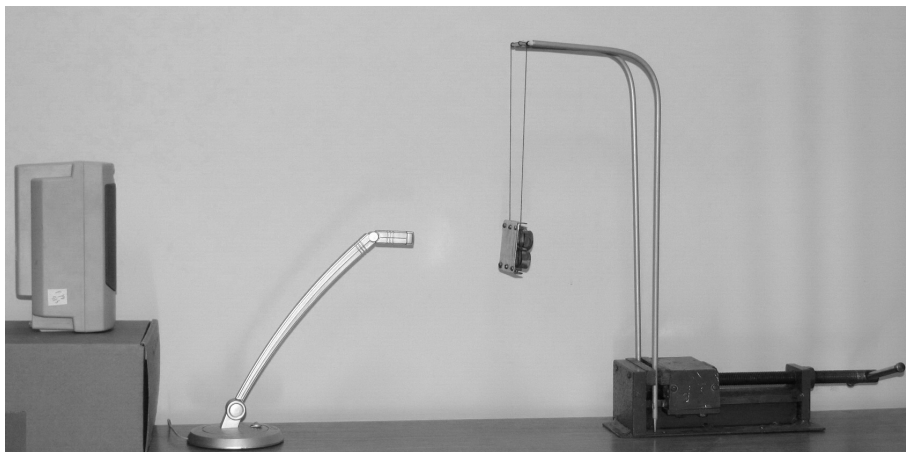


Рис. 4.1. Внешний вид установки "Маятник"

Установка (рис. 4.1) состоит из маятника, в качестве груза которого используется металлическая пластина, хорошо отражающая звук, микрофона, звуковых колонок и персонального компьютера. Микрофон и колонки соеди-

нены с соответствующими входами звукового адаптера на корпусе компьютера. Микрофон располагается между звуковыми колонками, излучающими синусоидальный сигнал, и маятником, так, чтобы звук, излучаемый колонками, отражаясь от качающейся пластины, попадал в него. Сигнал, считанный с микрофона (с частотой дискретизации 44100 Гц), записывается на диск компьютера в виде текстового файла.

Полученный на такой установке сигнал интересен тем, что кроме компоненты на основной частоте, излучаемой колонками, в нем присутствует более слабая частотная компонента отраженного от качающейся со скоростью  $V$  пластины звукового сигнала с доплеровским сдвигом частоты [1]:

$$f_{dop} = 2V/\lambda, \quad (4.1)$$

где  $\lambda = c/f$  – длина звуковой волны,  $c \approx 331$  м/с – скорость звука,  $f$  – частота звукового сигнала, излучаемого колонками ( $\lambda \approx 75$  мм для  $f = 4410$  Гц).

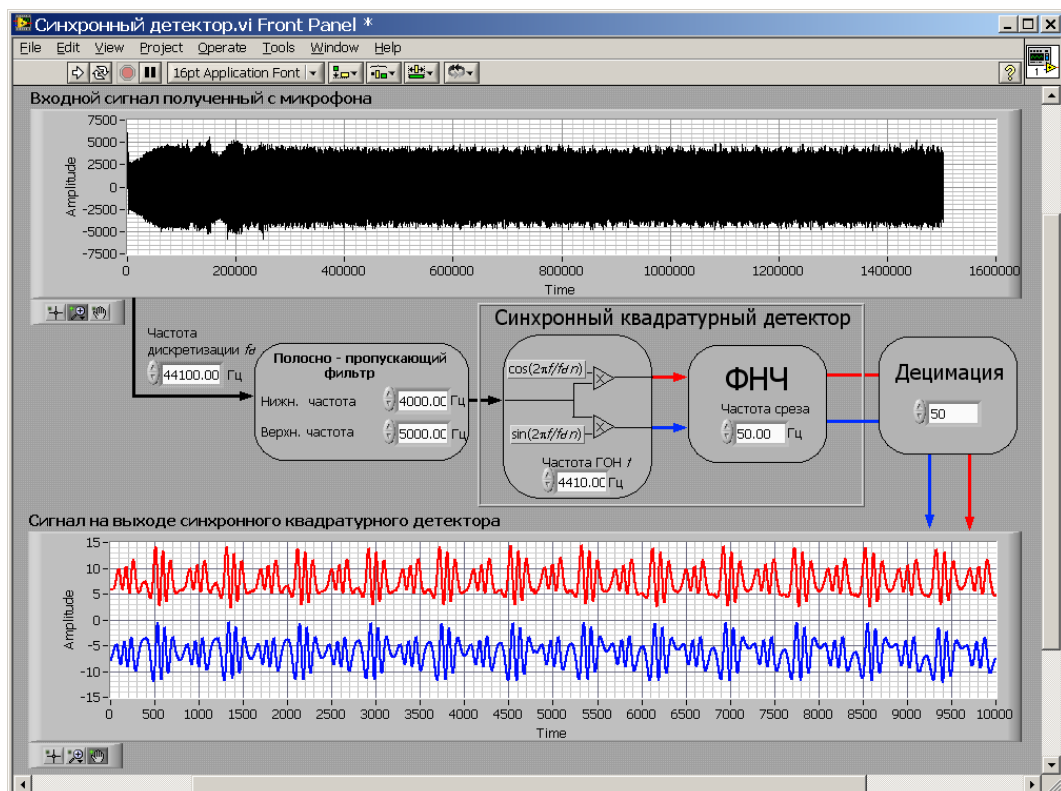


Рис. 4.2. Виртуальный прибор, выполняющий предварительную обработку данных

При частоте звукового сигнала 4410 Гц доплеровский сдвиг частоты отраженного от качающейся пластины сигнала не превысит 20 Гц. Также в сигнале присутствуют шумы квантования, гармоники, возникающие из-за нелиней-

ности звукового адаптера компьютера, а также различные звуковые помехи (шум вентиляторов компьютера, посторонние звуки в помещении).

Перед вычислением ЧВРЭ выполнялась программная предварительная обработка сигнала (рис. 4.2), которая заключалась в фильтрации полосовым фильтром [153] (с частотами среза 4 кГц и 5 кГц), квадратурном синхронном преобразовании, децимации (с шагом 50) и удалении постоянной составляющей. Осциллограмма квадратурных составляющих полученного сигнала (после предварительной обработки) представлена на рис. 4.3

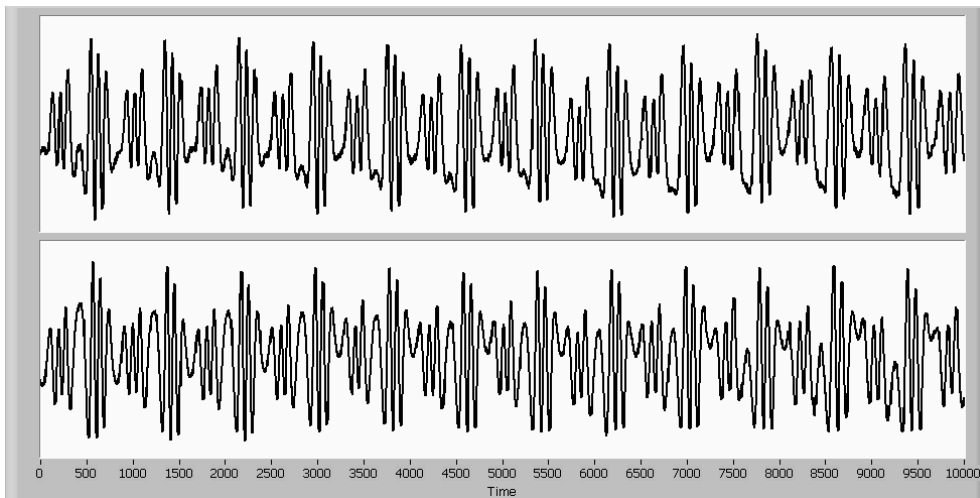


Рис. 4.3. Осциллограмма квадратурных составляющих полученного на установке "Маятник" сигнала после предварительной обработки

На рис. 4.4 представлена периодограмма полученного сигнала после предварительной обработки.

#### 4.1.2. Вычисление частотно-временного распределения энергии

На рис. 4.5 – 4.7 представлены ЧВРЭ сигнала, полученного на установке "Маятник" вычисленные с различными размерами окон ( $N_{win}$ ) и количеством поисковых параметров  $p = 1$ . При размере окна менее 150 отсчетов появляются дополнительные ошибки (рис. 4.8) в ЧМ компоненте (аналогичные описанным в разделе 3.2.2 на стр. 103), которые можно ослабить увеличив число параметров поиска (рис. 4.9)

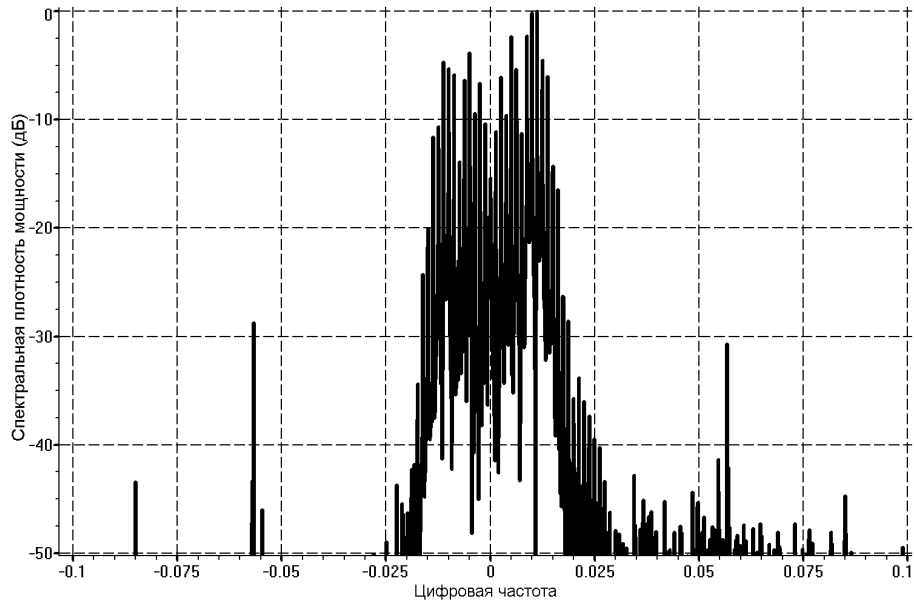


Рис. 4.4. Периодограмма полученного на установке "Маятник" сигнала после предварительной обработки

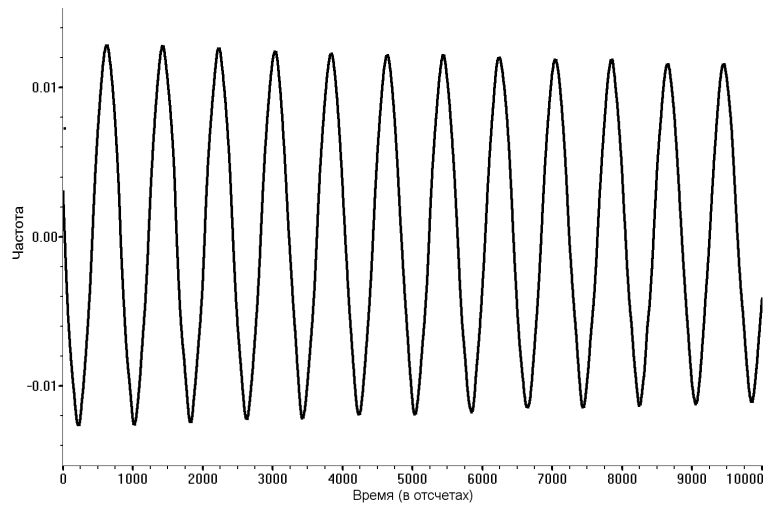


Рис. 4.5. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 160$ ,  $p = 1$ ) сигнала полученного на установке "Маятник"

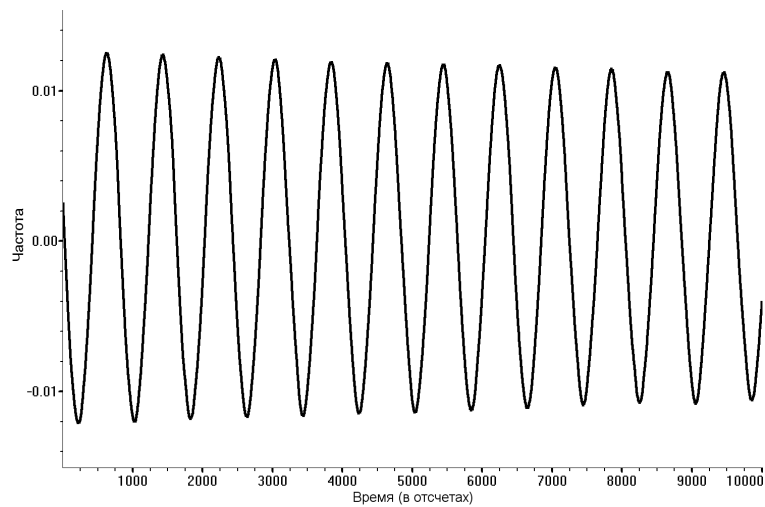


Рис. 4.6. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 200$ ,  $p = 1$ ) сигнала полученного на установке "Маятник"

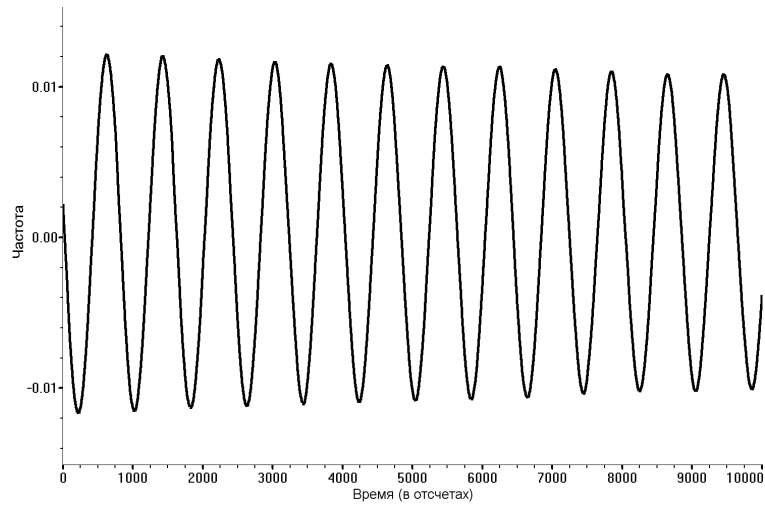


Рис. 4.7. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 250$ ,  $p = 1$ ) сигнала полученного на установке "Маятник"

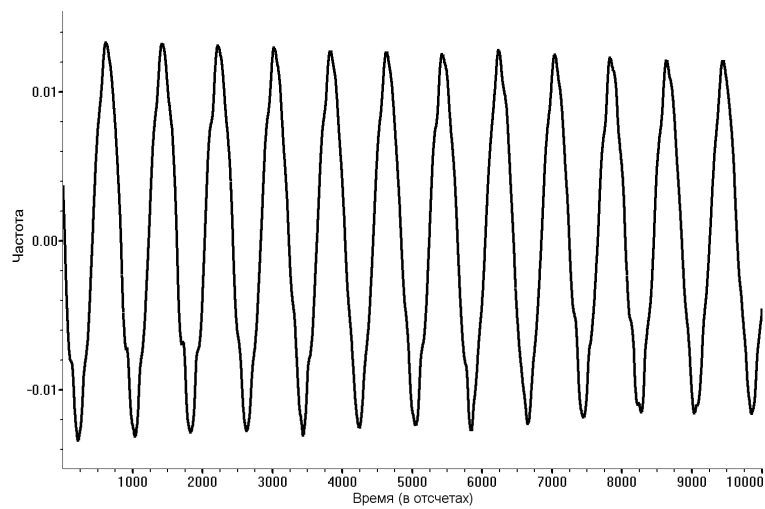


Рис. 4.8. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 100$ ,  $p = 1$ ) сигнала полученного на установке "Маятник"

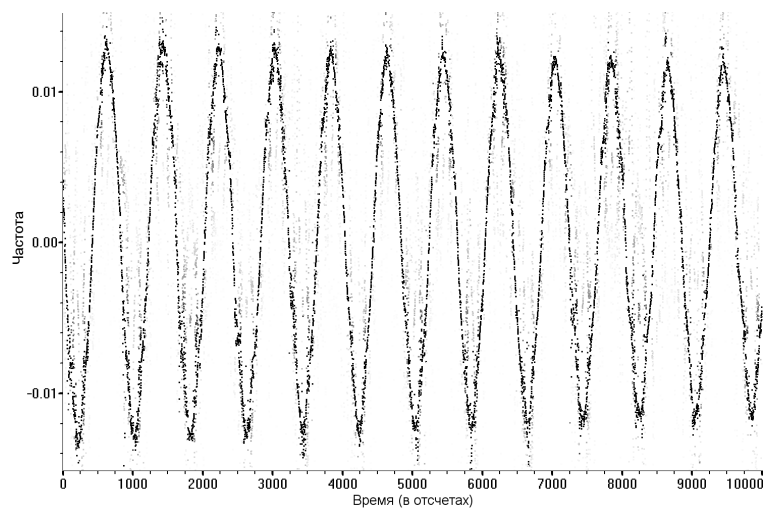


Рис. 4.9. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 100$ ,  $p = 4$ ) сигнала полученного на установке "Маятник"

Качественно можно видеть, что в сигнале присутствует ЧМ компонента, мгновенная частота которой меняется по синусоидальному закону с пери-

одом равным 804 отсчета (0.91 с), с небольшим затуханием (коэффициент затухания равен  $-1.38 \cdot 10^{-5}$ ). При увеличении размера окна увеличивается смещение оценки частоты. В окрестности точек с максимальными и минимальными значениями частот ЧМ компоненту можно аппроксимировать параболой и оценить смещение по формуле (3.6), а в окрестности точек с нулевой частотой ЧМ компоненту можно аппроксимировать прямой линией (смещение частоты отсутствует).

Используя формулу (3.6), оценим точное значение частоты в первом нижнем экстремуме ЧМ компоненты. Для этого запишем формулу (3.6) по другому:

$$\tilde{f} - f_{N_{win}} = 0.28 \cdot \alpha \cdot N_{win}^2, \quad (4.2)$$

где  $\tilde{f}$  – точное значение частоты в точке первого экстремума частоты,  $f_{N_{win}}$  – вычисленное значение частоты с помощью МПВВ с размером окна  $N_{win}$ . Записав выражение (4.2) для двух значений  $f_{N_{win}}$ , вычисленных с различными размерами окон, и, разделив одно на другое, можно получить новое выражение:

$$\tilde{f} = \frac{f_{N_{win_1}} \cdot N_{win_2}^2 - f_{N_{win_2}} \cdot N_{win_1}^2}{N_{win_2}^2 - N_{win_1}^2}.$$

Вычислим полученное выражение для следующих значений:

$$N_{win_1} = 160, \quad f_{N_{win_1}} = -0.0127;$$

$$N_{win_2} = 200, \quad f_{N_{win_2}} = -0.0124;$$

$$N_{win_3} = 250, \quad f_{N_{win_3}} = -0.0119.$$

$$\text{Для } N_{win_1} \text{ и } N_{win_2}: \quad \tilde{f} = -0.01323,$$

$$\text{для } N_{win_2} \text{ и } N_{win_3}: \quad \tilde{f} = -0.01328,$$

$$\text{для } N_{win_1} \text{ и } N_{win_3}: \quad \tilde{f} = -0.01326.$$

Полученные значения частоты отличаются в 5-ом знаке (или на 0.2%). Совпадение результатов при трех независимых вычислениях подтверждает правильность оценки частоты.

Оценим максимальную скорость маятника с учетом выражения (4.1):

$$V = \frac{\lambda \cdot f_{dop}}{2},$$

где  $\lambda = 0.075$  м,  $f_{dop} = 0.01326 \cdot 44100/50 = 11.7$  Гц – доплеровское смещение частоты (44100 – частота дискретизации в Гц, 50 – шаг децимации. С учетом этих значений  $V = 0.075 \cdot 11.7/2 \approx 0.44$  м/с, которая хорошо согласуется со скоростью вычисленной через геометрические параметры маятника:

$$V = \sqrt{2gh} = \sqrt{2 \cdot 9.81 \cdot 0.01} \approx 0.44 \text{ м/с},$$

где  $h = 0.01$  м – начальная высота центра масс пластины.

Для сравнения на рис. 4.10 – 4.13 представлены ЧВРЭ, вычисленные методом ОМПО с различными размерами окон. Качественно можно видеть, что уже при размере окна  $N_{win} = 160$  отсчетов (рис. 4.10) появляются искажения, аналогичные приведенным в разделе 2.3.2 на стр. 62. При уменьшении размера окна, появляются искажения, аналогичные приведенным в разделе 2.3.3 на стр. 71. Частота сигнала изменяется настолько быстро, что не помогает увеличение числа поисковых параметров  $p$  в методе (рис. 4.13).

На рис. 4.14 представлен закон изменения мгновенной цифровой частоты сигнала, полученного на установке «Маятник», вычисленный с помощью алгоритма обработки радиолокационного сигнала, основанного на понятии «Мгновенная частота аналитического сигнала» [2], на рис. 4.15 – с последующей фильтрацией ФНЧ с цифровой частотой среза 0.01. Качественно можно видеть, что данный метод чувствителен к шуму и дополнительным частотным компонентам, присутствующим в реальном сигнале.

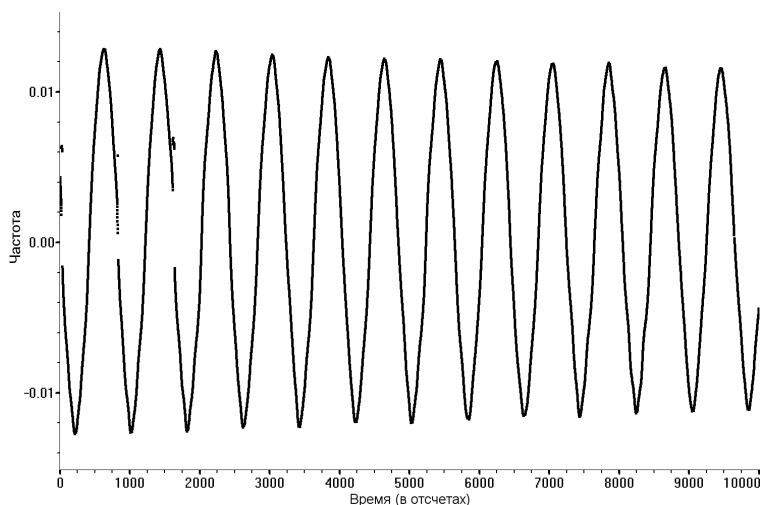
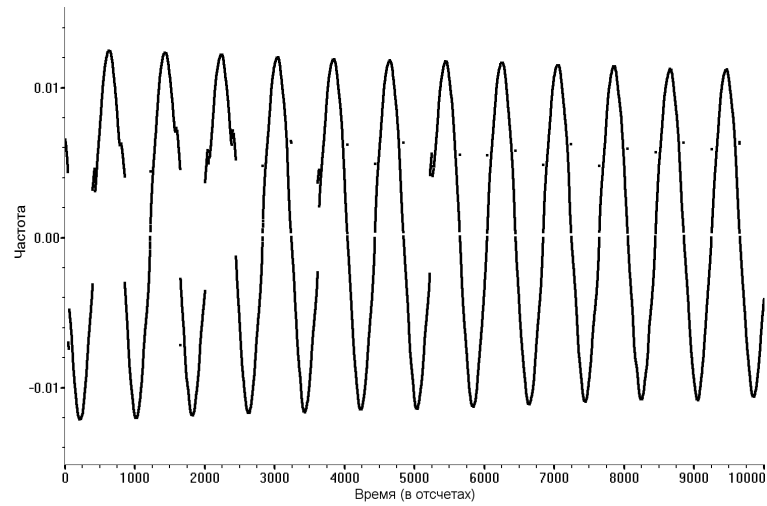
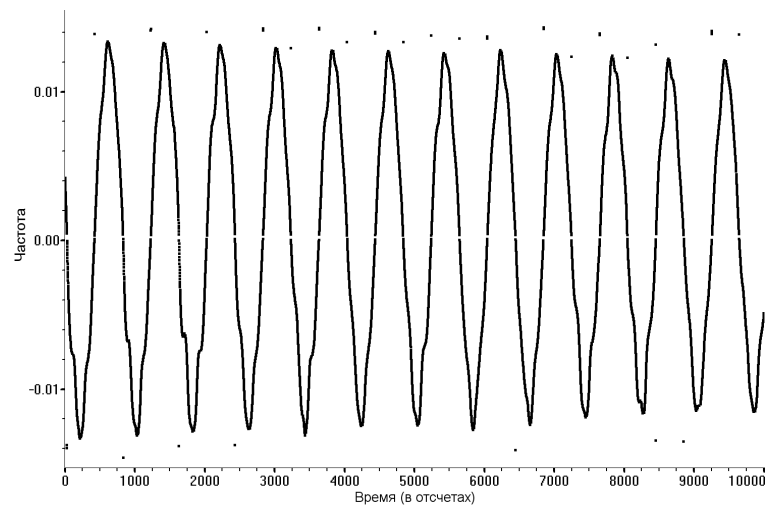
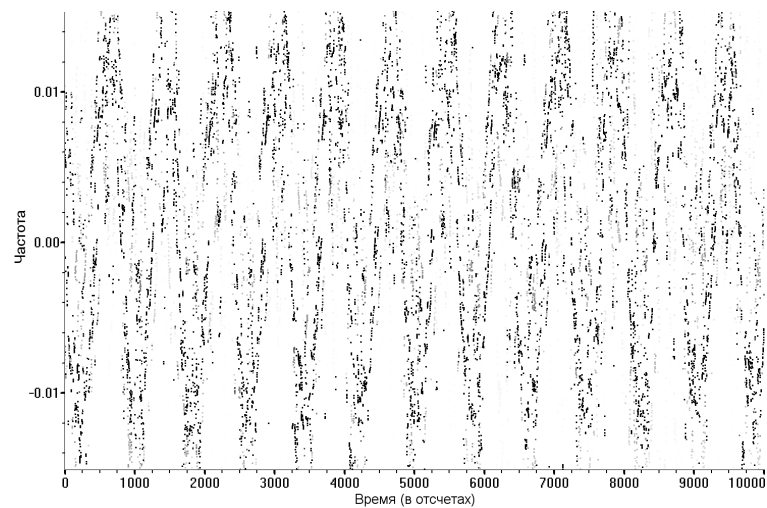


Рис. 4.10. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 160$ ,  $p = 1$ ) сигнала полученного на установке "Маятник"



Рис. 4.11. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 200, p = 1$ ) сигнала полученного на установке "Маятник"Рис. 4.12. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 100, p = 1$ ) сигнала полученного на установке "Маятник"Рис. 4.13. ЧВРЭ ОМПО ( $N_{win} = 100, p = 4$ ) сигнала полученного на установке "Маятник"

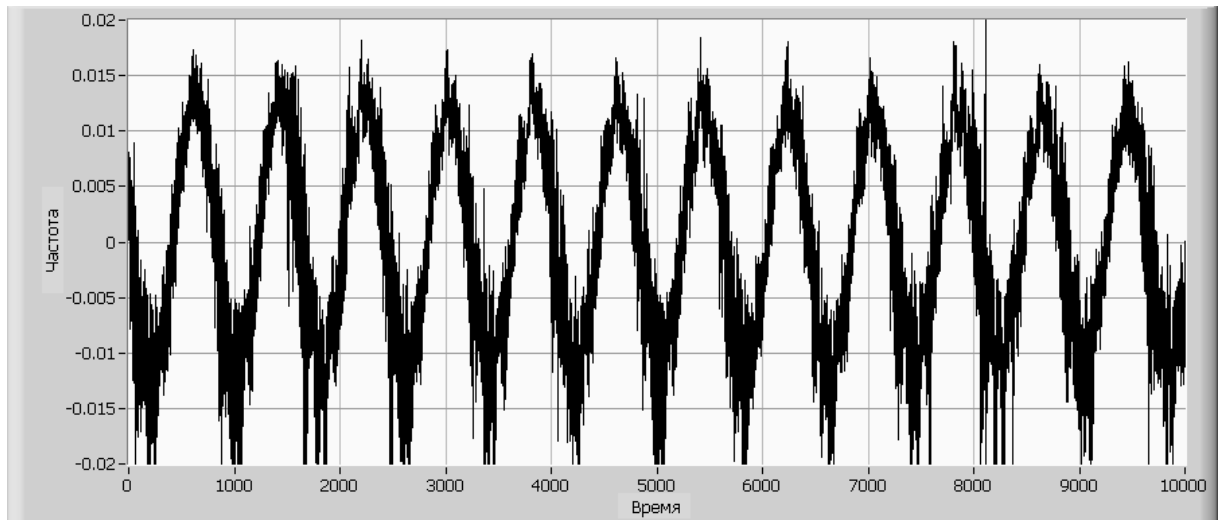


Рис. 4.14. Закон изменения мгновенной цифровой частоты сигнала, полученного на установке "Маятник" методом МЧАС

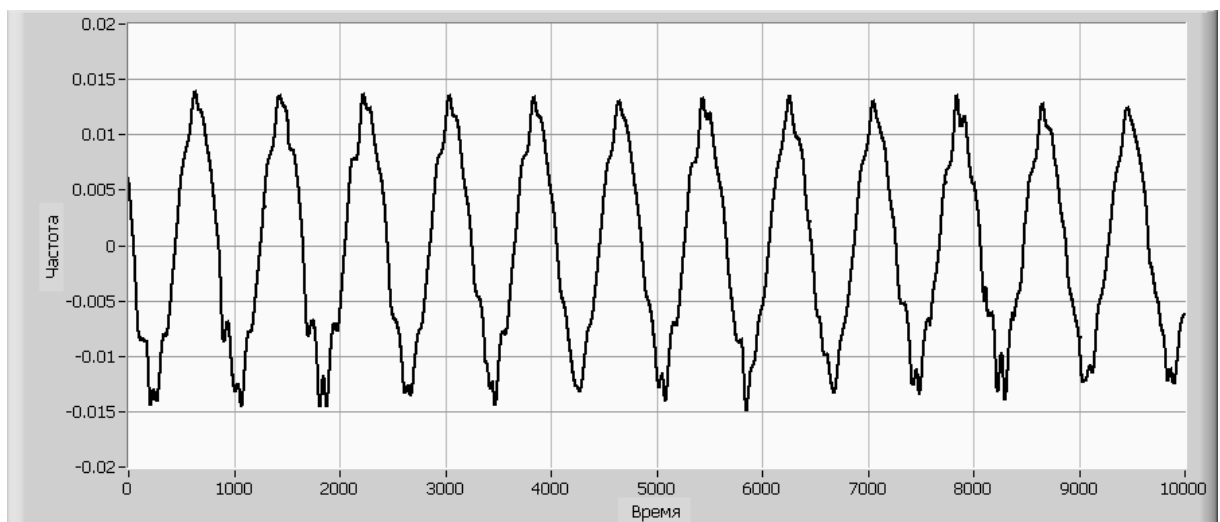


Рис. 4.15. Закон изменения мгновенной цифровой частоты сигнала, полученного на установке "Маятник" методом МЧАС с последующей фильтрацией ФНЧ с цифровой частотой среза 0.01

## 4.2. Обработка интерферометрических данных, полученных в опытах по метанию стальной пластины продуктами взрыва заряда из тротила

### 4.2.1. Описание эксперимента

Институтом экспериментальной газодинамики и физики взрыва (ИФВ РФЯЦ – ВНИИЭФ) были предоставлены данные, полученные в экспериментах по оценке метательной способности взрывчатых веществ. В этих экспериментах проводилась регистрация процесса метания стальной пластины продуктами взрыва заряда из тротила. Схема эксперимента представлена на рис. 4.16. Регистрация процесса производилась при помощи радиоинтерферометра с длиной волны 3.2 мм.

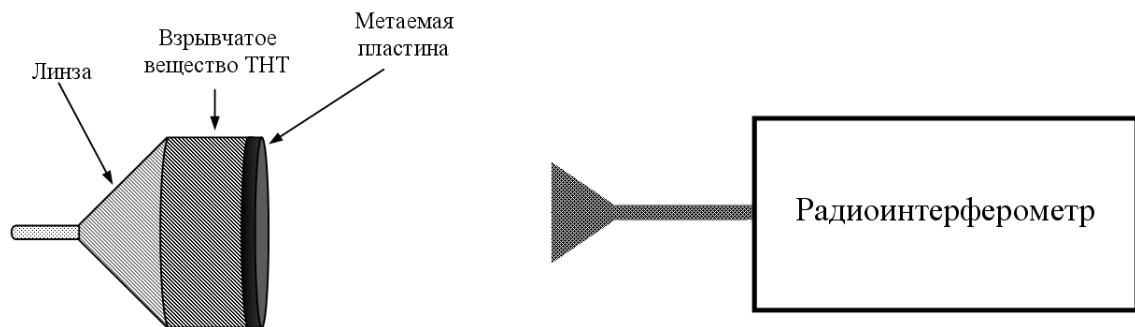


Рис. 4.16. Условная схема эксперимента по метанию стальной пластины продуктами взрыва заряда из тротила

Эксперименты интересны тем, что скорость пластины возрастает за несколько микросекунд от 0 до нескольких километров в секунду. Изменение скорости происходит не плавно, а ступеньками, причем изменение скорости происходит за сотые доли микросекунды, что существенно меньше половины периода интерферограммы. Количество периодов в интерферограммах не превышает 40, но наибольший интерес для исследователей представляют начальные участки, на которых мгновенная частота основной компоненты меняется от нулевой до установившейся примерно за 10 периодов.

Квадратурный сигнал на выходе радиоинтерферометра оцифровывался аналого-цифровым преобразователем с частотой дискретизации 1 ГГц в первом опыте и 1.25 ГГц во втором и третьем опытах, затем выполнялась программная предварительная обработка сигнала, которая заключалась в синхронном преобразовании, в децимации и удалении постоянной составляющей.

Учитывая, то что для анализа интерферограммы наиболее интересен начальный участок, на котором происходит быстрое изменение частоты, ЧВРЭ будем вычислять МПВВ.

На ЧВРЭ по оси ординат будут указаны цифровые частоты  $f$ , которые можно пересчитать в скорость пластины  $V$  по формуле [2]:

$$V = \frac{\lambda}{2\sqrt{\varepsilon}} \cdot f \cdot f_s,$$

где  $\lambda = 3.2 \cdot 10^{-3}$  м – длина волны радиоинтерферометра,  $f_s$  – частота дискретизации с учетом шага децимации.

#### 4.2.2. Частотно-временное распределение энергии интерферограммы, полученной в первом опыте

В данном эксперименте установившаяся скорость метаемой пластины достигала 6.2 км/с. Осциллограмма квадратурных составляющих зарегистрированного сигнала представлена на рис. 4.17. Шаг децимации в предварительной обработке сигнала равен 20.

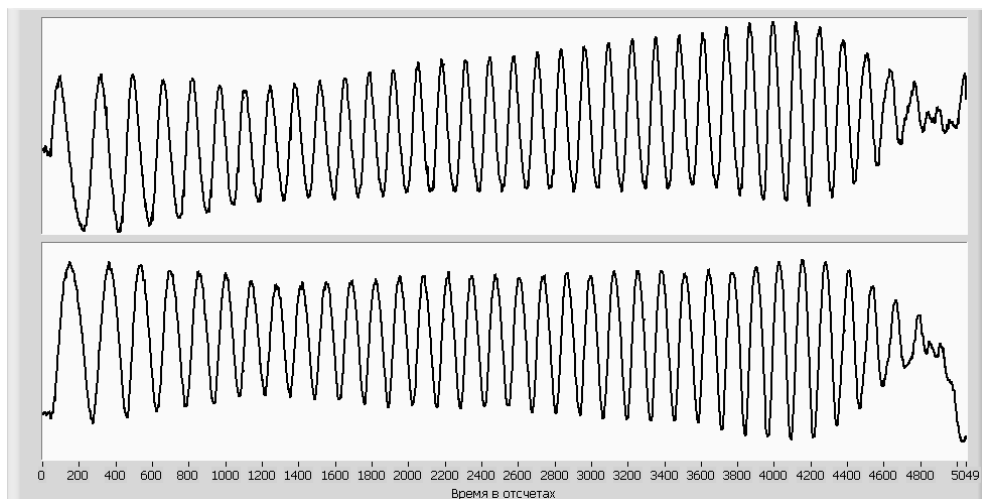


Рис. 4.17. Интерферограмма, полученная в первом опыте по метанию пластины продуктами взрыва заряда из тротила

На рис. 4.18 представлена периодограмма [134], на которой видно, что, кроме основной компоненты (примерно на цифровой частоте 0.0075), в сигнале присутствует постоянная составляющая ( $\sim -10$  дБ) и компонента на двойной частоте ( $\sim -22$  дБ)

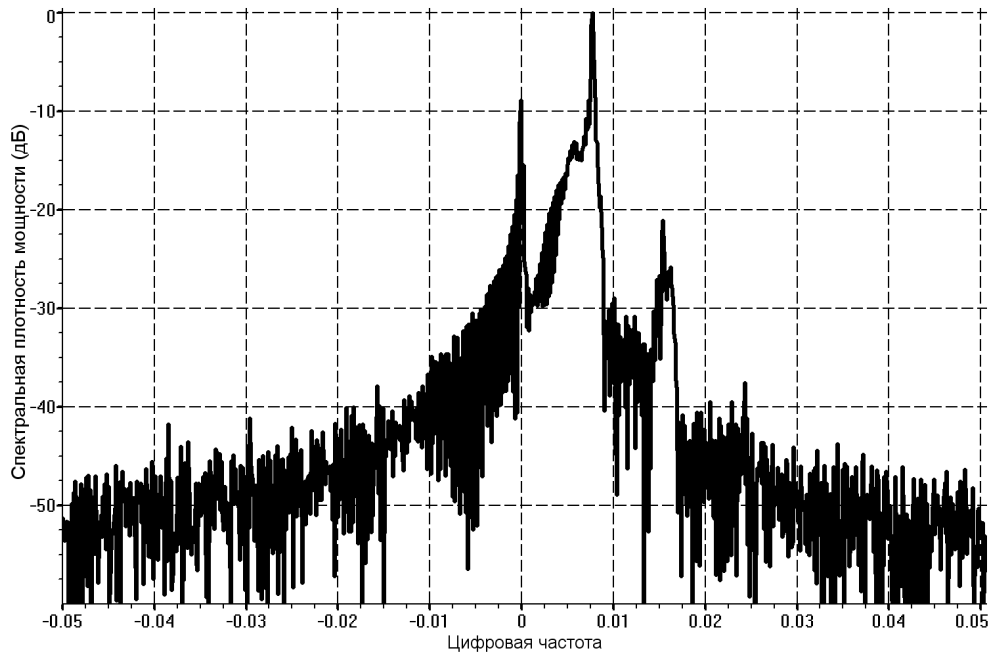
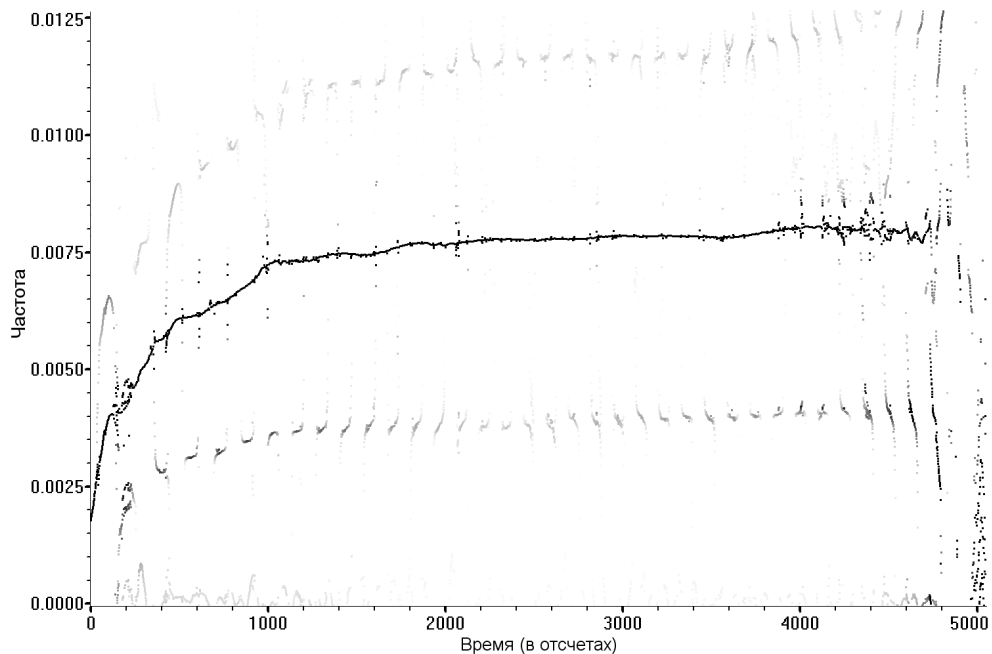


Рис. 4.18. Периодограмма интерферограммы

На рис. 4.19 представлено ЧВРЭ, вычисленное МПВВ с размером окна  $N_{win} = 300$  и количеством поисковых параметров  $p = 4$ . По оси ординат отложены цифровые частоты от 0 до 0.0125, которые соответствуют скорости пластины от 0 до 10 км/с.

Рис. 4.19. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 300$ ,  $P = 4$ )

На ЧВРЭ хорошо видна основная ЧМ компонента, частота которой на начальном участке возрастает ступеньками, что согласуется с теорией процесса [20].

Кроме основной ЧМ компоненты на ЧВРЭ видны побочные продукты, полученные из-за нелинейного преобразования (присутствующего в МПВВ) основной ЧМ компоненты, постоянной составляющей и ЧМ компоненты на двойной частоте. Побочные продукты легко отличить по их характерной периодической структуре.

На рис. 4.20 представлен закон изменения мгновенной цифровой частоты интерферограммы вычисленный с помощью алгоритма, основанного на понятии «Мгновенная частота аналитического сигнала» (МЧАС) [2, 154], на рис. 4.21, 4.22 – с последующей фильтрацией ФНЧ с цифровой частотой среза 0.002 и 0.001 соответственно.

Качественно можно видеть, что, в отличие от ЧВРЭ, вычисленного МПВВ, метод МЧАС чувствителен к шуму и дополнительным частотным компонентам, присутствующих в реальном сигнале, фильтрация которых сильно сглаживает ступенчатый характер изменения частоты основной ЧМ

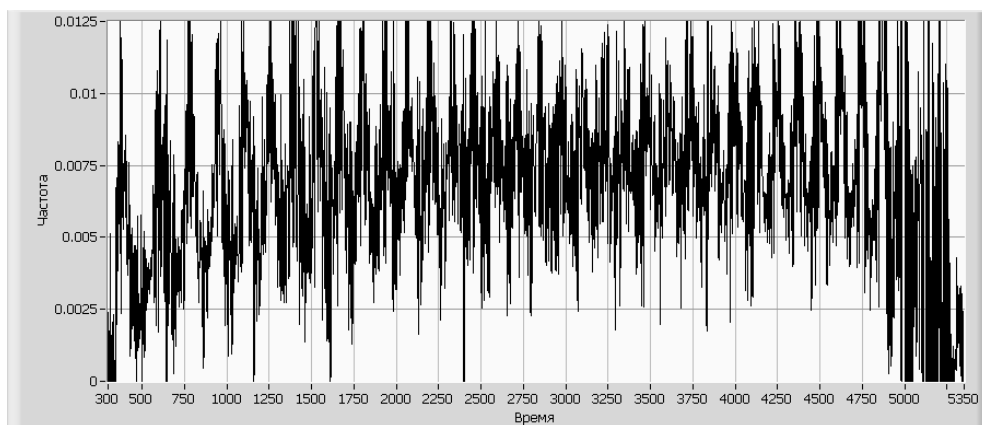


Рис. 4.20. Закон изменения мгновенной цифровой частоты интерферограммы, вычисленный методом МЧАС

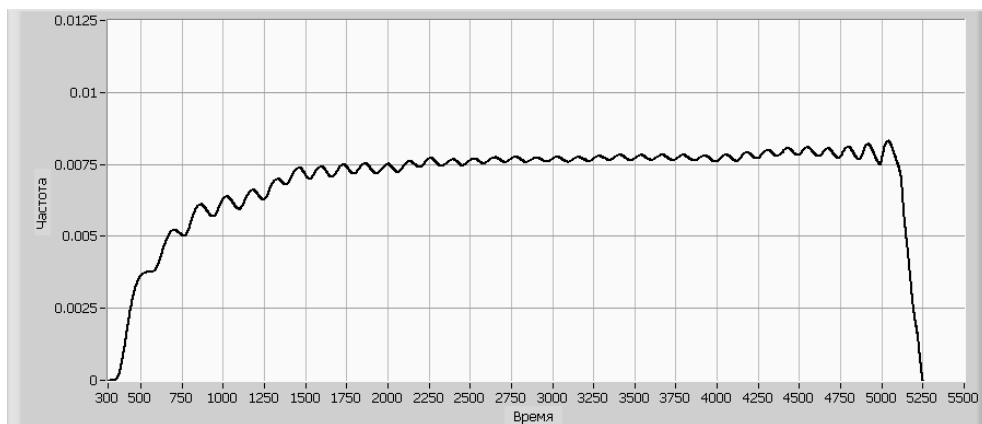


Рис. 4.21. Закон изменения мгновенной цифровой частоты интерферограммы, вычисленный методом МЧАС с последующей фильтрацией ФНЧ с частотой среза 0.002

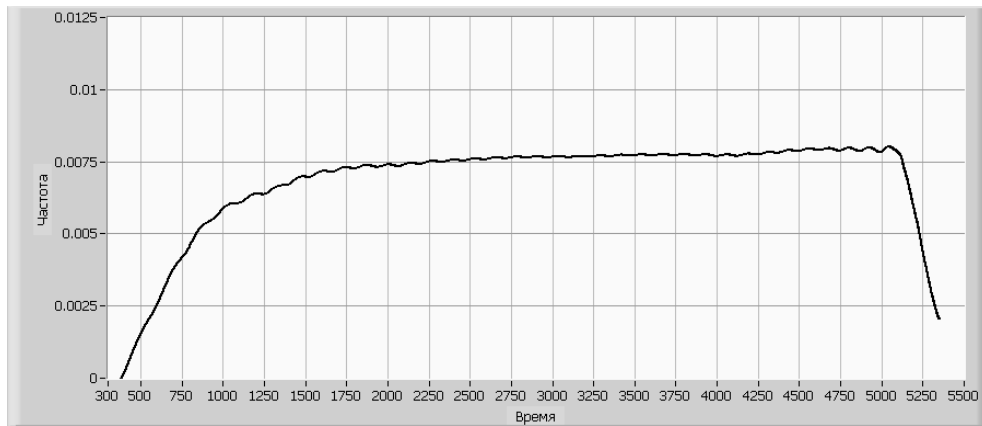


Рис. 4.22. Закон изменения мгновенной цифровой частоты интерферограммы, вычисленный методом МЧАС с последующей фильтрацией ФНЧ с частотой среза 0.001

КОМПОНЕНТЫ.

### 4.2.3. Частотно-временное распределение энергии интерферограммы, полученной во втором опыте

В отличие от первого опыта второй эксперимент был построен так, что в полученном сигнале присутствует большее количество гармоник, возникших из-за дополнительных переотражений электромагнитной волны между метаемой пластиной и антенной.

Шаг децимации в предварительной обработке сигнала равен 20. Установившаяся скорость пластины в этом эксперименте достигала 6.3 км/с.

Осциллограмма квадратурных составляющих полученного во втором опыте сигнала представлена на рис. 4.23

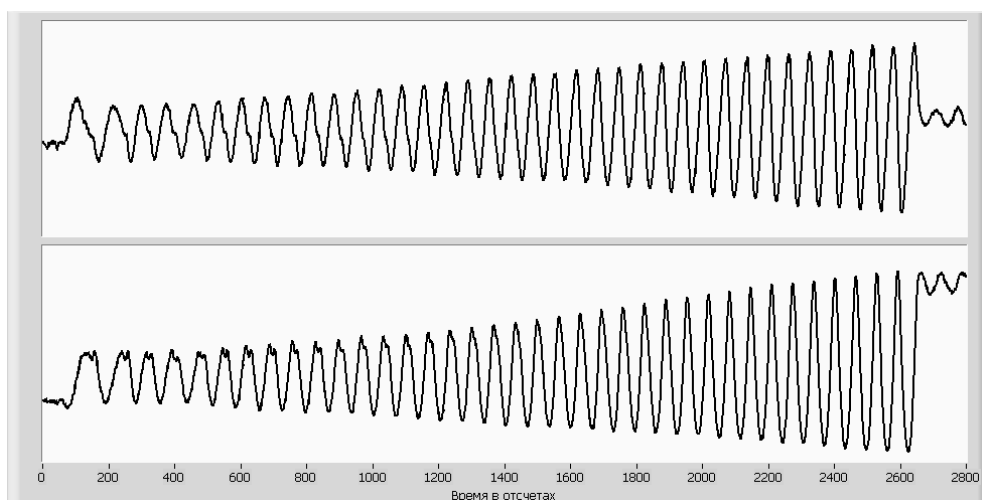


Рис. 4.23. Интерферограмма, полученная во втором опыте по метанию пластины продуктами взрыва заряда из тротила

На рис. 4.24 представлена периодограмма [134], на которой видно, что, кроме основной компоненты (примерно на цифровой частоте 0.015), в сигнале присутствует постоянная составляющая ( $\sim -2$  дБ) и компоненты на двойной ( $\sim -18$  дБ), тройной ( $\sim -32$  дБ) частоте.

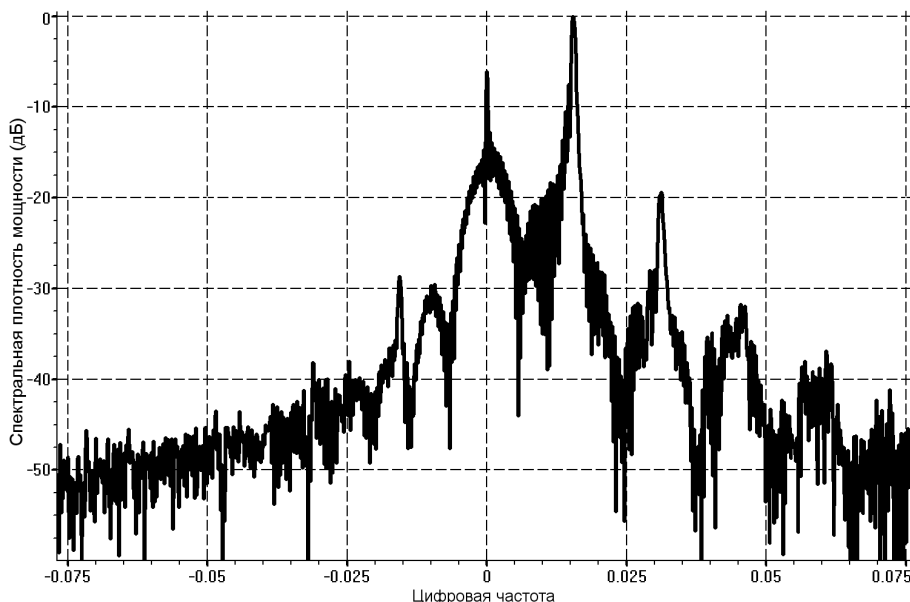


Рис. 4.24. Периодограмма интерферограммы

На рис. 4.25 представлено ЧВРЭ, вычисленное МПВВ с размером окна  $N_{win} = 300$  и количеством поисковых параметров  $p = 5$ . По оси ординат отложены цифровые частоты от 0 до 0.025, которые соответствуют скорости пластины от 0 до 10 км/с.

На ЧВРЭ хорошо видна основная ЧМ компонента, частота которой на начальном участке возрастает ступеньками, однако скорость изменения частоты настолько велика, что метод не показал первую ступеньку, которая должна присутствовать в сигнале в районе частот 0.005-0.01. Кроме основной ЧМ компоненты на распределении видны побочные продукты, полученные из-за нелинейного преобразования (присутствующего в МПВВ) основной ЧМ компоненты, постоянной составляющей и ЧМ компонент на кратных частотах. Побочные продукты легко отличить по их характерной периодической структуре.

На рис. 4.26 представлен закон изменения мгновенной цифровой частоты интерферограммы вычисленный с помощью алгоритма МЧАС [2, 154], на рис. 4.27, 4.28 – с последующей фильтрацией ФНЧ с цифровой частотой среза 0.003 и 0.002 соответственно.



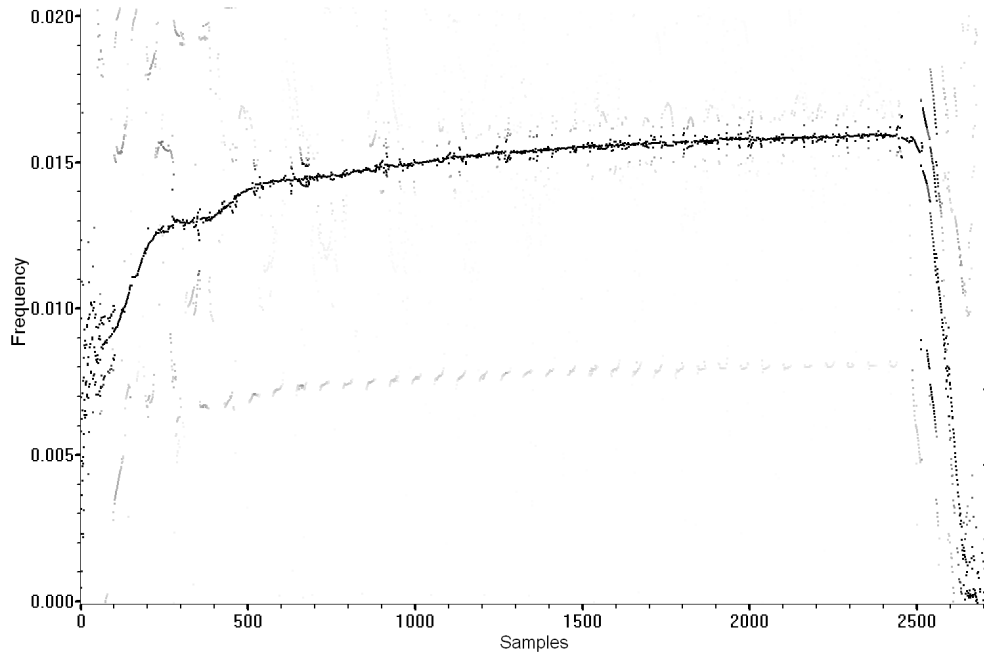


Рис. 4.25. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 300, P = 5$ )

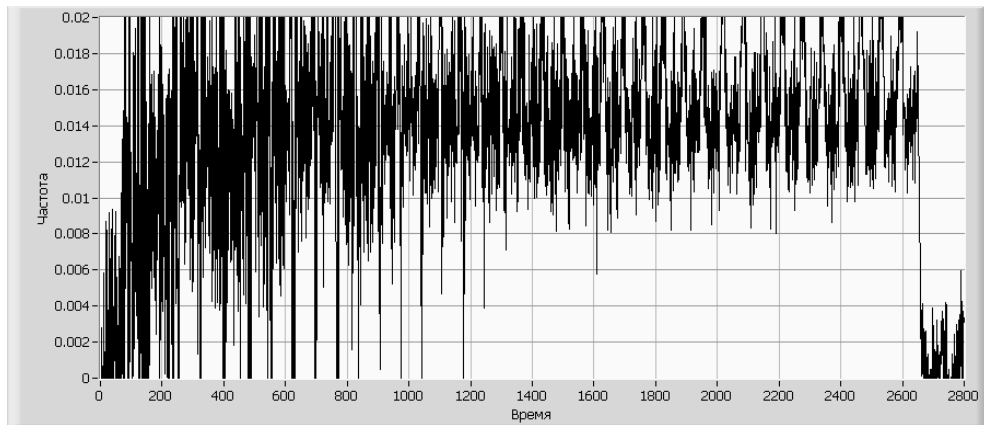


Рис. 4.26. Закон изменения мгновенной цифровой частоты интерферограммы, вычисленный методом МЧАС

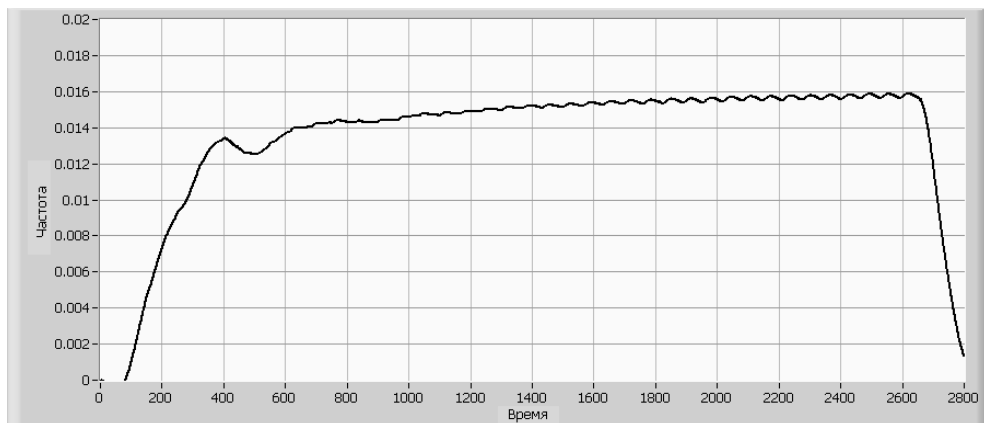


Рис. 4.27. Закон изменения мгновенной цифровой частоты интерферограммы, вычисленный методом МЧАС с последующей фильтрацией ФНЧ с частотой среза 0.003

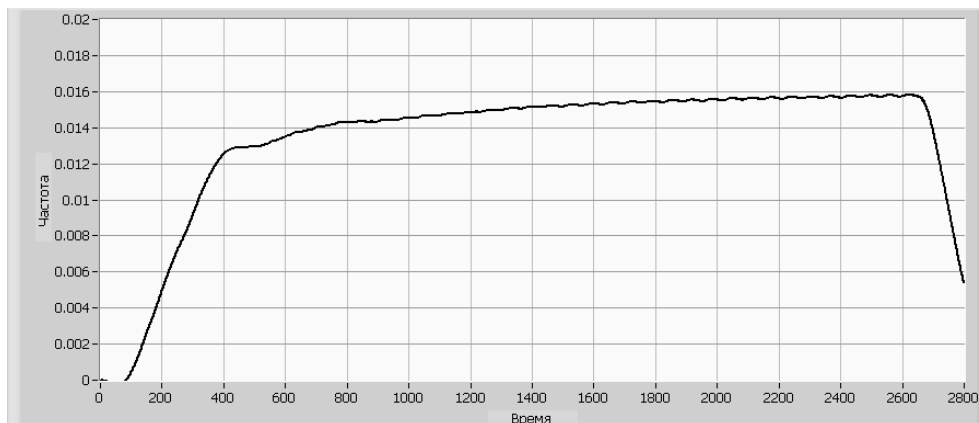


Рис. 4.28. Закон изменения мгновенной цифровой частоты интерферограммы, вычисленный методом МЧАС с последующей фильтрацией ФНЧ с частотой среза 0.002

Качественно можно видеть, что, в отличие от ЧВРЭ, вычисленного МПВВ, метод МЧАС чувствителен к шуму и дополнительным частотным компонентам, присутствующим в реальном сигнале, фильтрация которых сильно сглаживает ступенчатый характер изменения частоты основной ЧМ компоненты.

#### 4.2.4. Частотно-временное распределение энергии интерферограммы, полученной в третьем опыте

В отличие от предыдущих двух опытов, второй канал интерферограммы имеет сильные нелинейные искажения, полученные во время проведения эксперимента.

Шаг децимации в предварительной обработке сигнала равен 5. Установившаяся скорость пластины в этом эксперименте достигала 5.9 км/с.

Осциллограмма квадратурных составляющих полученного в третьем опыте сигнала (после предварительной обработки) представлена на рис. 4.29

На рис. 4.30 представлена периодограмма [134], на которой видно, что, кроме основной компоненты (примерно на цифровой частоте 0.014), в сигнале присутствует частотная компонента на противоположной по знаку частоте, что говорит о не строгой квадратуре каналов (в данном опыте квадратурное преобразование выполнялось аппаратно). Кроме того в сигнале имеется множество гармоник на кратных частотах, как положительных, так и отрицательных, возникших из-за нелинейных искажений в одном из каналов интерферометра.

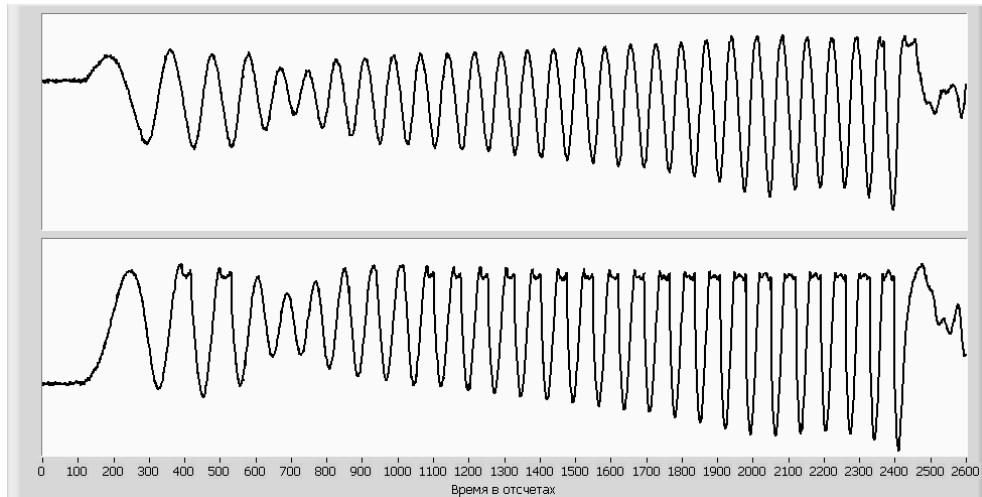


Рис. 4.29. Интерферограмма, полученная в третьем опыте по метанию пластины продуктами взрыва заряда из тротила

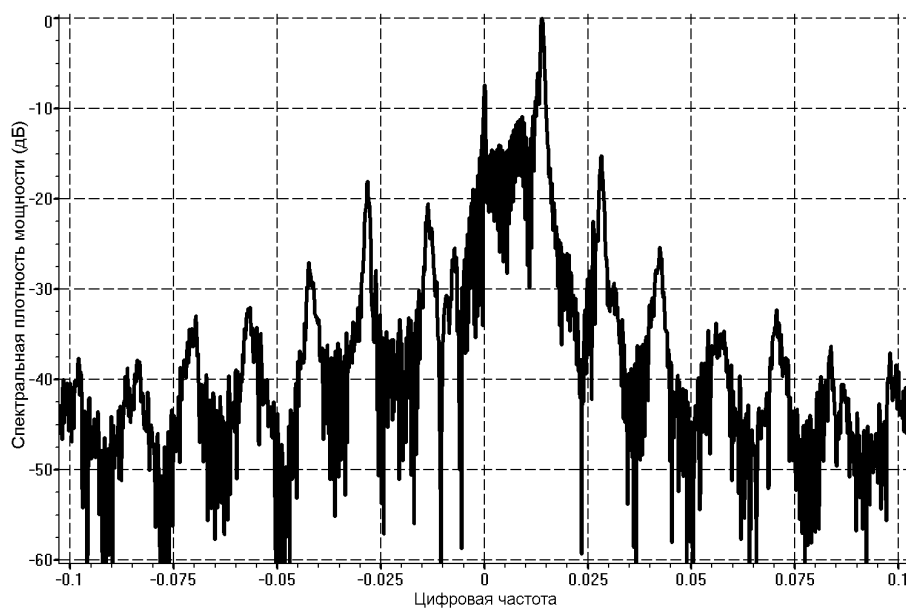
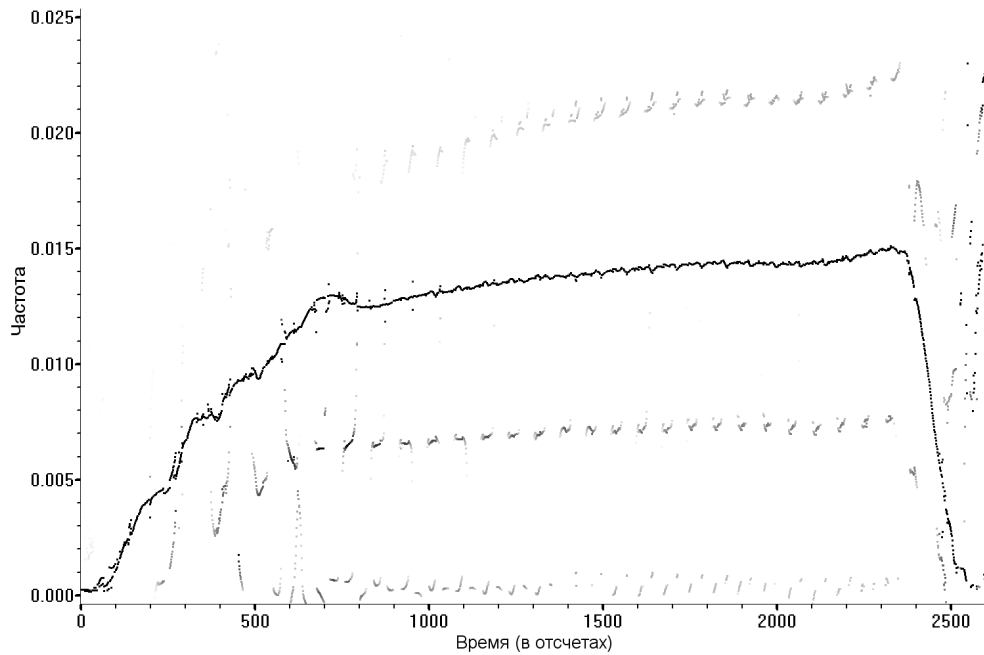


Рис. 4.30. Периодограмма интерферограммы

На рис. 4.31 представлено ЧВРЭ, вычисленное МПВВ с размером окна  $N_{win} = 170$  и количеством поисковых параметров  $p = 3$ . По оси ординат отложены цифровые частоты от 0 до 0.025, которые соответствуют скорости пластины от 0 до 10 км/с.

На ЧВРЭ хорошо видна основная ЧМ компонента, частота которой на начальном участке возрастает ступеньками. Кроме основной ЧМ компоненты на распределении видны побочные продукты, полученные из-за нелинейного преобразования (присутствующего в МПВВ) основной ЧМ компоненты, постоянной составляющей и ЧМ компонент на кратных частотах.

На рис. 4.32 представлен закон изменения мгновенной цифровой частоты

Рис. 4.31. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 170$ ,  $P = 3$ )

ты интерферограммы вычисленный с помощью алгоритма МЧАС [2, 154], на рис. 4.33 – с последующей фильтрацией ФНЧ с цифровой частотой среза 0.0025.

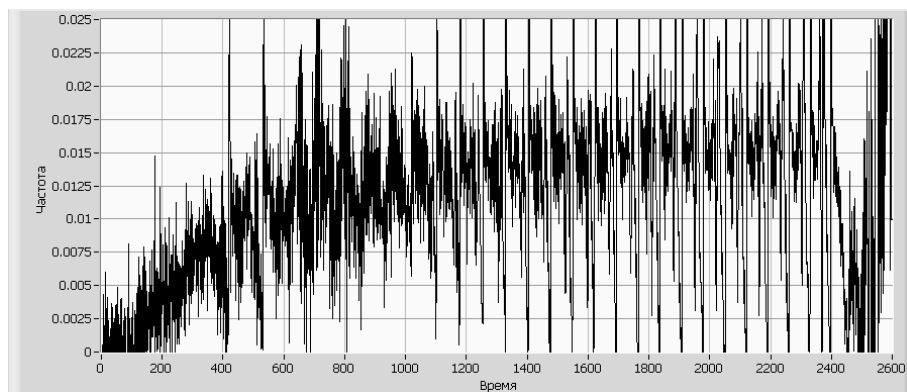


Рис. 4.32. Закон изменения мгновенной цифровой частоты интерферограммы, вычисленный методом МЧАС

Как и в предыдущих опытах, можно видеть, что, в отличие от ЧВРЭ, вычисленного МПВВ, метод МЧАС чувствителен к шуму и дополнительным частотным компонентам, присутствующим в реальном сигнале, фильтрация которых сильно сглаживает ступенчатый характер изменения частоты основной ЧМ компоненты.

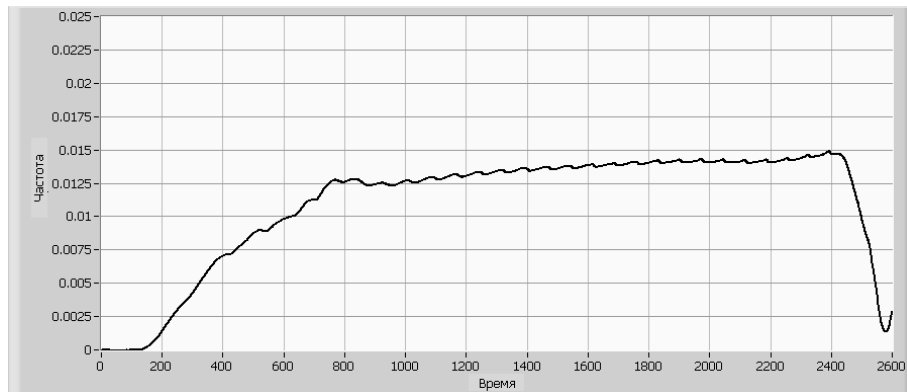


Рис. 4.33. Закон изменения мгновенной цифровой частоты интерферограммы, вычисленный методом МЧАС с последующей фильтрацией ФНЧ с частотой среза 0.003

#### 4.2.5. Применение алгоритмов экстраполяции при анализе начальных участков радиоинтерферрограмм

При вычислении ЧВРЭ начального участка интерферограммы, полученной во втором опыте по метанию стальной пластины продуктами взрыва заряда из тротила, возникла ошибка, которая скрыла первую ступеньку в районе частот 0.005 – 0.01. Это связано с тем, что, по постановке и специфике опыта, скорость изменения частоты в начальный момент процесса примерно в несколько раз выше, чем в других опытах и окно, используемое при обработке сигнала, в этот момент практически полностью перекрывается с началом процесса. Из-за этих факторов ступенька сглаживается. Увеличить точность на этом участке можно, если уменьшить амплитуду скачка частоты. Для этого в работе были экстраполированы дополнительные отсчеты сигнала для отрицательных значений времени.

**Описание алгоритма экстраполяции.** Так как частота на начальном участке меняется быстро, поэтому для экстраполяции дополнительных отсчетов необходимо использовать менее одного периода начального отрезка интерферограммы. Для этого был разработан и реализован алгоритм экстраполяции, основанный на методе МПО [155, 156]<sup>1</sup>.

Для экстраполяции начального отрезка (состоящего из  $N$  отсчетов) комплексного сигнала  $s[n]$  будем аппроксимировать его линейной комбинацией  $p$

<sup>1</sup>В [156] приводится пример восстановления данным алгоритмом поврежденных участков звуковых файлов, также данный алгоритм использовался для восстановления отсутствующих участков фотометрических данных, полученных со спутника COROT при исследовании звезды G7V [146, 147, 156]

комплексных экспонент (не обязательно ортогональных на данном отрезке) с различными частотами  $f_k$ , амплитудами  $A_k$ , и фазами  $\varphi_k$ , так, чтобы относительная ошибка аппроксимации между экспоненциальной моделью (2.3) и отрезком сигнала  $s[n]$  была минимальной. Относительная ошибка аппроксимации вычисляется по формуле (2.1).

Вычислив оптимальные параметры экспоненциальной модели, можно экстраполировать недостающие начальные отсчеты, подставив в модель значения  $n = -1, -2, \dots$

**Результаты применения алгоритма экстраполяции.** На рис. 4.34 при отрицательных значениях времени представлены экстраполированные отсчеты интерферограммы, при положительных – отрезок сигнала, используемый для вычисления параметров модели.

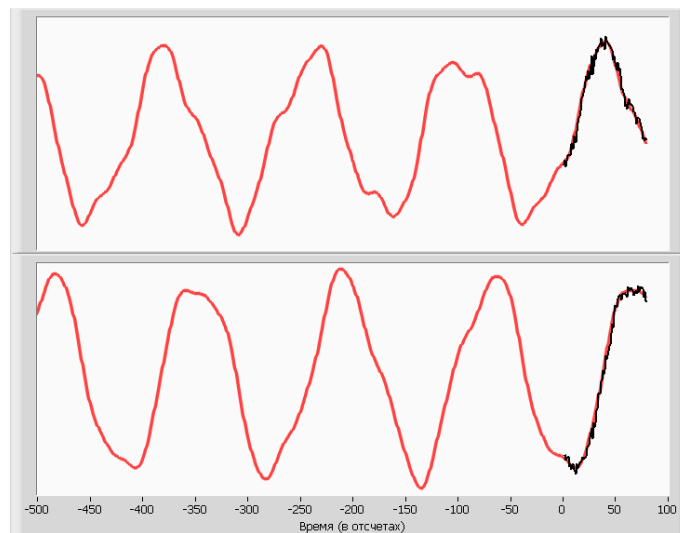


Рис. 4.34. Экстраполированные отсчеты начального участка интерферограммы, полученной во втором опыте ( $p = 3$ )

Как видно из рисунка, для экстраполяции потребовалось использовать примерно полпериода интерферограммы.

На рис. 4.35а,б представлены ЧВРЭ интерферограммы без экстраполяции (рис. 4.35а) и с экстраполяцией (рис. 4.35б) дополнительных начальных отсчетов интерферограммы. На рис. 4.35б отчетливо видна ступенька в районе цифровой частоты 0.009.

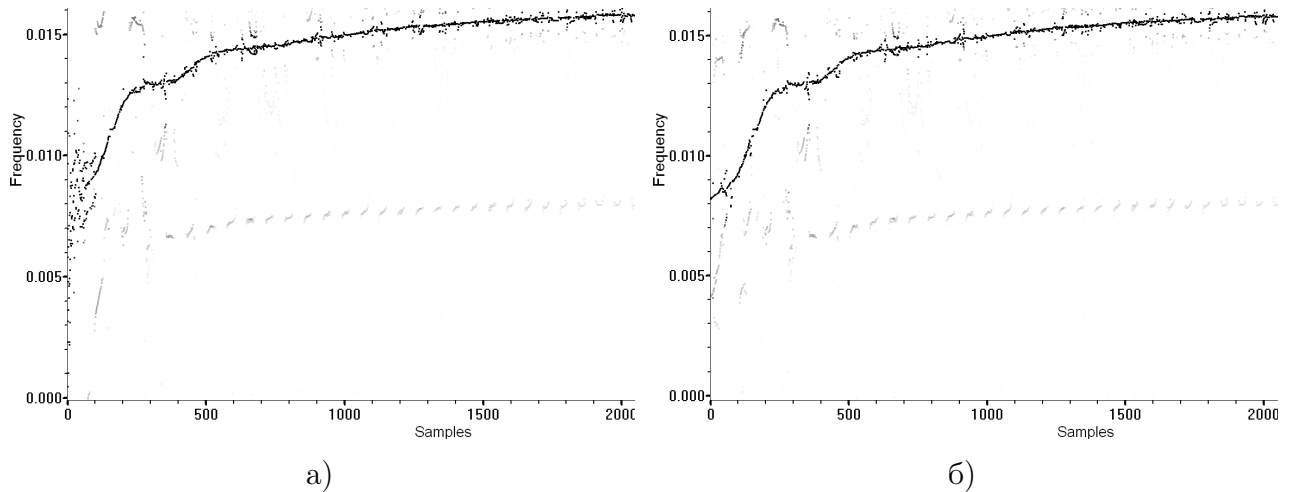


Рис. 4.35. ЧВРЭ МПВВ ( $N_{win} = 300$ ,  $p = 5$ ) без экстраполяции (слева) и с экстраполяцией (справа) дополнительных начальных отсчетов интерферограммы

### 4.3. Выводы

Приведенные в данном разделе исследования показали:

- применение МПВВ при анализе экспериментальных данных, полученных в физическом эксперименте позволяет точнее оценить ЧВРЭ по сравнению с методом ОМПО;
- применение МПВВ с различными размерами окон позволило уменьшить методическую ошибку оценки частоты при обработке данных, полученных при проведении физического эксперимента;
- вычисленные значения скорости МПВВ практически не отличаются от скорости, вычисленной через геометрические параметры маятника.

Применение МПВВ позволило выявить характерные детали на начальном стадии газодинамического процесса в ЧВРЭ интерферограмм, полученных в опытах по метанию стальной пластины продуктами взрыва заряда из тротила, по сравнению с результатами, полученными алгоритмом, основанном на понятии «Мгновенная частота аналитического сигнала» [2, 7].

Разработан алгоритм экстраполяции, применение которого позволило оценить частоту первой ступеньки ЧВРЭ интерферограммы, полученной в газодинамическом эксперименте с высоким ускорением пластины на начальной стадии процесса.

## Заключение

При выполнении диссертационной работы, для получения оценки мгновенной скорости перемещения газодинамического объекта по мгновенной частоте измеренной интерферограммы, были разработаны 2 метода частотно-временного анализа ЧМ сигналов: основанный на максимально правдоподобной оценке параметров экспоненциальной модели в скользящем окне (ОМПО) и модификации преобразования Вигнера-Виля (МПВВ).

В диссертационной работе проведены исследования созданных методов частотно-временного анализа, которые показали:

- Применение методов для анализа ЛЧМ сигналов позволяет получить несмещенную, близкую к максимально возможной точности (по критерию Крамера-Рао), оценку частоты, не зависящую от положения окна в сигнале. Плотность вероятности ошибки оценки частоты имеет гауссово распределение. Точность анализа ЛЧМ сигналов МПВВ не зависит от скорости изменения частоты.
- При анализе МПВВ ЧМ сигналов с квадратичным законом изменения частоты, оценка частоты получается смещенной. Это смещение пропорционально квадрату длины окна и не зависит от ОСШ и положения скользящего окна в сигнале. Эмпирически полученная формула для оценки смещения мгновенной частоты позволила компенсировать методическую ошибку при вычислении ЧВРЭ данных, полученных в физическом эксперименте.
- Ошибка оценки частоты вызванная узкополосной помехой проявляется в ЧВРЭ обоих методов в виде биений частоты основной ЧМ компоненты. Уменьшить ошибку можно, увеличив размер окна и количество поисковых параметров в методах.
- Сравнение методов при анализе данных, полученных в физическом эксперименте, показало преимущество МПВВ перед методом ОМПО и алгоритмом, основанном на понятии «Мгновенная частота аналитического сигнала».

Применение МПВВ позволило выявить в ЧВРЭ интерферограмм, полученных в опытах по метанию стальной пластины продуктами взрыва заряда



из тротила, характерные детали на начальной стадии газодинамического процесса.

В работе разработан алгоритм экстраполяции, применение которого позволило оценить частоту первой ступеньки ЧВРЭ интерферограммы, полученной в газодинамическом эксперименте с высоким ускорением пластины на начальной стадии процесса.

## Список литературы

1. Горелик Г.С. Колебания и волны. 2-изд. М.:ФИЗМАТЛИТ, 1950. 572 с.
2. Поршнева С.В. Радиолокационные методы измерений экспериментальной баллистики. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. 211 с.
3. Баталов С.В., Филин В.П., Шапошников В.В. Радиоволновой метод исследования физических явлений и химических превращений в гетерогенных ВВ под действием УВ// ФГВ, 1991, т.27, №6, с.107.
4. Взятых В.Ф., Михайлов А.Л., Орехов Ю.И., Родионов А.В. О возможности повышения качества радиоинтерферометрии при диагностике газодинамических процессов специально сформированными зондирующими волновыми образованиями // Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны: Труды Междунар. конф. «IX Харитоновские тематические научные чтения». Саров, 2007. С. 643-647.
5. Богданов Е.Н., Бельский В.М., Родионов А.В. О влиянии ударосжатого слоя воздуха перед метаемой пластиной на измерения её скорости радиоинтерферометрическим методом // Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны: Труды Междунар. конф. «IX Харитоновские тематические научные чтения». Саров, 2007. С. 680-685.
6. Орехов Ю. И. Развитие физического принципа действия радиоинтерферометрии. Реализация в газодинамике взрывных процессов // Изв. вузов. Физика, 2006. № 9. С. 294-308.
7. Канаков В.А., Лупов С.Ю., Орехов Ю.И., Родионов А.В. Методы извлечения информации о перемещении границ раздела в газодинамических экспериментах с использованием радиоинтерферометров миллиметрового диапазона длин волн // Известия ВУЗов. Радиофизика, 2008. Т. LI. № 3. С. 234-246.
8. Родионов А.В., Канаков В.А., Лупов С.Ю. Методы обработки результатов радиоинтерферометрических измерений параметров газодинамических процессов// Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные

- волны: Труды Междунар. конф. «7 Харитоновские тематические научные чтения». Саров, 2005. С. 680-685.
9. Канаков В.А., Лупов С.Ю., Пархачев В.В., Родионов А.В. Многомодовая радиоинтерферометрия как средство увеличения числа определяемых параметров // Экстремальные состояния вещества. Детонация. Ударные волны: Труды Междунар. конф. «IX Харитоновские тематические научные чтения». Саров, 2007. С. 665-670.
  10. Канаков В.А., Лупов С.Ю., Родионов А.В. Особенности извлечения информации о параметрах газодинамических процессов методом аппроксимации интерферограмм многопараметрической электродинамической моделью // Труды (девятой) Научной конференции по радиопизике «Факультет – ровесник Победы». 7 мая 2005 г./Ред. А.В.Якимов. – Нижний Новгород: ТАЛАМ, 2005. С. 102-104.
  11. Михайлов А.Л., Костюков В.Е., Орехов Ю.И., Бельский В.М. и др. Некоторые результаты применения в ИФВ РФЯЦ-ВНИИЭФ радиоинтерферометров мм диапазона длин волн для изучения газодинамических процессов//Труды VII Харитоновских чтений. Саров, 2005. С. 649-654.
  12. Luther G., Veaser L., Warthen B. A Microwave Interferometer to Measure Particle and Shock Velocities Simultaneously/ Shock Compression of Condensed Matter - 1991, S. C. Schmidt, R. D. Dick, J. W. Forbs, D. G. Tasker, Eds., Williamsburg, Virginia, June 17-20, 1991 (Elsevier Science Publishers B. V., 1992), pp.775-778.
  13. Stanton P. L., Venturini E. L., Dietzel R. W. Microwave Interferometer Techniques for Detonation Study. Proceedings for the Eighth International Symposia on Detonation, <http://www.sainc.com/onr/detsymp/>
  14. Edwards D.H., Hooper G., Morgan J.M. An experimental investigation of the direct initiation of spherical detonation, Acta Astronautica, vol.3, issues 1-2, january-february 1976, pp.117-130.
  15. Лебедев А.В., Лобойко Б.Г., Филин В.П., Шапошников В.В.. Радиоволновый метод измерения скорости горения взрывчатых материалов в герметичном объеме. Хим. физ.. 1998. т.17, №9, с.129-131.

16. Strand L.D., Shultz A.D., Reedy G.K. Microwave Doppler Shift Technique for Determining Solid Propellant Transient Regression Rates// Journal of Spacecraft and Rockets, 1974.V. 11, N 2, P.75-83.
17. Nakai S., Kasuya K., Yamanaka C. The relaxation phenomena in an ionized shock front// Physica. 1969. V. 41, issue 1, 21 February, P.213-217.
18. Farrar C.R., Darling T.W., Baker A.M., Baker W.E., Microwave Interferometers for Non-contact Vibration Measurements on Large Structures// Mechanical Systems and Signal Processing. 1999. V.13, issue 2, P.241-25.
19. Stelzer A. A microwave position sensor with submillimeter accuracy/ A. Stelzer, Chr. G. Diskus, K. Lubke, H.W. Thim// IEEE Trans. on MTT. 1999. Vol. 47, № 12. P. 2621-2624.
20. Грязнов Е.Ф., Колпаков В.И., Уткин А.В. Особенности математического моделирования процессов метания цилиндрических оболочек и пластин, нагруженных взрывом//Труды VII Харитоновских чтений. Саров, 2005, С. 560-565.
21. Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Сверхширокополосные сигналы и физические процессы. 2. Методы анализа и применение // Радиоп физика и радиоастрономия, 2008. Т. 13, № 4, с. 270-322.
22. Коэн Л. Время - частотные распределения: Обзор // ТИИЭР, 1989. Т. 77. № 10. С. 72-120.
23. Поршневу С.В. Применение непрерывного вейвлет-преобразования для обработки широкополосных частотномодулированных сигналов // Вычислительные методы и программирование, 2003. Т. 4. № 3. С.104-116.
24. Марпл С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1990. 584 с.
25. McCall G.H., Bongiani W.L., Miranda G.A.. Microwave interferometer for shock wave, detonation, and material motion measurements// 1985. Rev. Sci. Instrum. V. 56, N 8. P. 1612-1618.

26. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы. Учебник для вузов. Изд. 3-е, перераб. и доп. М.: Радио и связь, 1986. 512 с.
27. Poularikas A.D. The Transforms and Applications Handbook. Second Edition. Boca Raton: CRC Press LLC, 1999. 1335 p.
28. Малла С. Вэйвлеты в обработке сигналов: Пер. с англ. М.: Мир, 2005. 671 с.
29. Allen R.L., Mills D.W. Signal Analysis: Time, Frequency, Scale, and Structure. Wiley-IEEE Press, 2004. 966 p.
30. Mertins A. Signal Analysis: Wavelets, Filter Banks, Time-Frequency Transforms and Applications. Chichester: John Wiley & Sons, 1999. 317 p.
31. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. В 2-х тт. Т. 1. М.: Мир, 1983. 312 с.
32. Оппенгейм А., Шафер Р. Цифровая обработка сигналов. М.: Техносфера, 2009. 856 с.
33. Рабинер Л.Р., Шафер Р.В. Цифровая обработка речевых сигналов. М.: Радио и связь, 1981. 496 с.
34. Блейхут Р. Быстрые алгоритмы цифровой обработки сигналов. М.: Мир, 1989. 448 с.
35. Лазоренко О. В., Черногор Л. Ф. Системный спектральный анализ сигналов: теоретические основы и практические применения // Радиофизика и радиоастрономия, 2007. Т. 12, № 2. С. 162-181.
36. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. В 2-х тт. Т. 2. М.: Мир, 1983. 256 с.
37. Greitans M. Processing of non-stationary signal using level-crossing sampling // in Proc. of the International Conference on Signal Processing and Multimedia Applications, Setubal, Portugal, Aug. 7-10, 2006, P. 170-177.
38. Greitans M. Time-frequency representation based chirp-like signal analysis using multiple level crossings // in Proc. of the 15th European Signal

- Processing Conference (EUSIPCO 2007), Poznan, Poland, September 3-7, 2007. - P. 2254-2258.
39. Кривошеев В.И. Цифровая обработка сигналов. Учебное пособие. Н.Новгород: Издательство Нижегородского госуниверситета, 2006. 207 с.
  40. Гольденберг Л.М., Матюшкин Б.Д., Поляк М.Н. Цифровая обработка сигналов: Справочник. М.: Радио и связь, 1985. 312 с.
  41. Сергиенко А.Б. Цифровая обработка сигналов. СПб: Питер, 2002. 608 с.
  42. Зайцев В.В., Кисляков А.Г., Урпо С. Проявления 5-минутных осцилляций фотосферы в микроволновом излучении солнца // Изв. Вузов - Радиофизика, 2003. Т. 46. № 12. С. 999-1010.
  43. Зайцев В.В., Кислякова К.Г. Нагрев плазмы при параметрическом возбуждении звуковых колебаний в корональных магнитных петлях // Астрономический журнал, 2010. Т. 87. № 4. С. 410-416.
  44. Залманзон Л.А. Преобразование Фурье, Уолша, Хаара и их применение в управлении, связи и других областях. М.: Наука, 1989. 496 с.
  45. Степанов А.В., Матвеев С.А. Методы компьютерной обработки сигналов систем радиосвязи. М:СОЛОН-Пресс, 2003. 208 с.
  46. Иванов Г.Г., Попов В.Г., Дриницина С.В. Новые методы электрокардиографической диагностики // Врач: Ежемесячный научно-практический и публицистический журнал / Московская медицинская академия им. И.М. Сеченова (М.), 2006. № 10. С. 58-60.
  47. Деркач И.Ф., Гумецкий Р.А., Гура Б.М., Чабан М.Е. Динамические спектры речевых сигналов. Львов: Вища школа. Изд-во при Львовском университете, 1983. 186 с.
  48. Grossman A., Morlet J. Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape // SIAM J. Math. Anal. 1984. V 15. P. 723-736.

49. Лазоренко О.В., Лазоренко С.В., Черногор Л.Ф. Вейвлет-анализ модельных сверхширокополосных сигналов // Успехи современной радиоэлектроники, 2006. № 8. С. 47-61.
50. Лазоренко О. В., Лазоренко С. В., Черногор Л. Ф. Применение вейвлет-анализа к задаче обнаружения кратковременных знакопеременных и сверхширокополосных процессов // Электромагнитные волны и электронные системы, 2004. Т. 9, № 9-10. С. 31-62.
51. Короновский А.А., Храмов А.Е. Непрерывный вейвлет-анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 176 с.
52. Астафьева Н. М. Вейвлет анализ: основы теории и примеры применения // Успехи физических наук, 1996. Т. 166, № 11. С. 1115-1180.
53. Воробьев В.И., Грибунин В.Г. Теория и практика вейвлет-преобразования. С.-Пб.: ВУС, 1999. 324 с.
54. Дьяконов В.П. Вейвлеты. От теории - к практике. М.: СОЛОН-Р, 2002. 448 с.
55. Чуи К. Введение в вейвлеты: Пер. с англ. Я.М. Жилейкина. М.: Мир, 2001. 412 с.
56. Лазоренко О.В., Лазоренко С.В., Черногор Л.Ф. Применение вейвлет-анализа к задаче обнаружения сверхширокополосных сигналов на фоне помех // Радиофизика и радиоастрономия. 2002. Т. 7, № 1. С. 46-63.
57. Chernogor L.F., Lazorenko O.V., Lazorenko S.V. Wavelet Analysis and Ultra-Wideband Signals // Radio Physics and Radio Astronomy, 2002. Vol. 7, No. 4. P. 471-474.
58. Лазоренко О.В., Лазоренко С.В., Черногор Л.Ф. Вейвлет-анализ нелинейных волновых процессов // Успехи современной радиоэлектроники, 2005. № 10. С. 3-21.
59. Лазоренко О.В., Лазоренко С.В., Черногор Л.Ф. Вейвлет-анализ в задачах физики геокосмоса // Космічна наука і технологія, 2005. Т. 11, № 5/6. С. 22-29.

60. Кравченко В.Ф., Лазоренко О.В., Пустовойт В.И., Черногор Л.Ф. Изучение структуры решения нелинейных волновых уравнений на основе непрерывного вейвлет-анализа // ДАН РАН, 2006. Т. 410, № 6. С. 744-748. English version: V.F. Kravchenko, O.V. Lazorenko, V.I. Pustovoit, and L.F. Chernogor. Study of the Structure of Solutions to Nonlinear Wave Equations Based on Continuous Wavelet Analysis // Doklady Mathematics, 2006. Vol. 74, No. 2. P. 767-770.
61. Кравченко В.Ф., Лазоренко О.В., Пустовойт В.И., Черногор Л.Ф. Вейвлет анализ поведения солитонов при обгонном и обменном взаимодействиях // ДАН РАН. 2007. Т. 412, № 2. С. 179-184.
62. Кравченко В.Ф., Лазоренко О.В., Черногор Л.Ф. Новый класс аналитических вейвлетов Кравченко-Рвачева в задачах анализа сверхширокополосных сигналов и процессов // Успехи современной радиоэлектроники, 2007. № 5. С. 29-47.
63. Лазоренко О. В., Лазоренко С. В., Черногор Л. Ф. Вейвлет-анализ модельных сигналов с особенностями. 1. Непрерывное вейвлет-преобразование // Радиофизика и радиоастрономия, 2007. Т. 12, № 2. С. 182-204.
64. Лазоренко О. В., Лазоренко С. В., Черногор Л. Ф. Вейвлет-анализ модельных сигналов с особенностями. 2. Аналитическое и дискретное вейвлет-преобразования // Радиофизика и радиоастрономия, 2007. Т. 12, № 3. С. 278-294.
65. Holschneider M. Wavelets: an Analysis Tool. Oxford: Clarendon Press, 1995.
66. Chan HL, Huang HH, Lin JL. Time-Frequency Analysis of Heart Rate Variability During Transient Segments // Annals of Biomedical Engineering, 2001. Vol. 29. No. 11. P. 983-996.
67. Colak Omer H. Preprocessing effects in time-frequency distributions and spectral analysis of heart rate variability // Digital Signal Processing, 2009. Vol. 19. No. 4. P. 731-739.
68. Дремин И.М., Иванов О.В., Нечитайло В.А. Вейвлеты и их использование // Успехи физ. наук. 2001. Т. 171, № 5. С. 465-561.



69. Ваврив Д. М., Степанов А. М., Виноградов В. В., Юровский Ю. Ф. 1/f-процессы в радиоизлучении Солнца // Кинематика и физика небесных тел, 1995. Т. 11, № 6. С. 34-42.
70. Рунова Е. В., Мухина И. В. Метод временной локализации изменений частотной структуры сердечного ритма, основанный на дискретном вейвлет-преобразовании // Физиология человека, 2008. Т. 34. № 2. С. 124-127.
71. Бороноев В.В., Гармаев Б.З., Лебединцева И.В. Особенности непрерывного вейвлет-преобразования импульсных сигналов // Оптика атмосферы и океана, 2007. Т. 20. № 12. С. 1142-1147.
72. Захаров В.И., Зиенко А.С., Методика статистического анализа вейвлет-спектров ионосферных сигналов системы GPS // Вестник Московского университета. Серия 3: Физика. Астрономия, 2007. № 2. С. 44-49.
73. Корепанов В.В., Кулеш М.А., Шардаков И.Н. Использование вейвлет-анализа для обработки экспериментальных вибродиагностических данных. Методический материал к спецкурсу «Современные проблемы механики». Пермь: Перм. ун-т, 2007. 64 с.
74. Ryabov V. B., Stepanov A. V., Usik P. V., Vinogradov V. V., Vavriv D. M., Yurovsky Yu. F. From chaotic to 1/f processes in solar mcw-bursts // Astronomy and astrophysics, 1997. Vol. 324. N 2. P. 750-762.
75. Виноградов В. В., Литвиненко Г. В. Исследование излучения грозовых разрядов методом вейвлетного анализа // Радиоп физика и радиоастрономия, 1998. Т. 3, № 2. С. 198-203.
76. Litvinenko G. V., Rucker H. O., Vinogradov V. V., Ryabov B. P., Shaposhnikov V. E. Noise nature investigation of sporadic Jovian decameter emission // Radio Science, 2000. Vol. 35, No. 6. P. 1445-1454.
77. Bezvesilniy O. O., Vinogradov V. V., Schunemann K. Noise Reduction Algorithm Based on Template Wavelet Coefficients // Радиоп физика и радиоастрономия, 2000. Т. 5, № 3. С. 301-310.
78. Bezvesilniy O. O., Vinogradov V. V., Vavriv D. M., Schuenemann K. Wavelet-based image processing: Edge detection and noise reduction // Proc. 17th

- International Conference on Applied Electromagnetics and Communications ICECom2003. Dubrovnik (Croatia), 2003. P. 123-126.
79. Кривошеев В.И., Лебедев Ю.П. Спектрально-временной анализ линейных систем и анализаторов спектра. Учебное пособие.- Горький: изд. ГГУ, 1983, 76 с.
80. Бабанов Ю.Н., Лебедев Ю.П., Воинов Б.С. Спектрально - временной анализ детерминированных сигналов: учебное пособие. Горький: Изд во ГГУ, 1980. 91 с.
81. Тоцкий А.В. Частотно-временной анализ нестационарных многочастотных сигналов // Системи обробки інформації, 2009. Т. 77. № 3. С.108-115.
82. Yandong L. Xiaodong Z. Wigner-Ville distribution and its application in seismic attenuation estimation // Applied Geophysics, 2007, Vol. 4. No. 4. P. 245-254.
83. Novak P., Novak V. Time/frequency mapping of the heart rate, blood pressure and respiratory signals // Medical and Biological Engineering and Computing, 1993, vol. 31, N. 2, P. 103-110.
84. Шкелев Е.И., Земнюков Н.Е. Спектрально-временной анализ с применением взаимного преобразования Вигнера-Виля // Изв. высш. учеб. заведений. Серия Радиофизика, 2010. Т. 53, N 2. С. 134-144.
85. Pereira de Souza Neto E, Custaud MA, Frutoso J, Somody L, Gharib C, Fortrat JO: Smoothed pseudo Wigner-Ville distribution as an alternative to Fourier transform in rats // Autonomic Neuroscience: Basic & Clinical, 2001. Vol. 87 Iss. 2. P. 258-267.
86. Кравченко В.Ф., Лазоренко О.В., Пустовойт В.И., Черногор Л.Ф. Преобразование Чои-Вильямса и атомарные функции в цифровой обработке сигналов // Доклады академии наук, 2007. Т. 413. № 6. с. 750-753.
87. Кривошеев В.И. Современные методы цифровой обработки сигналов (цифровой спектральный анализ). Учебно-методический материал по

- программе повышения квалификации «Современные системы мобильной цифровой связи, проблемы помехозащищенности и защиты информации». Нижний Новгород, 2006. 117 с. (<http://www.unn.ru/pages/e-library/aids/2006/7.pdf>).
88. Витязев В.В. Спектрально-корреляционный анализ равномерных временных рядов: Учеб. пособие. СПб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2001. 48 с.
  89. Vaseghi S. Advanced Digital Signal Processing and Noise Reduction. Chichester:John Wiley & Sons, 2000. 544 p.
  90. Шахтарин Б.И., Ковригин В.А. Методы спектрального оценивания случайных процессов. М.: Гелиос АРВ, 2005. 248 с.
  91. Stein J.Y. Digital signal processing: a computer science perspective. Wiley-Interscience, 2000. 856 p.
  92. Blanchet G., Charbit M. Digital Signal and Image Processing using MATLAB. Publisher:Wiley-ISTE, 2006. 764 p.
  93. Advance Topics in Signal Processing. Edited by J. Lim, A. Oppenheim, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1998, 515 P.
  94. Kay S.M. Fundamentals of Statistical Signal Processing: Estimation Theory (v. 1). NJ:Prentice Hall, Upper Sadle River, NJ, 1998. 595 p.
  95. Тихонов В.И. Оптимальный прием сигналов. М:Радио и связь, 1983. 320 с.
  96. Дмитриев Е.В. Аппроксимация коротких процессов, сигналов, функций и расчет их гармонических дискретных спектров // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2007. Т. 10. № 1. С. 33-46.
  97. Дмитриев Е.В. Обнаружение и различение сигналов в их аддитивной смеси путем расчета и анализа ее естественного спектра // Физика волновых процессов и радиотехнические системы, 2008. Т. 11. № 2. С. 61-66.
  98. Fradkina E.P. Short signals spectrals estimation method // Proceedings of the 12th Scientific Conference on Radiophysics dedicated to the 90th Anniversary of M.M. Kobrin's Birth. (Nizhny Novgorod, May 7, 2008). / Ed. By A.V. Yakimov, S.M. Grach,. Nizhny Novgorod: TALAM Press, 2008. P. 272-273.

99. Верстаков Е.В., Захарченко В.Д. Модификация метода Прони при аппроксимации двумерных сигналов на фоне помех // Труды III Всероссийской конференции «Радиолокация и радиосвязь». ИРЭ РАН, 26-30 октября 2009. С. 882-886.
100. Чибисов С.М., Катинас Г.С. Циркадианные ритмы сердца до и после электрической кардиоверсии // Современные наукоемкие технологии, 2008. № 6. С. 13.
101. Журавлев В.И., Сидорин А.Я. Общие свойства суточной периодичности землетрясений в нескольких регионах мира // Геофизические исследования, 2005. № 2. С. 61-70.
102. Галеев А.И., Рахимова Г.М. Исследование фотометрических наблюдений GSC4813-0981 - новой переменной звезды типа Д щита // Вестник ТГГПУ, 2007. № 2-3(9-10). С. 15-17.
103. Дорошенко В.Т. Сейфертовская галактика первого типа ARK 120 В 1996-2005 гг. временные свойства оптической переменности // Астрономический журнал, 2008. Т. 85. № 9. С.771-785.
104. Вергасова Г.В., Кокоуров В.Д., Казимировский Э.С. Изменчивость общего содержания озона в атмосфере и горизонтального ветра в нижней термосфере (центральная европа) // Солнечно-земная физика, 2006. № 9. С. 29-33.
105. Вергасова Г.В., Казимировский Э.С., Белинская А.Ю. Сезонные особенности проявления планетарных волн в вариациях общего содержания озона на средних широтах // Солнечно-земная физика, 2003. № 3. С. 18-23.
106. Новиков С.Б. Проблемы определения периода квантования временных рядов при идентификации экономических процессов // Современные наукоемкие технологии. Региональное приложение, 2009. № 2. С. 42-45.
107. Морозов О.А. Алгоритм цифровой демодуляции радиосигналов на основе метода адаптивной цифровой фильтрации // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия: Физика твердого тела, 2000. № 1. С. 305-310.

108. Голиков В.С., Лебедева О.М. Обнаружение детерминированных сигналов с фиксированной вероятностью ложной тревоги при авторегрессионной модели помех с неизвестными параметрами // Известия высших учебных заведений. Радиоэлектроника, 2007. Т. 50, № 3. С. 54-60.
109. Сорохтин М.М., Сорохтин Е.М., Морозов О.А., Фидельман В.Р. Применение нелинейного спектрального оценивания в задаче определения взаимной временной задержки сигналов // Известия высших учебных заведений. Радиофизика, 2007. Т. 50. № 4. С. 357-363.
110. Андреев В.Г. Нгуен Вьет Шон. Параметрическое моделирование коррелированных радиоотражений для анализа эффективности обработки эхосигналов // Вестник Рязанской государственной радиотехнической академии, 2006. № 18, С. 40-45.
111. Кошелев В.И., Андреев В.Г. Синтез АРСС-моделей эхо-сигналов // Изв. вузов. Радиоэлектроника. 1993. № 7. С. 8-13.
112. Миронов С.Н., Костров В.В. Построение и исследование математической модели мешающих отражений по экспериментальным данным // Радиотехника, 2007. № 8. С. 24-29.
113. Хайкин С., Карри Б. У., Кеслер С.Б. Спектральный анализ радиолокационных мешающих отражений методом максимальной энтропии. // ТИИЭР, 1982, Т. 70, № 9.
114. Герасимов А.В., Морозов О.А., Фидельман В.Р. Применение метода модифицированного линейного предсказания к задачам выделения акустических признаков речевых сигналов // Радиотехника и электроника, 2005. Т. 50.
115. Герасимов А.В., Морозов О.А., Солдатов Е.А., Фидельман В.Р. Применение метода модифицированного линейного предсказания для устойчивого акустического кодирования речи // Известия высших учебных заведений. Радиофизика, 2006. Т. 49. № 7. С. 593-598.
116. Жаринов И.О. К вопросу о выборе порядка авторегрессионных моделей сигналов электроэнцефалограмм человека (в медицинском приборо-

- строении) // Научно-технический вестник Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики, 2006. № 33. С. 121-132.
117. Борисова А.С. Методы анализа и прогноза климатических временных рядов // Известия высших учебных заведений. Северо-Кавказский регион. Серия: Естественные науки, 2008. № 1, С. 122-123.
118. Кравчук В.К. Спектральный анализ колебаний валютного курса EUR/USD по методу максимальной энтропии // Валютный спекулянт, 2001, № 1, С. 14-17.
119. Молчанов С.В., Мозжухин Г.В. Детектирование сигналов ядерного квадрупольного резонанса с ограниченной выборкой данных // Вестник Российского государственного университета им. И. Канта, 2010. № 4. С. 101-111.
120. Костылев В.И., Панфилов С.А. Анализ экспериментального шума бистатистических радиотехнических систем // Вестник Воронежского института МВД России, 2010. № 2. С. 115-123.
121. Ашихмин А.В., Козьмин В.А., Негробов В.В. и др. Анализ перспективных направлений развития методов оценки угловых координат источников радиоизлучения // Вестник Воронежского института МВД России, 2010. № 2. С. 115-123.
122. Рембовский Ю.А. Методика снижения систематической погрешности алгоритма сверхразрешения MUSIC на основе учета направленных свойств элементов антенной решетки // Антенны, 2008. № 7-8. С. 95-101.
123. Нечаев Ю.Б., Макаров Е.С. Радиопеленгация в КВ-диапазоне с использованием линейных АР на основе сверхразрешающих алгоритмов обработки // Антенны, 2008. № 7-8. С. 111-122.
124. Рембовский Ю.А. Исследование возможностей совершенствования алгоритмов сверхразрешения источников радиоизлучения путем учета искажений структуры измеряемого поля антенной системой // Системы управления и информационные технологии, 2007. № 4.2(30). С. 279-286.

125. Лупов С.Ю., Серебряков А.М., Фрадкина Е.П. Оценка оптимальных параметров экспоненциальной и синусоидальной моделей отрезка дискретного сигнала // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011. № 2. С. 71-80.
126. Лупов С.Ю., Fradkin E., Серебряков А.М. Алгоритм для вычисления частотно-временного распределения коротких квазигармонических сигналов // Сборник трудов IX международной научно - практической конференции «Образовательные, научные и инженерные приложения в среде LabVIEW и технологии National Instruments». М.: Изд-во РУДН, 2010. С. 482-484.
127. <http://www.nag.co.uk/numeric/fl/manual/pdf/E04/e04ccf.pdf> (дата обращения: 08.09.2011).
128. Лупов С.Ю., Фрадкина Е.П. Модификация функции LabVIEW «Downhill Simplex nD» и тестирование её на примере аппроксимации тестовых сигналов суммой синусоид // Сборник трудов международной научно-практической конференции «Образовательные, научные и инженерные приложения в среде LabVIEW и технологии National Instruments». М.: Изд-во РУДН, 2006. С. 278-281.
129. [http://www.nag.co.uk/numeric/fl/manual19/pdf/E04/e04jaf\\_fl18.pdf](http://www.nag.co.uk/numeric/fl/manual19/pdf/E04/e04jaf_fl18.pdf) (дата обращения: 08.09.2011).
130. Nelder J.A., Mead R. A simplex method for function minimization // Computer Journal, 1965. V. 7. P. 308-313.
131. Гилл Ф., Мюррей У., Райт М. Практическая оптимизация. Пер. с англ. М.: Мир, 1985. 509 с.
132. Левин Б.Р. Теоретические основы статистической радиотехники. М.:Советское радио, 1968. 504 с.
133. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). М.: Наука, 1974. 832 с.
134. Кривошеев В.И., Лупов С.Ю. О некоторых возможностях и проблемах современного цифрового спектрального анализа // Вестник

- Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011. № 5(3). С. 109-117.
135. Вакман Д. Е., Вайнштейн Л. А., Амплитуда, фаза, частота - основные понятия теории колебаний // «УФН», 1977. Т. 123. Вып. 4. С. 657-682.
136. Шкелев Е.И., Кисляков А.Г., Лупов С.Ю. Методы ослабления эффектов интермодуляции в распределении Вигнера-Вилля // Известия ВУЗов. Радиофизика, 2002. Т. 45. № 5, С. 433-442.
137. Лупов С.Ю., Кривошеев В.И. Модификация преобразования Вигнера - Вилля для анализа интерферометрических данных газодинамических процессов // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011. № 5(3). С. 95-103.
138. Лупов С.Ю. Модификация преобразования Вигнера-Вилля для анализа коротких широкополосных ЧМ сигналов // Сборник трудов X международной научно - практической конференции «Образовательные, научные и инженерные приложения в среде LabVIEW и технологии National Instruments – 2011». М.: ДМК-пресс, 2011. С. 385-387.
139. Кисляков А.Г., Шкелев Е.И., Лупов С.Ю., Кислякова К.Г. Параметры астрофизических объектов по данным о модуляции интенсивности их электромагнитного излучения. I Алгоритмы обработки данных наблюдений // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2011. № 2(1). С. 46-54.
140. Лупов С.Ю., Канаков В.А., Родионов А.В., Шкелев Е.И., Фрадкина Е.П. Модифицированный алгоритм Вигнера-Вилля для спектрально-временного анализа // Труды (девятой) Научной конференции по радиофизике «Факультет – ровесник Победы». 7 мая 2005 г./Ред. А.В.Якимов. – Нижний Новгород: ТАЛАМ, 2005. С. 152-153.
141. Шкелев Е.И., Лупов С.Ю. Объектно-ориентированная система для спектрально-временного анализа сигналов в базовой полосе частот // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Радиофизика, 2004. № 1. С. 55-61.



142. Шкелев Е.И., Кузьмин В.Г., Орлов И.Я., Лупов С.Ю., Алексеев С.В. Система сбора и обработки данных о функциях и состоянии человека // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия Радиофизика, 2004. № 1. С. 47-54.
143. Orlov I.Ya., Shkelev E.I., Kuzmin V.G., Kuznetsova S.V., Lupov S.Yu. A system for studying spectral and temporal characteristics of acoustic cardiosignals // Proceedings of the Second International Symposium of Trans Black Sea Region on applied electromagnetism, Xanthi Greece. 2000. p. 28.
144. Кузьмин В.Г., Кузнецова С.В., Лупов С.Ю., Шкелев Е.И. Особенности спектрально-временных характеристик акустических шумов в области сердца // Труды V научной конф. по радиофизике. 7 мая 2001 г./Ред. А.В. Якимов. – Н. Новгород: ТАЛАМ, 2001. С. 148-149.
145. Кисляков А.Г., Лупов С.Ю., Шкелев Е.И. Интермодуляционные искажения в динамических спектрах флуктуаций солнечного радиоизлучения // Тезисы всероссийской астрономической конференции. 6-12 августа 2001, Санкт-Петербург: Отдел оперативной полиграфии НИИХ СПбГУ, с. 200.
146. Кисляков А.Г., Лупов С.Ю., Ходаченко М.Л., Кислякова К.Г., Ламмер Х. Программы анализа вариаций света звёзд с целью поиска планет // Труды XIV научной конференции по радиофизике, посвященной 80-й годовщине со дня рождения Ю.Н. Бабанова (Нижний Новгород, 7 мая 2010 г.)/Под ред. С.М. Грача, А.В. Якимова. Нижний Новгород: ННГУ, 2010. С. 144-146.
147. Кисляков А.Г., Ходаченко М.Л., Ламмер Х., Лупов С.Ю., Кислякова К.Г. Активность звезды G7V, связанная с планетой Eho2b // Труды XIV научной конференции по радиофизике, посвященной 80-й годовщине со дня рождения Ю.Н. Бабанова (Нижний Новгород, 7 мая 2010 г.)/Под ред. С.М. Грача, А.В. Якимова. Нижний Новгород: ННГУ, 2010. С. 146-148.
148. Лупов С.Ю., Канаков В.А., Родионов А.В., Кривошеев Е.И., Фрадкина Е.П. Применение спектрально-временного анализа для исследования интерферометрических данных // Труды (девятой) Научной конференции по радиофизике «Факультет – ровесник Победы».

- 7 мая 2005 г./Ред. А.В.Якимов. – Нижний Новгород: ТАЛАМ, 2005. С. 120-121.
149. Лупов С.Ю., Фрадкина Е.П. Лабораторная установка для учебного курса «Цифровая обработка сигналов» // Открытое образование, 2009. № 5. С. 30-34.
150. Лупов С.Ю., Фрадкина Е.П., Шахматова Е.А. Лабораторная установка для учебного курса «Цифровая обработка сигналов» // Труды XI научной конференции по радиофизике, посвященной 105-летию со дня рождения М.Т. Греховой (Нижний Новгород, 7 мая 2007)/Под ред. А.В.Кудрина, А.В.Якимова. – Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского госуниверситета, 2007. С. 101-102.
151. Lupov S.Yu., Fradkina E.P. Doppler ratemeter (experimental data for Digital Signal Processing training course) // Proceedings of the 11th Scientific Conference on Radiophysics dedicated to the 105th Anniversary of M.T. Grekhova's Birth (Nizhny Novgorod, May 7, 2007) /Ed. by A.V. Kudrin, A.V. Yakimov. Nizhny Novgorod: Nizhny Novgorod University Press, 2007. P. 272-273.
152. Косикин С.Н., Лупов С.Ю., Фрадкина Е.П. Получение экспериментальных данных в лабораторных работах по учебному курсу «Цифровая обработка сигналов» // Сборник трудов международной научно-практической конференции «Образовательные, научные и инженерные приложения в среде LabVIEW и технологии National Instruments». М.: Изд-во РУДН, 2008. С. 504-507.
153. Бугров В.Н., Лупов С.Ю., Земнюков Н.Е., Корокозов М.Н. Дискретный синтез цифровых рекурсивных фильтров // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2009. № 2. С. 76-82.
154. Канаков В.А., Лупов С.Ю., Родионов А.В. Анализ систематических погрешностей измерений параметров газодинамических процессов радиointерферометрическим методом и способы их компенсации // Труды (девятой) Научной конференции по радиофизике «Факультет – ровесник

Победы». 7 мая 2005 г./Ред. А.В.Якимов. – Нижний Новгород: ТАЛАМ, 2005. С. 100-102.

155. Лупов С.Ю., Седов А.А. Применение алгоритмов экстраполяции при анализе начальных участков радиоинтерферферограмм газодинамических процессов // Сборник трудов X международной научно - практической конференции «Образовательные, научные и инженерные приложения в среде LabVIEW и технологии National Instruments – 2011». М.: ДМК-пресс, 2011. С. 388-390.
156. Лупов С.Ю., Евсеев А.П., Fradkin E., Серебряков А.М., Зайцева М.И. Алгоритм восстановления поврежденных участков сигнала // Сборник трудов IX международной научно - практической конференции «Образовательные, научные и инженерные приложения в среде LabVIEW и технологии National Instruments». М.: Изд-во РУДН, 2010. С. 479-481.